

- Тематические курсы/Стереометрия/
- ЕГЭ Профиль/*Задание 3*
- 11 класс Стереометрия/
Фигуры вращения
- 11 класс Стереометрия/Объемы

1. Цилиндр: элементы, площадь поверхности, объем

2. Конус: элементы, площадь поверхности, объем

3. Сфера и шар: элементы, площадь поверхности, объем

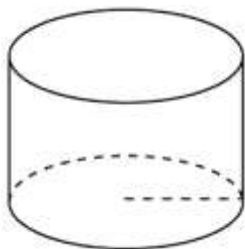
Содержание сборника:

1. Цилиндр: элементы, площадь поверхности, объем	
▪ Примеры.....	2
▪ Решение (примеры).....	4
▪ Тест.....	7
▪ Ответы.....	8
▪ Решение (тест).....	8
2. Конус: элементы, площадь поверхности, объем	
▪ Примеры.....	10
▪ Решение (примеры).....	13
▪ Тест.....	16
▪ Ответы.....	17
▪ Решение (тест).....	18
3. Сфера и шар: элементы, площадь поверхности, объем	
▪ Примеры.....	21
▪ Решение (примеры).....	22
▪ Тест.....	23
▪ Ответы.....	23
▪ Решение (тест).....	24
Справочный материал	25

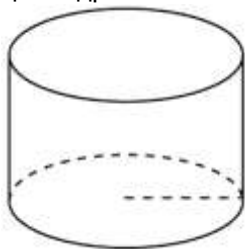
1. Цилиндр: элементы, площадь поверхности, объем

Примеры

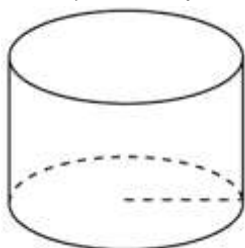
- №1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π , а высота – 1. Найдите диаметр основания.



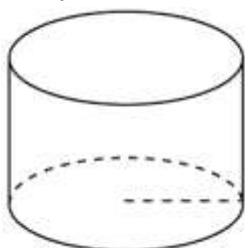
- №2. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π , а диаметр основания – 1. Найдите высоту цилиндра.



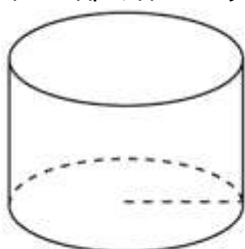
- №3. Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.



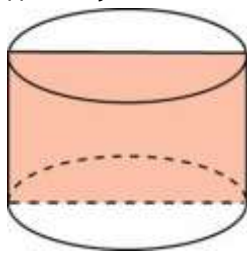
- №4. Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



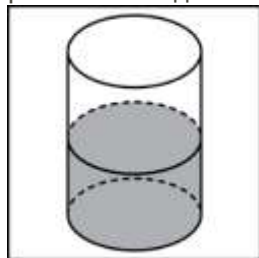
- №5. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .



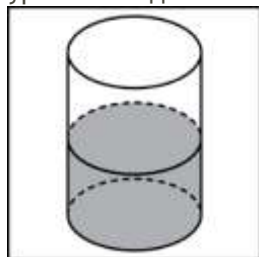
- №6. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .



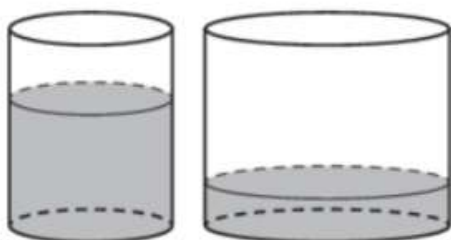
- №7. В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .



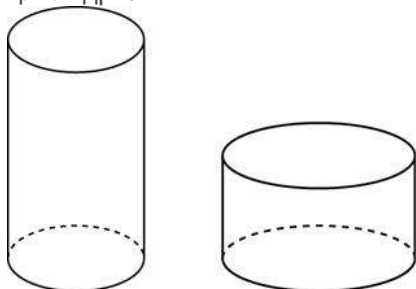
- №8. В цилиндрический сосуд налили 6 см^3 воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,5 раза. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3 .



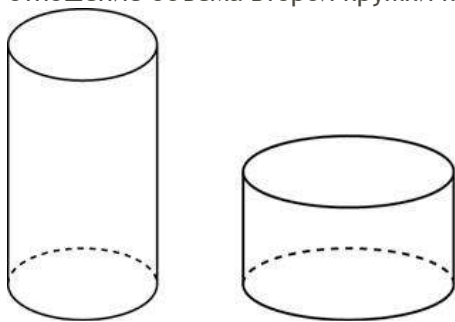
- №9. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



- №10. Дано два цилиндра. Объем первого цилиндра равен 12. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра.

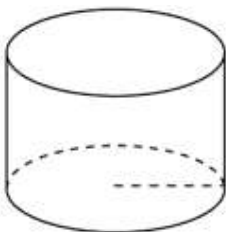


- №11. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.



▪ **Решение (примеры)** 1. Цилиндр: элементы, площадь поверхности, объем

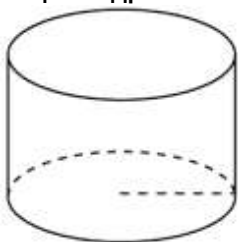
- №1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π , а высота – 1. Найдите диаметр основания.



$$S_{\text{бок.п.ц}} = 2\pi r h, \quad 2\pi = 2\pi r \cdot 1, \quad r = 1, \quad d = 2r = 2$$

Ответ: 2.

- №2. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π , а диаметр основания – 1. Найдите высоту цилиндра.

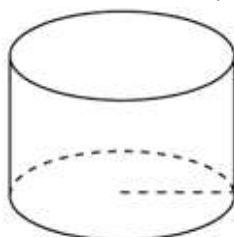


$$d = 2r, \quad 1 = 2r, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$S_{\text{бок.п.ц}} = 2\pi r h, \quad 2\pi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot h, \quad h = 2$$

Ответ: 2.

- №3. Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.

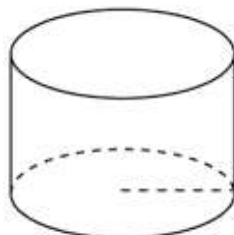


$$C_{\text{окр}} = 2\pi r, \quad 3 = 2\pi r$$

$$S_{\text{бок.п.ц}} = 2\pi r h, \quad 6 = 2\pi r \cdot h, \quad 6 = 3 \cdot h, \quad h = 2$$

Ответ: 2.

- №4. Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

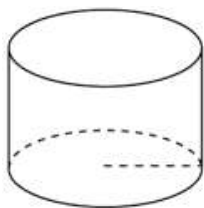


$$C_{\text{окр}} = 2\pi r, \quad 3 = 2\pi r$$

$$S_{\text{бок.п.ц}} = 2\pi r h = 2\pi r \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

Ответ: 6.

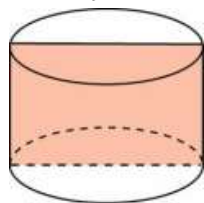
- №5. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .



$$\frac{S_{\text{бок.п.ц}}}{\pi} = \frac{2\pi rh}{\pi} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Ответ: 12.

- №6. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .

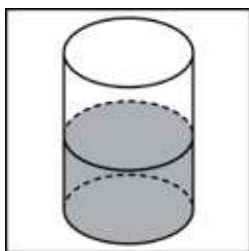


$$S_{\text{ос.сеч}} = 2r \cdot h, \quad 4 = 2r \cdot h, \quad rh = 2$$

$$\frac{S_{\text{бок.п.ц}}}{\pi} = \frac{2\pi rh}{\pi} = 2 \cdot rh = 2 \cdot 2 = 4$$

Ответ: 4.

- №7. В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .



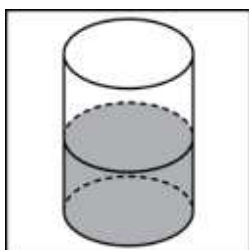
I способ. $V_{\text{воды}} = S_{\text{осн}} \cdot h, \quad 2000 = S_{\text{осн}} \cdot 12, \quad S_{\text{осн}} = \frac{500}{3}$.

$$V_{\text{дет}} = S_{\text{осн}} \cdot \Delta h, \quad V_{\text{дет}} = \frac{500}{3} \cdot 9 = 1500.$$

II способ. $\frac{2000}{V_{\text{дет}}} - 12 = 9, \quad V_{\text{дет}} = \frac{2000 \cdot 9}{12} = 1500.$

Ответ: 1500.

- №8. В цилиндрический сосуд налили 6 см^3 воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,5 раза. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3 .



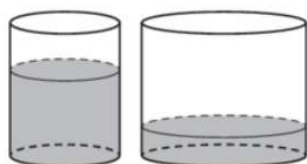
$$V_{\text{воды}} = S_{\text{осн}} \cdot h, \quad 6 = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

$$\Delta h = 1,5h - h = 0,5h.$$

$$V_{\text{дет}} = S_{\text{осн}} \cdot \Delta h = S_{\text{осн}} \cdot 0,5h = 0,5S_{\text{осн}} \cdot h = 0,5 \cdot 6 = 3.$$

Ответ: 3.

- №9. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

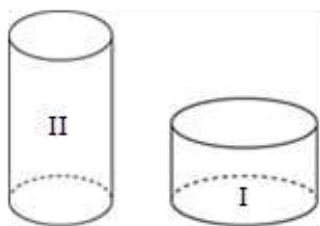


	Высота	Диаметр	Площадь основания	Объем
I цилиндр. сосуд	16	d	S	$V = S \cdot 16$
II цилиндр. сосуд	h	$2d$	$4S$	$V = 4S \cdot h$

Так как объем переливаемой жидкости сохраняется, то $S \cdot 16 = 4S \cdot h, \quad h = 4.$

Ответ: 4.

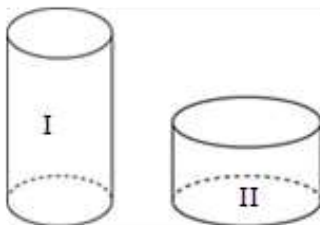
- №10. Дано два цилиндра. Объем первого цилиндра равен 12. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра.



	Высота	Радиус	Площадь основания	Объем
I цилиндр	h	r	S	$V_I = S \cdot h = 12$
II цилиндр	$3h$	$\frac{r}{2}$	$\frac{S}{4}$	$V_{II} = \frac{S}{4} \cdot 3h = \frac{3}{4} \cdot Sh =$ $= \frac{3}{4} \cdot V_I = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$

Ответ: 9.

- №11. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.



	Высота	Диаметр	Площадь основания	Объем
I цилиндр	$2h$	d	S	$V_I = S \cdot 2h$
II цилиндр	h	$1,5d = \frac{3}{2}d$	$\frac{9S}{4}$	$V_{II} = \frac{9S}{4} \cdot h$

$$\frac{V_{II}}{V_I} = \left(\frac{9S}{4} \cdot h \right) : (S \cdot 2h) = \frac{9}{8} = 1,125.$$

Ответ: 1,125.

№1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16π , а высота – 2. Найдите диаметр основания.

№2. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 72π , а диаметр основания – 9. Найдите высоту цилиндра.

№3. Длина окружности основания цилиндра равна 14. Площадь боковой поверхности равна 182. Найдите высоту цилиндра.

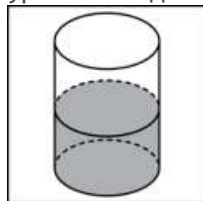
№4. Длина окружности основания цилиндра равна 8, высота равна 6. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

№5. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна $\frac{5}{\pi}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

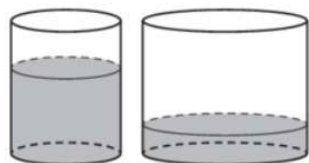
№6. Площадь осевого сечения цилиндра равна 47. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .

№7. В цилиндрический сосуд налили 2200 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 6 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .

№8. В цилиндрический сосуд налили 4 см^3 воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 2,3 раза. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3 .

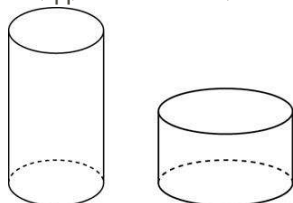


№9. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 25 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 5 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



№10. Дано два цилиндра. Объем первого цилиндра равен 81. У второго цилиндра высота в 4 раза больше, а радиус основания в 3 раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра.

№11. Первая цилиндрическая кружка в полтора раза выше второй, зато вторая вдвое раза шире первой. Найдите отношение объема первой кружки к объему второй.



■ **Ответы (тест)** 1. Цилиндр: элементы, площадь поверхности, объем

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11
8	8	13	48	20	47	825	5,2	1	36	0,375

■ **Решение (тест)** 1. Цилиндр: элементы, площадь поверхности, объем

№1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16π , а высота – 2. Найдите диаметр основания.

$$S_{\text{бок.п.ц}} = 2\pi rh, \quad 16\pi = 2\pi r \cdot 2, \quad r = 4, \quad d = 2r = 8 \quad \text{Ответ: } 8.$$

№2. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 72π , а диаметр основания – 9. Найдите высоту цилиндра.

$$d = 2r = 9, \quad S_{\text{бок.п.ц}} = 2\pi rh, \quad 72\pi = 2r \cdot \pi \cdot h, \quad 72 = 9 \cdot h, \quad h = 8 \quad \text{Ответ: } 8.$$

№3. Длина окружности основания цилиндра равна 14. Площадь боковой поверхности равна 182. Найдите высоту цилиндра.

$$C_{\text{окр}} = 2\pi r, \quad 14 = 2\pi r \\ S_{\text{бок.п.ц}} = 2\pi rh, \quad 182 = 2\pi r \cdot h, \quad 182 = 14 \cdot h, \quad h = 13 \quad \text{Ответ: } 1$$

№4. Длина окружности основания цилиндра равна 8, высота равна 6. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

$$C_{\text{окр}} = 2\pi r, \quad 8 = 2\pi r \\ S_{\text{бок.п.ц}} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48 \quad \text{Ответ: } 48.$$

№5. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна $\frac{5}{\pi}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

$$S_{\text{бок.п.ц}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{5}{\pi} = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20 \quad \text{Ответ: } 20.$$

№6. Площадь осевого сечения цилиндра равна 47. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .

$$S_{\text{ос.сеч}} = 2r \cdot h, \quad 47 = 2r \cdot h, \quad rh = \frac{47}{2} \\ \frac{S_{\text{бок.п.ц}}}{\pi} = \frac{2\pi rh}{\pi} = 2 \cdot rh = 2 \cdot \frac{47}{2} = 47 \quad \text{Ответ: } 47.$$

№7. В цилиндрический сосуд налили 2200 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 6 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .

$$V_{\text{воды}} = S_{\text{осн}} \cdot h, \quad 2200 = S_{\text{осн}} \cdot 16, \quad S_{\text{осн}} = \frac{2200}{16}.$$

$$V_{\text{дет}} = S_{\text{осн}} \cdot \Delta h, \quad V_{\text{дет}} = \frac{2200}{16} \cdot 6 = 825. \quad \text{Ответ: } 825.$$

- №8. В цилиндрический сосуд налили 4 см^3 воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 2,3 раза. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3 .

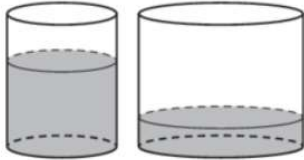
$$V_{\text{воды}} = S_{\text{осн}} \cdot h, \quad 4 = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

$$\Delta h = 2,3h - h = 1,3h.$$

$$V_{\text{дет}} = S_{\text{осн}} \cdot \Delta h = S_{\text{осн}} \cdot 1,3h = 1,3S_{\text{осн}} \cdot h = 1,3 \cdot 4 = 5,2$$

Ответ: 5,2.

- №9. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 25 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 5 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



	Высота	Диаметр	Площадь основания	Объем
I цилиндр. сосуд	25	d	S	$V = S \cdot 25$
II цилиндр. сосуд	h	$5d$	$25S$	$V = 25S \cdot h$

Так как объем переливаемой жидкости сохраняется, то
 $S \cdot 25 = 25S \cdot h, \quad h = 1.$

Ответ: 1.

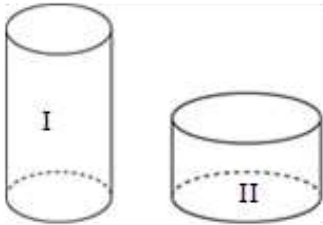
- №10. Дано два цилиндра. Объем первого цилиндра равен 81. У второго цилиндра высота в 4 раза больше, а радиус основания в 3 раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра.

$$V_I = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h = 81$$

$$V_{II} = \pi \cdot \left(\frac{r}{3}\right)^2 \cdot 4h = \pi r^2 h \cdot \frac{4}{9} = 81 \cdot \frac{4}{9} = 36$$

Ответ: 36.

- №11. Первая цилиндрическая кружка в полтора раза выше второй, зато вторая вдвое раза шире первой. Найдите отношение объема первой кружки к объему второй.



$$V_I = \pi r^2 \cdot 1,5h$$

$$V_{II} = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h = 4\pi r^2 h$$

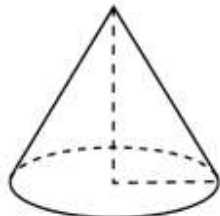
$$\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{\pi r^2 \cdot 1,5h}{4\pi r^2 h} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Ответ: 0,375.

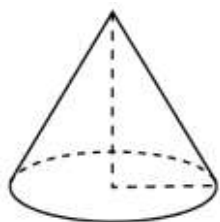
2. Конус: элементы, площадь поверхности, объем

Примеры

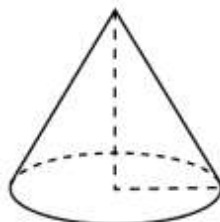
№1. Высота конуса равна 21, а диаметр основания – 144. Найдите образующую конуса.



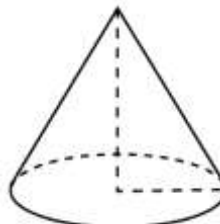
№2. Высота конуса равна 4, а длина образующей равна 5. Найдите диаметр основания конуса.



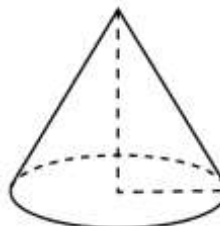
№3. Диаметр основания конуса равна 6, а длина образующей равна 5. Найдите высоту конуса.



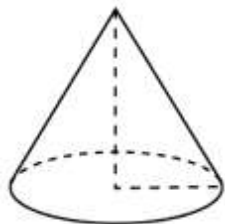
№4. Длина окружности основания конуса равна 7, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



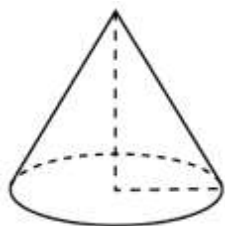
№5. 1) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?
2) Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



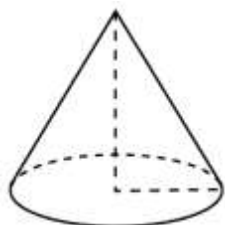
- №6. 1) Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в 1,5 раза, а образующая останется прежней?
2) Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 1,5 раза, а высота останется прежней?



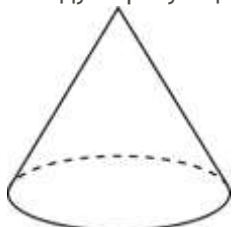
- №7. Высота конуса равна 36, образующая равна 45. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π .



- №8. Радиус основания конуса равен 12, высота равна 16. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π .



- №9. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.



- №10. Площадь основания конуса равна 16π , высота — 6. Найдите площадь осевого сечения конуса.



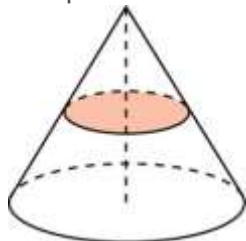
- №11. Высота конуса равна 8, а длина образующей равна 10. Найдите площадь осевого сечения конуса.



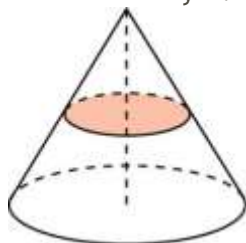
- №12. Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей равна 10. Найдите площадь осевого сечения конуса.



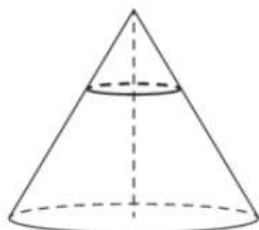
- №13. Площадь полной поверхности конуса равна 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 1:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.



- №14. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

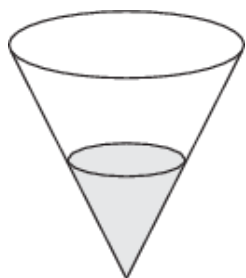


- №15. Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



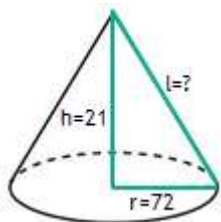
- №16.

В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объем жидкости равен 24 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



▪ **Решение (примеры)** 2. Конус: элементы, площадь поверхности, объем

№1. Высота конуса равна 21, а диаметр основания – 144. Найдите образующую конуса.

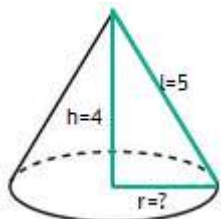


$$r = \frac{d}{2} = \frac{144}{2} = 72$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{21^2 + 72^2} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2 + 3^2 \cdot 24^2} = 3\sqrt{7^2 + 24^2} = 3 \cdot 25 = 75$$

Ответ: 75.

№2. Высота конуса равна 4, а длина образующей равна 5. Найдите диаметр основания конуса.

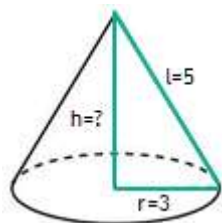


$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$d = 2r = 2 \cdot 3 = 6$$

Ответ: 6.

№3. Диаметр основания конуса равна 6, а длина образующей равна 5. Найдите высоту конуса.

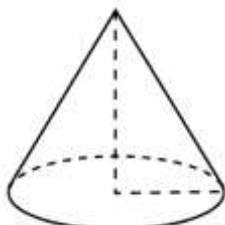


$$r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Ответ: 4.

№4. Длина окружности основания конуса равна 7, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

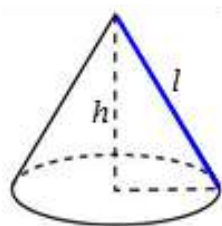


$$C_{\text{окр}} = 2\pi r, \quad 7 = 2\pi r, \quad \pi r = \frac{7}{2}$$

$$S_{\text{бок.пов.к}} = \pi r l = \frac{7}{2} \cdot 2 = 7.$$

Ответ: 7.

№5. 1) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?
2) Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



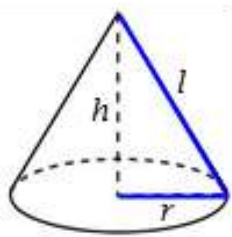
1) $S_{\text{бок.к.}} = \pi r l$, где l – образующая конуса. Т.к. образующая входит в формулу площади боковой поверхности конуса линейно, то при увеличении ее длины в 3 раза, площадь увеличится тоже в три раза при неизменном радиусе.

Ответ: 3.

2) $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$, где h – высота конуса. Т.к. высота входит в формулу объема конуса линейно, то при уменьшении ее длины в 3 раза, объем уменьшится тоже в три раза при неизменном радиусе.

Ответ: 3.

- №6. 1) Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в 1,5 раза, а образующая останется прежней?
2) Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 1,5 раза, а высота останется прежней?



1) $S_{\text{бок.к.}} = \pi r l$, где r – радиус основания конуса. Т.к. радиус входит в формулу площади боковой поверхности конуса линейно, то при уменьшении его длины в 1,5 раза, площадь уменьшится тоже в 1,5 раза при неизменной образующей.

Ответ: 1,5.

2) $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$. Т.к. радиус входит в формулу объема конуса

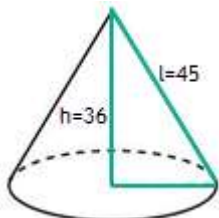
в квадрате, то при увеличении его длины в 1,5 раза или $\frac{3}{2}$ раза, площадь

основания конуса увеличится в $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$ раза и объем увеличится

тоже в 2,25 раза при неизменной высоте.

Ответ: 2,25.

- №7. Высота конуса равна 36, образующая равна 45. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π .

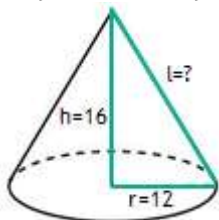


$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{45^2 - 36^2} = \sqrt{(45-36)(45+36)} = \sqrt{9 \cdot 81} = 3 \cdot 9 = 27$$

$$\frac{S_{\text{п.п.к.}}}{\pi} = \frac{\pi r^2 + \pi r l}{\pi} = \frac{\pi r(r+l)}{\pi} = 27 \cdot (27 + 45) = 27 \cdot 72 = 1944$$

Ответ: 1944.

- №8. Радиус основания конуса равен 12, высота равна 16. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π .

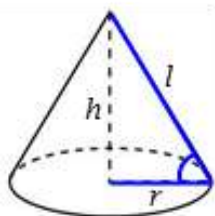


$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$$

$$\frac{S_{\text{п.п.к.}}}{\pi} = \frac{\pi r^2 + \pi r l}{\pi} = \frac{\pi r(r+l)}{\pi} = 12 \cdot (12 + 20) = 12 \cdot 32 = 384$$

Ответ: 384.

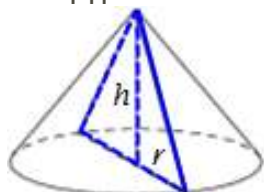
- №9. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.



$$\frac{S_{\text{бок.к.}}}{S_{\text{осн.}}} = 2, \quad \frac{\pi r l}{\pi r^2} = 2, \quad \frac{l}{r} = 2, \quad \frac{r}{l} = \frac{1}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

Ответ: 60.

- №10. Площадь основания конуса равна 16π , высота – 6. Найдите площадь осевого сечения конуса.

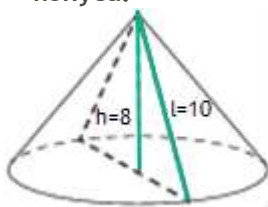


$$S_{\text{осн}} = \pi r^2, \quad 16\pi = \pi r^2, \quad r = 4.$$

$$S_{\text{ос.сеч}} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = rh = 4 \cdot 6 = 24.$$

Ответ: 24.

- №11. Высота конуса равна 8, а длина образующей равна 10. Найдите площадь осевого сечения конуса.



$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

$$S_{\text{ос.сеч}} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = rh = 6 \cdot 8 = 48$$

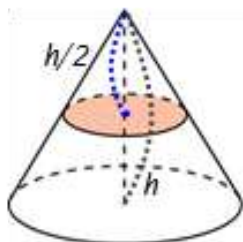
Ответ: 48.

- №12. Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей равна 10. Найдите площадь осевого сечения конуса.

$$1) \quad r = \frac{d}{2} = \frac{12}{2} = 6, \quad l = 10, \quad h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \quad 2) \quad S_{\text{ос.сеч}} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = rh = 6 \cdot 8 = 48$$

Ответ: 48.

- №13. Площадь полной поверхности конуса равна 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 1:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсеченного конуса.

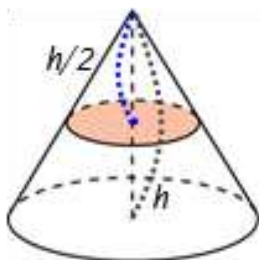


При рассечении конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, получим отсеченный конус, подобный данному, с коэффициентом подобия $k = 2$.

$$\frac{S_{\text{с}}}{S_{\text{м}}} = k^2, \quad \frac{12}{S_{\text{м}}} = 2^2, \quad S_{\text{м}} = 3$$

Ответ: 3.

- №14. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

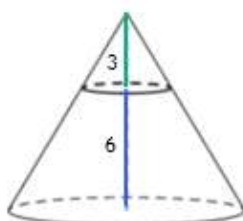


При рассечении конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, получим отсеченный конус, подобный данному, с коэффициентом подобия $k = 2$.

$$\frac{V_{\text{с}}}{V_{\text{м}}} = k^3, \quad \frac{16}{V_{\text{м}}} = 2^3, \quad V_{\text{м}} = 2$$

Ответ: 2.

- №15. Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



При рассечении конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, в сечении получим круг, подобный кругу в основании

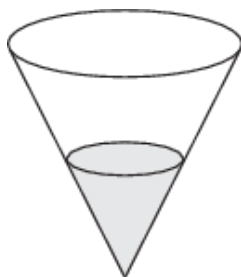
конуса с коэффициентом подобия $k = \frac{3}{3+6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{S_{\text{сеч}}}{S_{\text{осн}}}, \quad \frac{1}{9} = \frac{S_{\text{сеч}}}{18}, \quad S_{\text{сеч}} = 2$$

Ответ: 2.

№16.

В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объем жидкости равен 24 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть сосуда, заполненная жидкостью, является конусом, подобным данному, с высотой $\frac{2}{3}h$, где h – высота сосуда, тогда $k = \frac{2}{3}$.

$$\frac{V_{\text{м}}}{V_{\text{б}}} = k^3, \quad \frac{24}{V_{\text{б}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3, \quad V_{\text{б}} = 81.$$

Чтобы наполнить сосуд, надо долить $81 - 24 = 57$ мл жидкости.

Ответ: 57.

Тест

2. Конус: элементы, площадь поверхности, объем

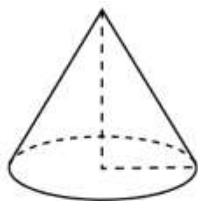
№1. Высота конуса равна 57, а диаметр основания – 152. Найдите образующую конуса.

№2. Высота конуса равна 96, а длина образующей равна 100. Найдите диаметр основания конуса.

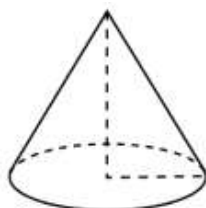
№3. Диаметр основания конуса равна 104, а длина образующей равна 65. Найдите высоту конуса.

№4. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 6. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

№5. а) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить в 9 раз?
б) Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 4 раза, а радиус основания останется прежним?



№6. а) Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшить в 19 раз?
б) Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 5 раз, а высота останется прежней?



№7. Высота конуса равна 21, образующая равна 35. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π .

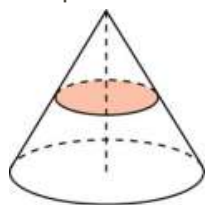
№8. Радиус основания конуса равен 72, высота равна 21. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π .

№9. Площадь основания конуса равна 49π , высота – 1. Найдите площадь осевого сечения конуса

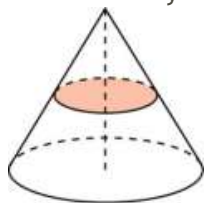
№10. Высота конуса равна 35, а длина образующей равна 37. Найдите площадь осевого сечения конуса.

№11. Диаметр основания конуса равен 54, а длина образующей равна 45. Найдите площадь осевого сечения конуса.

№12. Площадь полной поверхности конуса равна 84. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 1:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсеченного конуса.

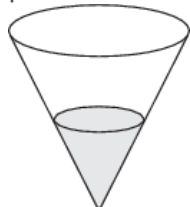


№13. Объем конуса равен 168. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



№14. Площадь основания конуса равна 63. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 1 и 2, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

№15. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объем жидкости равен 13 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



■ **Ответы (тест)** 2. Конус: элементы, площадь поверхности, объем

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15
95	56	39	9	а)9; б)4	а)19; б)25	1764	10584	7	420	972	21	21	7	338

■ **Решение (тест)** 2. Конус: элементы, площадь поверхности, объем

№1. Высота конуса равна 57, а диаметр основания – 152. Найдите образующую конуса.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{152}{2} = 76, \quad h = 57$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{57^2 + 76^2} = \sqrt{3^2 \cdot 19^2 + 4^2 \cdot 19^2} = 19\sqrt{3^2 + 4^2} = 19 \cdot 5 = 95.$$

Ответ: 95.

№2. Высота конуса равна 96, а длина образующей равна 100. Найдите диаметр основания конуса.

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{100^2 - 96^2} = \sqrt{(100 - 96)(100 + 96)} = \sqrt{4 \cdot 196} = 2 \cdot 14 = 28$$

$$d = 2r = 2 \cdot 28 = 56.$$

Ответ: 56.

№3. Диаметр основания конуса равна 104, а длина образующей равна 65. Найдите высоту конуса.

$$r = \frac{104}{2} = 52,$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{65^2 - 52^2} = \sqrt{(65 - 52)(65 + 52)} = \sqrt{13 \cdot 117} = \sqrt{13^2 \cdot 9} = 3 \cdot 13 = 39$$

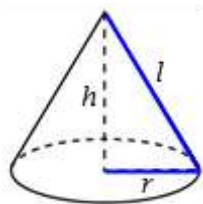
Ответ: 39.

№4. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 6. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

$$C_{\text{окр}} = 2\pi r, \quad 3 = 2\pi r, \quad \pi r = \frac{3}{2} \quad S_{\text{бок.пов.к}} = \pi r l = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$$

Ответ: 9.

- №5. а) Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить в 9 раз?
 б) Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 4 раза, а радиус основания останется прежним?



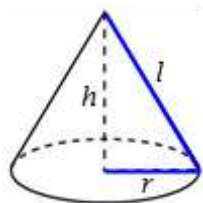
а) $S_{\text{бок.к.}} = \pi r l$, где l – образующая конуса. Т.к. образующая входит в формулу площади боковой поверхности конуса линейно, то при увеличении ее длины в 9 раз, площадь увеличится тоже в три раза при неизменном радиусе.

Ответ: 9.

б) $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$, где h – высота конуса. Т.к. высота входит в формулу объема конуса линейно, то при уменьшении ее длины в 4 раза, объем уменьшится тоже в четыре раза при неизменном радиусе.

Ответ: 4.

- №6. а) Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшить в 19 раз?
 б) Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 5 раз, а высота останется прежней?



а) $S_{\text{бок.к.}} = \pi r l$, где r – радиус основания конуса. Т.к. радиус входит в формулу площади боковой поверхности конуса линейно, то при уменьшении его длины в 19 раз, площадь уменьшится тоже в 19 раз при неизменной образующей. Ответ: 19.

б) $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$. Т.к. радиус входит в формулу объема конуса в квадрате, то при увеличении его длины в 5 раз, площадь основания конуса увеличится в $5^2 = 25$ раз и объем увеличится тоже в 25 раз при неизменной высоте.

Ответ: 25.

- №7. Высота конуса равна 21, образующая равна 35. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π .

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{35^2 - 21^2} = \sqrt{(35-21)(35+21)} = \sqrt{14 \cdot 56} = \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8} = 7 \cdot 4 = 28$$

$$\frac{S_{п.п.к.}}{\pi} = \frac{\pi r^2 + \pi r l}{\pi} = \frac{\pi r(r+l)}{\pi} = 28 \cdot (28+35) = 28 \cdot 63 = 1764$$

Ответ: 1764.

- №8. Радиус основания конуса равен 72, высота равна 21. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π .

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = \sqrt{3^2 \cdot 24^2 + 3^2 \cdot 7^2} = 3 \cdot 25 = 75$$

$$\frac{S_{п.п.к.}}{\pi} = \frac{\pi r^2 + \pi r l}{\pi} = \frac{\pi r(r+l)}{\pi} = 72 \cdot (72+75) = 72 \cdot 147 = 10584$$

Ответ: 10584.

- №9. Площадь основания конуса равна 49π , высота – 1. Найдите площадь осевого сечения конуса.

$$S_{осн} = \pi r^2, 49\pi = \pi r^2, r = 7. \quad S_{ос.сеч} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = rh = 7 \cdot 1 = 7$$

Ответ: 7.

- №10. Высота конуса равна 35, а длина образующей равна 37. Найдите площадь осевого сечения конуса.

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{37^2 - 35^2} = \sqrt{(37-35)(37+35)} = \sqrt{2 \cdot 72} = \sqrt{144} = 12$$

$$S_{ос.сеч} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = rh = 12 \cdot 35 = 420$$

Ответ: 420.

- №11. Диаметр основания конуса равен 54, а длина образующей равна 45. Найдите площадь осевого сечения конуса.

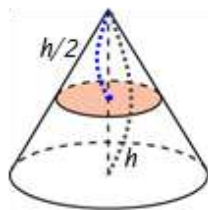
$$r = \frac{d}{2} = \frac{54}{2} = 27,$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{45^2 - 27^2} = \sqrt{(45-27)(45+27)} = \sqrt{18 \cdot 72} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8} = 9 \cdot 4 = 36$$

$$S_{ос.сеч} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = rh = 27 \cdot 36 = 972.$$

Ответ: 972.

- №12. Площадь полной поверхности конуса равна 84. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 1:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсеченного конуса.

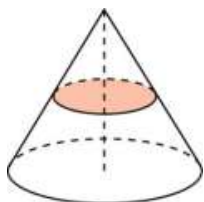


При рассечении конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, получим отсеченный конус, подобный данному, с коэффициентом подобия $k = 2$.

$$\frac{S_{\hat{o}}}{S_M} = k^2, \quad \frac{84}{S_M} = 2^2, \quad S_M = 21$$

Ответ: 21.

- №13. Объем конуса равен 168. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

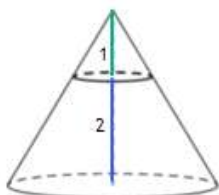


При рассечении конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, получим отсеченный конус, подобный данному, с коэффициентом подобия $k = 2$.

$$\frac{V_{\text{б}}}{V_{\text{м}}} = k^3, \quad \frac{168}{V_{\text{м}}} = 2^3, \quad V_{\text{м}} = 21.$$

Ответ: 21.

- №14. Площадь основания конуса равна 63. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 1 и 2, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

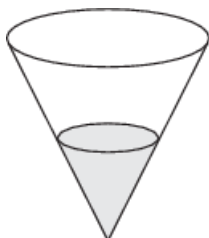


При рассечении конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, в сечении получим круг, подобный кругу в основании конуса с коэффициентом подобия

$$k = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}. \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{S_{\text{сеч}}}{S_{\text{осн}}}, \quad \frac{1}{9} = \frac{S_{\text{сеч}}}{63}, \quad S_{\text{сеч}} = 7$$

Ответ: 7.

- №15. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объем жидкости равен 13 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть сосуда, заполненная жидкостью, является конусом, подобным данному, с высотой $\frac{1}{3}h$, где h – высота сосуда, тогда $k = \frac{1}{3}$.

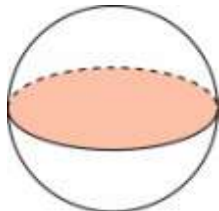
$$\frac{V_{\text{м}}}{V_{\text{б}}} = k^3, \quad \frac{13}{V_{\text{б}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3, \quad V_{\text{б}} = 351.$$

Чтобы наполнить сосуд, надо долить $351 - 13 = 338$ мл жидкости. Ответ: 338.

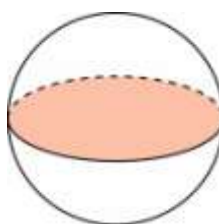
3. Сфера и шар: элементы, площадь поверхности, объем

Примеры

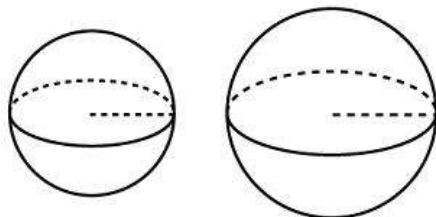
№1. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.



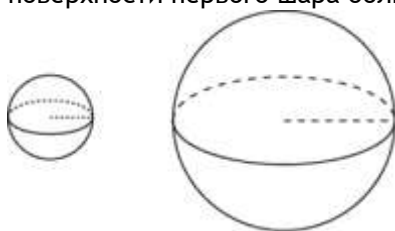
№2. Площадь поверхности шара равна 12. Найдите площадь большого круга шара.



№3. Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.



№4. Дано два шара. Радиус первого шара в 2 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

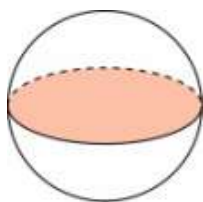


№5. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

№6. Объем одного шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

▪ **Решение (примеры)** 3. Сфера и шар: элементы, площадь поверхности, объем

№1. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

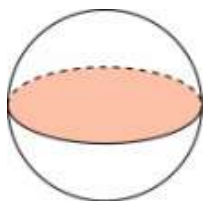


$$S_{\text{б.кр}} = \pi r^2 = 3. \text{ Радиус большого круга шара равен радиусу шара.}$$

$$S_{\text{н.ш}} = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Ответ: 12.

№2. Площадь поверхности шара равна 12. Найдите площадь большого круга шара.

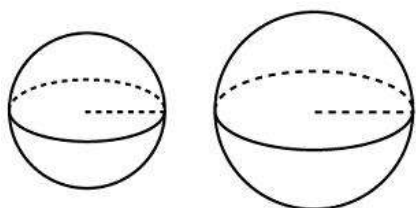


$$S_{\text{н.ш}} = 4\pi r^2 = 12, \quad \pi r^2 = 3.$$

$$\text{Радиус большого круга шара равен радиусу шара } S_{\text{б.кр}} = \pi r^2 = 3.$$

Ответ: 3.

№3. Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

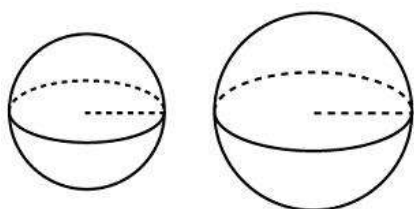


$$S_1 + S_2 = 4\pi \cdot 6^2 + 4\pi \cdot 8^2 = 4\pi \cdot 10^2 = S_3.$$

$$S_{\text{н.ш}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2, \quad r = 10.$$

Ответ: 10.

№4. Дано два шара. Радиус первого шара в 2 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Все шары подобны друг другу. Зная, с каким коэффициентом относятся линейные элементы подобных фигур: $\frac{r_1}{r_2} = 2, k = 2,$

имеем, что площади поверхности относятся с коэффициентом k^2 .

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2 = 2^2 = 4.$$

Ответ: 4.

№5. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

При увеличении линейного элемента шара, его радиуса, в три раза ($k = 3$), получим шар, подобный данному, тогда объем увеличится в $k^3 = 3^3 = 27$ раз.

Ответ: 27.

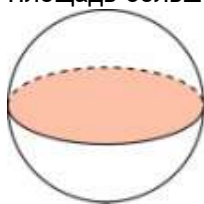
№6. Объем первого шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3 = 27, \quad k = 3. \quad \frac{S_1}{S_2} = k^2 = 3^2 = 9.$$

Ответ: 9.

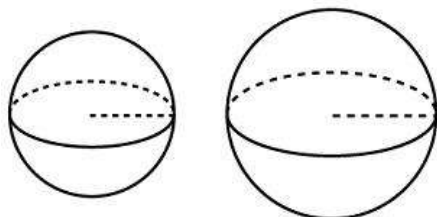
▪ **Тест** 3. Сфера и шар: элементы, площадь поверхности, объем

№1. Площадь большого круга шара равна 23. Найдите площадь поверхности шара.

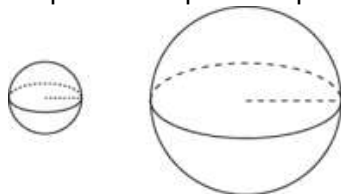


№2. Площадь поверхности шара равна 400. Найдите площадь большого круга шара.

№3. Радиусы двух шаров равны 32 и 60. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.



№4. Дано два шара. Радиус первого шара в 3 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



№5. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в девять раз?

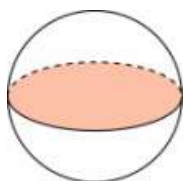
№6. Объем первого шара в 1728 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

▪ **Ответы (тест)** 3. Сфера и шар: элементы, площадь поверхности, объем

№1	№2	№3	№4	№5	№6
92	100	68	9	729	144

■ **Решение (тест)** 3. Сфера и шар: элементы, площадь поверхности, объем

№1. Площадь большого круга шара равна 23. Найдите площадь поверхности шара.

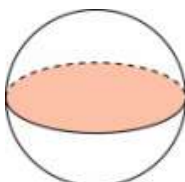


$$S_{\text{б.кр}} = \pi r^2 = 23. \text{ Радиус большого круга шара равен радиусу шара.}$$

$$S_{\text{н.ш}} = 4\pi r^2 = 4 \cdot 23 = 92.$$

Ответ: 92.

№2. Площадь поверхности шара равна 400. Найдите площадь большого круга шара.

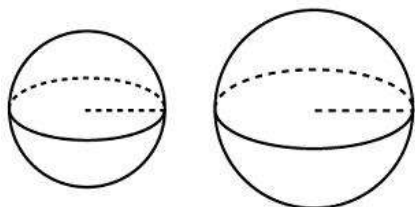


$$S_{\text{н.ш}} = 4\pi r^2 = 400, \quad \pi r^2 = 100. \text{ Радиус большого круга шара равен радиусу шара.}$$

$$S_{\text{б.кр}} = \pi r^2 = 100.$$

Ответ: 100.

№3. Радиусы двух шаров равны 32 и 60. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.



$$S_1 + S_2 = S_3$$

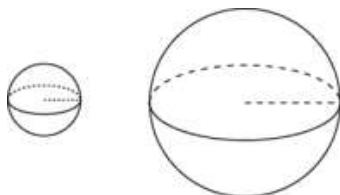
$$S_3 = 4\pi \cdot 32^2 + 4\pi \cdot 60^2 = 4\pi \cdot (32^2 + 60^2) =$$

$$= 4\pi \cdot (4^2 \cdot 8^2 + 15^2 \cdot 4^2) = 4\pi \cdot 4^2 \cdot 17^2 = 4\pi \cdot 68^2$$

$$S_{\text{н.ш}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 68^2, \quad r = 68.$$

Ответ: 68.

№4. Дано два шара. Радиус первого шара в 3 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Все шары подобны друг другу. Зная, с каким коэффициентом относятся

линейные элементы подобных фигур: $\frac{r_1}{r_2} = 3$, $k = 3$, имеем, что площади

поверхности относятся с коэффициентом k^2 .

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2 = 3^2 = 9.$$

Ответ: 9.

№5. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в девять раз?

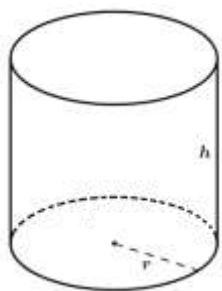
При увеличении линейного элемента шара, его радиуса, в девять раз ($k = 9$), получим шар, подобный данному, тогда объем увеличится в $k^3 = 9^3 = 729$ раз.

Ответ: 729.

№6. Объем первого шара в 1728 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3 = 1728, \quad k = 12. \quad \frac{S_1}{S_2} = k^2 = 12^2 = 144.$$

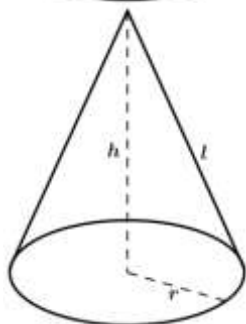
Ответ: 144.

✓ **Площади поверхности и объемы тел вращения**

Цилиндр

$$S_{\text{полн. пов}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h$$

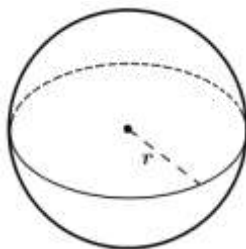
$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$



Конус

$$S_{\text{полн. пов}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \pi r^2 + \pi r l$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$



Шар

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$