Оптимизация без производной. Квадратичная функция

▪ *Примеры*

№1. Зависимость объема спроса υ (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены единицы продукции p (тыс. руб.) задается формулой $\upsilon = 330 - 3p$. Месячная выручка предприятия S (тыс. руб.) вычисляется по формуле $S = \upsilon p$. Определите численное значение месячного объема спроса на продукцию (в единицах продукции), соответствующего наибольшей месячной выручке предприятия.

№2. Строительство нового завода стоит 72 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 3x + 20$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px - \left(0,5x^2 + 3x + 20\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 6 лет?

№3. Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px - \left(0,5x^2 + 2x + 6\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

№4. Планируется построить новый завод, который ежегодно будет выпускать x тыс. ед. продукции, причем затраты на производство этого количества продукции составят $0,25x^2 + 5x$ млн. руб. в год. Кроме того планируется, что транспортные расходы на доставку продукции до места реализации составят $x + 24$ млн. руб. в год. После продажи продукции (x тыс. ед.) по цене p тыс. рублей, где p – **целое** число, за единицу ежегодная прибыль завода (в млн. руб.) составит разность между полученной суммой денег и суммарных затрат по производству продукции и транспортных расходов. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 6 лет, если расходы по его строительству оценивают в размере 150 млн. руб.?

№5. Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений за счет увеличения производства товара, уменьшило налог вдвое (до $t_1 = \frac{t_0}{2}$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге равном t рублей за единицу товара объем производства товара составляет $10\ 000 - 2t$ единиц, если это число положительно?

№6. Зависимость количества Q в шт. при условии $0 \le Q \le 15000$ купленного у фирмы товара от цены P в руб. за шт. выражается формулой $Q = 15000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 1000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей при условии $0 < t < 10000$ с каждой произведенной единицы товара. Таким образом, прибыль фирма составляет $PQ - 3000Q - 1000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором ее прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

№7. Зависимость количества Q в шт. купленного у фирмы товара от цены P в руб. за шт. выражается формулой $Q = 15000 - P$, $1000 \le P \le 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако ее прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

№8. Клиент открыл в банке депозитный вклад сроком на 1 год под p_1 процентов годовых. По окончании срока действия вклада и начисления процентов, он добавил к выданной сумме денег дополнительно сумму, составляющую 3% от внесенной год назад при открытии вклада, и переоформил вклад еще на год под p_2 процентов годовых. Известно, что $p_1 + p_2 = 25$. При каком значении p_2 через год при закрытии вклада и начислении процентов клиент получит максимальную сумму денег?

№9. Бригаду из 30 рабочих нужно распределить по двум объектам. Если на первом объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $200p$ рублей. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $(50p + 300)$ рублей. Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная суточная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придется заплатить за сутки всем рабочим?

№10. Вадим владеет двумя заводами в разных городах. За время t^2 часов изготавливается t товаров. Рабочие первого завода получают 200 рублей в час, рабочие второго – 300 рублей в час. Недельный бюджет Вадима на оплату труда рабочих – 1 200 000 рублей. Какое максимальное количество товаров смогут произвести оба завода за одну неделю?

№11. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то они производят $5t$ единиц товара.
За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

№12. Некая фирма владеет двумя заводами в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковая продукция, однако на втором заводе используется более совершенное оборудование. Если рабочие на первом заводе трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц продукции, а если рабочие на втором заводе трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц продукции.
На обоих заводах за каждый час работы фирма платит рабочему 700 рублей. На оплату труда рабочих выделено 2 870 000 рублей и все они должны быть выплачены. Какое наибольшее количество единиц продукции можно произвести за неделю на этих двух заводах?

№13. Фермер должен засеять 260 гектаров подсолнечником и кукурузой. Доход от каждой культуры в хозяйстве фермера является квадратичной функцией с аргументом, равным количеству засеянных гектаров. Каждая из квадратичных функций равна 0 при аргументе, равном 0. Максимальный доход от подсолнечника равен 900000 рублей, если засеять 150 га. Максимальный доход от кукурузы равен 800000 рублей, если засеять 200 гектаров. Найдите, сколько гектаров подсолнечника и сколько гектаров кукурузы должен засеять фермер для получения максимального доход

№1. Зависимость объема спроса υ (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены единицы продукции p (тыс. руб.) задается формулой $\upsilon = 330 - 3p$. Месячная выручка предприятия S (тыс. руб.) вычисляется по формуле $S = \upsilon p$. Определите численное значение месячного объема спроса на продукцию (в единицах продукции), соответствующего наибольшей месячной выручке предприятия.

Решение:

Подставим формулу зависимости объема спроса $\upsilon = 330 - 3p$ в формулу для месячной выручки предприятия $S = \upsilon p$, получим $S = (330 - 3p)p = -3p^2 + 330p$.

Рассмотрим функцию $S(p) = -3p^2 + 330p$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшего значения функция достигает в вершине $p_в = -\dfrac{330}{-2 \cdot 3} = 55$.

Тогда численное значение месячного объема спроса на продукцию, соответствующего наибольшей месячной выручке предприятия равно $\upsilon = 330 - 3p = 330 - 3 \cdot 55 = 165$.

Ответ: 165.

№2. Строительство нового завода стоит 72 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 3x + 20$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 3x + 20)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 6 лет?

Решение:

Прибыль фирмы (в млн. рублях) за один год выражается как

$$f(x) = px - (0,5x^2 + 3x + 20), \quad f(x) = -0,5x^2 + (p-3)x - 20.$$

Графиком функции $y = f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшего значения функция достигает в вершине $x_в = -\dfrac{p-3}{2 \cdot (-0,5)} = p - 3$ и

$$f_{наиб} = f(p-3) = -0,5 \cdot (p-3)^2 + (p-3)^2 - 20 = \frac{(p-3)^2}{2} - 20.$$

Строительство завода окупится не более чем за 6 лет, если

$$\frac{(p-3)^2}{2} - 20 \ge \frac{72}{6}; \ (p-3)^2 \ge 64; \ (p-11)(p+5) \ge 0; \ p \ge 11,$$

учитывая, что $p -$ цена продукции не может быть отрицательной. Наименьшее значение $p = 11$.

Ответ: 11.

№3. **Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px-\left(0,5x^2+2x+6\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p=10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?**

Решение:

Прибыль фирмы (в млн. рублях) за один год выражается как

$$f\left(x\right)=px-\left(0,5x^2+2x+6\right),\quad f\left(x\right)=-0,5x^2+\left(p-2\right)x-6.$$

Графиком функции $y=f\left(x\right)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшего значения функция достигает в вершине $x_в=-\dfrac{p-2}{2\cdot\left(-0,5\right)}=p-2$ и

$$f_{наиб}=f\left(p-2\right)=-0,5\cdot\left(p-2\right)^2+\left(p-2\right)^2-6=\frac{\left(p-2\right)^2}{2}-6.$$

Номер года	*Цена продукции*	*Годовая прибыль*	*Суммарная прибыль*	*Окупаемость*
1	$p=10$	$f_1=\dfrac{\left(10-2\right)^2}{2}-6=28$	$f_1=28$	$28<159$
2	$p=11$	$f_2=\dfrac{\left(11-2\right)^2}{2}-6=34,5$	$f_1+f_2=28+34,5=62,5$	$62,5<159$
3	$p=12$	$f_3=\dfrac{\left(12-2\right)^2}{2}-6=48$	$f_1+f_2+f_3=62,5+48=110,5$	$110,5<159$
4	$p=13$	$f_4=\dfrac{\left(13-2\right)^2}{2}-6=54,5$	$f_1+f_2+f_3+f_4=$ $=110,5+54,5=165,5$	$165,5>159$

Значит, при цене товара $p=13$ тыс. рублей за единицу строительство завода окупится за 4 года.

Ответ: 4.

№4. **Планируется построить новый завод, который ежегодно будет выпускать x тыс. ед. продукции, причем затраты на производство этого количества продукции составят $0,25x^2+5x$ млн. руб. в год. Кроме того планируется, что транспортные расходы на доставку продукции до места реализации составят $x+24$ млн. руб. в год. После продажи продукции (x тыс. ед.) по цене p тыс. рублей, где $p-$<u>целое</u> число, за единицу ежегодная прибыль завода (в млн. руб.) составит разность между полученной суммой денег и суммарных затрат по производству продукции и транспортных расходов. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 6 лет, если расходы по его строительству оценивают в размере 150 млн. руб.?**

Решение:

Суммарные затраты по производству продукции и транспортные расходы:

$\left(0,25x^2+5x\right)+\left(x+24\right)=0,25x^2+6x+24$.

Прибыль (в млн. рублей) за один год выражается как

$$px-\left(0,25x^2+6x+24\right)=-0,25x^2+\left(p-6\right)x-24$$

Это выражение является квадратным трехчленом и достигает своего наибольшего значения в вершине

$x_в=-\dfrac{p-6}{2\cdot\left(-0,25\right)}=2\left(p-6\right)$.

Наибольшее значение равно $-0,25\cdot\left(2\left(p-6\right)\right)^2+2\left(p-6\right)^2-24=\left(p-6\right)^2-24$.

Через 6 лет прибыль составит не менее 150 млн. рублей

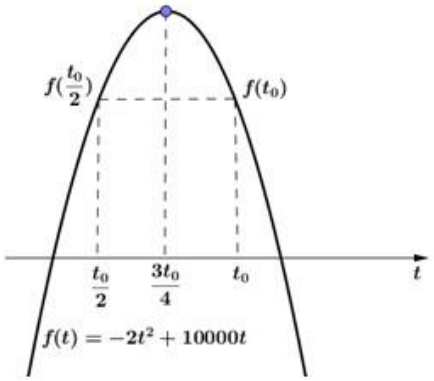
$\left(p-6\right)^2-24\ge\frac{150}{6}$; $\left(p-6\right)^2-49\ge0$; $\left(p-13\right)\left(p+1\right)\ge0$. Учитывая, что $p>0$, получим $p\ge13$.

Таким образом, наименьшее целое значение $p=13$. *Ответ: 13.*

№5. **Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений за счет увеличения производства товара, уменьшило налог вдвое (до $t_1=\frac{t_0}{2}$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге равном t рублей за единицу товара объем производства товара составляет $10\ 000-2t$ единиц, если это число положительно?**

Решение:

Налоговые сборы составляют $f\left(t\right)=t\left(10000-2t\right)=10000t-2t^2$ рублей при $t<5000$. Графиком функции $y=f\left(t\right)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. При этом $f\left(t_0\right)=f\left(\frac{t_0}{2}\right)$, значит, функция $f\left(t\right)$ достигает своего максимума при $t=\frac{3t_0}{4}$. Поскольку $\frac{3t_0}{4}$ составляет 150% от $\frac{t_0}{2}$, государству следует повысить налог на 50%.



Ответ: 50.

№6. **Зависимость количества Q в шт. при условии $0\le Q\le15000$ купленного у фирмы товара от цены P в руб. за шт. выражается формулой $Q=15000-P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q+1000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей при условии $0<t<10000$ с каждой произведенной единицы товара. Таким образом, прибыль фирма составляет $PQ-3000Q-1000000-tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.**

Фирма производит такое количество товара, при котором ее прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Решение:

В выражении $Q=15000-P$ выразим P через Q $P=15000-Q$ и подставим его в выражении для прибыли фирмы:

$$PQ-3000Q-1000000-tQ=\left(15000-Q\right)Q--3000Q-1000000-tQ=-Q^2+\left(12000-t\right)Q-1000000$$

Функция прибыли $f\left(Q\right)=-Q^2+\left(12000-t\right)Q-1000000$ квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями, направленными вниз, максимум достигается в вершине параболы

$$Q_{вершины}=-\frac{12000-t}{-2}=6000-\frac{t}{2}.$$

Наибольшее значение функции достигается в вершине и прибыль при этом значении $Q=6000-\frac{t}{2}$ будет максимальна. Тогда подставим это значение в формулу для общей суммы налогов:

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

$$tQ = t\left(6000 - \frac{t}{2}\right) = 6000t - \frac{t^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + 6000t\,.$$

Функция общей суммы налогов $g(t) = -\frac{t^2}{2} + 6000t$ квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями, направленными вниз, максимум достигается в вершине параболы

$t_{вершины} = -\frac{6000}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 6000\,.$

Наибольшее значение функции достигается в вершине, и общая сумма налогов при этом значении $t = 6000$ будет максимальной, что удовлетворяет условию $0 < t < 10000$.

Ответ: 6000.

№7. **Зависимость количества Q в шт. купленного у фирмы товара от цены P в руб. за шт. выражается формулой $Q = 15000 - P$, $1000 \le P \le 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако ее прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?**

Решение:

Учитывая, что $Q = 15000 - P$ составим выражение для прибыли фирмы:

$PQ - (3000Q + 5000000) = P(15000 - P) - 3000(15000 - P) - 5000000 = -P^2 + 18000P - 50000000$

Функция прибыли $f(P) = -P^2 + 18000P - 50000000$ есть квадратичная функция, зависящая от цены товара P. Фирма уменьшила цену товара P на 20%, значит, она стала равной $0{,}8P$, при этом ее прибыль не изменилась, т. е. $f(P) = f(0{,}8P)$, тогда получим уравнение:

$$-P^2 + 18000P - 50000000 = -(0{,}8P)^2 + 18000\cdot 0{,}8P - 50000000,$$
$$-P^2 + 0{,}64P^2 + 18000P - 14400P = 0$$
$$-0{,}36P^2 + 3600P = 0,\quad P(0{,}36P - 3600) = 0,\quad P = 10000$$

Графиком функции $f(P) = -P^2 + 18000P - 50000000$ является парабола с ветвями, направленными вниз. Наибольшее значение функции достигается в вершине $P_{вершины} = -\frac{b}{2a} = -\frac{18000}{-2} = 9000\,.$

Таким образом, была цена товара 10000 рублей, после ее снижения на 20% она стала равной $0{,}8\cdot 10000 = 8000$ рублей, а наибольшую прибыль фирма получит при цене товара 9000 рублей. Тогда

$\begin{matrix} 8000 - 100\% \\ 9000 - x\% \end{matrix}$ $x = \frac{9000\cdot 100\%}{8000} = 112{,}5\%$, $112{,}5\% - 100\% = 12{,}5\%$. На 12,5% следует увеличить сниженную цену товара, чтобы добиться наибольшей прибыли.

Ответ: 12,5.

№8. **Клиент открыл в банке депозитный вклад сроком на 1 год под p_1 процентов годовых. По окончании срока действия вклада и начисления процентов, он добавил к выданной сумме денег дополнительно сумму, составляющую 3% от внесенной год назад при открытии вклада, и переоформил вклад еще на год под p_2 процентов годовых. Известно, что $p_1+p_2=25$. При каком значении p_2 через год при закрытии вклада и начислении процентов клиент получит максимальную сумму денег?**

Решение:

Пусть сумма вклада S, тогда через 1 года после начисления процентов станет сумма $\left(1+\frac{p_1}{100}\right)S$.

Клиент добавил к этой сумме $0,03S$, тогда сумма на вкладе стала $\left(1+\frac{p_1}{100}\right)S+0,03S$.

После переоформления вклада под p_2 процентов годовых у клиента через год на счету образовалась сумма $\left(\left(1+\frac{p_1}{100}\right)S+0,03S\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)$. По условию $p_1=25-p_2$, тогда

$$\left(\left(1+\frac{25-p_2}{100}\right)S+0,03S\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=\frac{S}{100^2}(128-p_2)(100+p_2).$$

Исследуем функцию $f(p_2)=(128-p_2)(100+p_2)$, $f(p_2)=-p_2^2+28p_2+12\ 800$. Квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями, направленными вниз. Достигает наибольшего значения в вершине $(p_2)_в=-28:(-2)=14$. *Ответ: 14.*

№9. **Бригаду из 30 рабочих нужно распределить по двум объектам. Если на первом объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $200p$ рублей. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $(50p+300)$ рублей. Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная суточная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придется заплатить за сутки всем рабочим?**

Решение:

Пусть на втором объекте работает x человек, тогда на первом - $(30-x)$ человек. В сутки на втором объекте рабочий получает $(50x+300)$ рублей, а на первом - $200(30-x)$ рублей. Всего затраты на зарплату в сутки на втором объекте составят $(50x+300)\cdot x$ рублей, а на первом объекте - $200(30-x)\cdot(30-x)$ рублей. Тогда суммарная суточная зарплата бригады

$200(30-x)^2+(50x+300)\cdot x$

Исследуем функцию $f(x)=200(30-x)^2+(50x+300)\cdot x$ на наименьшее значение.

После преобразования получим вид $f(x)=250x^2-11\ 700x+180\ 000$. Квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями, направленными вверх и наименьшее значение функции достигается в точке минимума, т. е. в вершине: $x_{\min}=-\frac{b}{2a}=-\frac{-11700}{500}=23,4$. Поскольку $x-$ это натуральное число, то при $x=23$ $f(23)=43150$, а при $x=24$ $f(24)=43\ 200$. Т. к. $f(23)<f(24)$, то распределение рабочих по объектам: первый объект - 7 человек, второй - 23 человека, суммарная суточная зарплата - 43 150 рублей.

Ответ: первый объект - 7 человек, второй - 23 человека, суммарная суточная зарплата - 43 150 руб.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№10. **Вадим владеет двумя заводами в разных городах. За время t^2 часов изготавливается t товаров. Рабочие первого завода получают 200 рублей в час, рабочие второго - 300 рублей в час. Недельный бюджет Вадима на оплату труда рабочих - 1 200 000 рублей. Какое максимальное количество товаров смогут произвести оба завода за одну неделю?**

Решение:

Пусть на первом заводе рабочие трудятся суммарно x^2 часов и изготавливают x единиц товара и им заплатят $200x^2$ руб. На втором заводе соответственно - y^2 часов в неделю и y единиц товара и им заплатят $300y^2$ руб. Значит, за неделю оплата труда рабочих $200x^2+300y^2=1\ 200\ 000$.

Всего товара за неделю производится на двух заводах $x+y=a$. Надо найти максимальное значение a при заданных условиях.

$$\begin{cases}200x^2+300y^2=1\ 200\ 000\\ x+y=a\to\max\end{cases},\quad \begin{cases}2x^2+3(a-x)^2=12000\\ y=a-x\end{cases},$$

$$5x^2-6ax+3a^2-12000=0,\quad D/_4=9a^2-5\left(3a^2-12000\right)=60000-6a^2$$

Квадратное уравнение будет иметь решение, если

$$D\ge 0,\quad 60000-6a^2\ge 0,\quad a^2-100^2\le 0,\quad a\in[-100;100],\ a_{наиб.}=100.$$

Значит, наибольшее количество товара, которое могут произвести оба завода за неделю $x+y=100$.

Ответ: 100.

№11. **Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?**

Решение:

Пусть в первом городе рабочие трудятся суммарно x^2 часов в неделю и производят при этом $2x$ единиц товара; во втором городе соответственно - y^2 часов в неделю и $5y$ единиц товара. Каждую неделю нужно производить 580 единиц товара, тогда $2x+5y=580\ \ (*)$. Сумма, которую Владимир заплатит всем рабочим в неделю $500\left(x^2+y^2\right)$ и она должно быть наименьшая. Значит, надо исследовать выражение $500\left(x^2+y^2\right)$ на наименьшее значение.

Выразим y из условия $(*)$: $y=\dfrac{580-2x}{5}$, $0\le x\le 290$ и подставим в выражение

$500\left(x^2+y^2\right)=500\left(x^2+\left(\dfrac{580-2x}{5}\right)^2\right)=20\left(29x^2-2320x+580^2\right)$. Наименьшее значение квадратного трехчлена $29x^2-2320x+580^2$ достигается в вершине (график - парабола, ветви вверх) $x_в=-\dfrac{-2320}{2\cdot 29}=40$, причем $40\in[0;290]$ и $y=100$. Тогда получим, что наименьшая сумма, которую заплатит Владимир рабочим, равна значению выражения

$20\left(29\cdot 40^2-2320\cdot 40+580^2\right)=20\cdot\left(29\cdot 40^2-2\cdot 29\cdot 40^2+29^2\cdot 20^2\right)=5800000$.

Ответ: 5 800 000.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№12. **Некая фирма владеет двумя заводами в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковая продукция, однако на втором заводе используется более совершенное оборудование. Если рабочие на первом заводе трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц продукции, а если рабочие на втором заводе трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц продукции.**
На обоих заводах за каждый час работы фирма платит рабочему 700 рублей. На оплату труда рабочих выделено 2 870 000 рублей и все они должны быть выплачены. Какое наибольшее количество единиц продукции можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение:

Пусть на первом заводе рабочие трудятся суммарно x^2 часов и изготавливают $4x$ единиц продукции. На втором заводе соответственно - y^2 часов в неделю и $5y$ единиц продукции. Значит, за неделю оплата труда рабочих составит $700\left(x^2+y^2\right)=2\ 870\ 000$.

Всего продукции за неделю производится на двух заводах $4x+5y=a$. Надо найти максимальное значение a при заданных условиях.

$$\begin{cases}700\left(x^2+y^2\right)=2\ 870\ 000\\ 4x+5y=a\to\max\end{cases},\quad \begin{cases}x^2+y^2=4100\\ y=\dfrac{a-4x}{5}\end{cases},\quad \begin{cases}x^2+\left(\dfrac{a-4x}{5}\right)^2=4100\\ y=\dfrac{a-4x}{5}\end{cases}$$

$$41x^2-8ax+a^2-102500=0,\quad D/_4=16a^2-41\left(a^2-102500\right)=4202500-25a^2$$

Квадратное уравнение будет иметь решение, если

$$D\ge 0,\ \ 168100-6a^2\ge 0,\ \ a^2-410^2\le 0,\ \ a\in[-410;410],\ a_{наиб.}=410.$$

Значит, наибольшее количество товара, которое могут произвести оба завода за неделю $4x+5y=410$.

Ответ: 410.

№13. **Фермер должен засеять 260 гектаров подсолнечником и кукурузой. Доход от каждой культуры в хозяйстве фермера является квадратичной функцией с аргументом, равным количеству засеянных гектаров. Каждая из квадратичных функций равна 0 при аргументе, равном 0. Максимальный доход от подсолнечника равен 900000 рублей, если засеять 150 га. Максимальный доход от кукурузы равен 800000 рублей, если засеять 200 гектаров. Найдите, сколько гектаров подсолнечника и сколько гектаров кукурузы должен засеять фермер для получения максимального дохода.**

Решение:

Пусть x га засеяно подсолнечником, y га - кукурузой, тогда $x+y=260$. Доход от каждой культуры является квадратичной функцией $D(t)=at^2+bt+c$. По условию, при аргументе $t=0$, значение функции $D(0)=0$, значит, $c=0$.

Подсолнечник: $D_1(x)=a_1x^2+b_1x$.

Квадратичная функция достигает максимума в вершине $x_в=-\dfrac{b_1}{2a_1},\ \ 150=-\dfrac{b_1}{2a_1},\ \ b_1=-300a_1$, если ветви парабола направлены вниз $(a_1<0)$.

$D_{1\max}(150)=900000$.

$900000 = a_1 \cdot 150^2 + b_1 \cdot 150$

$900000 = a_1 \cdot 150^2 - 300a_1 \cdot 150$

$a_1 = -40, \;\; b_1 = 12000$

$D_1(x) = -40x^2 + 12000x$.

Кукуруза: $D_2(x) = a_2 y^2 + b_2 y$.

Квадратичная функция достигает максимума в вершине $y_в = -\frac{b_2}{2a_2}$, $200 = -\frac{b_2}{2a_2}$, $b_2 = -400a_2$, если ветви парабола направлены вниз $(a_2 < 0)$.

$D_{2\max}(200) = 800000$

$800000 = a_2 \cdot 200^2 + b_2 \cdot 200$

$800000 = a_2 \cdot 200^2 - 400a_2 \cdot 200$

$a_2 = -20, \;\; b_2 = 8000$

$D_2(y) = -20y^2 + 8000y$. Учитывая, что $y = 260 - x$, получим $D_2(x) = -20(260 - x)^2 + 8000(260 - x)$,

$D_2(x) = -20x^2 + 2400x + 728000$.

Доход от двух культур: $D(x) = D_1(x) + D_2(x) = -40x^2 + 12000x - 20x^2 + 2400x + 728000$.

$D(x) = -60x^2 + 14400x$. Квадратичная функция достигает максимума в вершине

$x_{\max} = -\frac{14400}{2 \cdot (-60)} = 120 \;\; y = 260 - 120 = 140$.

Ответ: 120 га подсолнечника и 140 га кукурузы.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

▪ *Тест* Оптимизация без производной. Квадратичная функция

№1. Зависимость объема спроса υ (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены единицы продукции p (тыс. руб.) задается формулой $\upsilon = 240 - 4p$. Месячная выручка предприятия S (тыс. руб.) вычисляется по формуле $S = \upsilon p$. Определите численное значение месячного объема спроса на продукцию (в единицах продукции), соответствующего наибольшей месячной выручке предприятия.

№2. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + 2x + 5$ млн. рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн. рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн. рублей?

№3. Планируется построить новый завод, который ежегодно будет выпускать x тыс. ед. продукции, причем затраты на производство этого количества продукции составят $0,25x^2 + 4x$ млн. руб. в год. Кроме того планируется, что транспортные расходы на доставку продукции до места реализации составят $x + 12$ млн. руб. в год. После продажи продукции (x тыс. ед.) по цене p тыс. рублей, где p – **целое** число, за единицу ежегодная прибыль завода (в млн. руб.) составит разность между полученной суммой денег и суммарных затрат по производству продукции и транспортных расходов. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 5 лет, если расходы по его строительству оценивают в размере 120 млн. руб.?

№4. Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После уменьшение объема производства товара, государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог вдвое (до $t_1 = 2t_0$), при этом сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы обиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге равном t рублей за единицу товара объем производства товара составляет $10\ 000 - 2t$ единиц, если это число положительно?

№5. Клиент открыл в банке депозитный вклад сроком на 1 год под p_1 процентов годовых. По окончании срока действия вклада и начисления процентов, он добавил к выданной сумме денег дополнительно сумму, составляющую 5% от внесенной год назад при открытии вклада, и переоформил вклад еще на год под p_2 процентов годовых. Известно, что $p_1 + p_2 = 27$. При каком значении p_2 через год при закрытии вклада и начислении процентов клиент получит максимальную сумму денег?

№6. Бригаду из 40 рабочих нужно распределить по двум объектам. Если на первом объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $300p$ рублей. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $(70p + 400)$ рублей. Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная суточная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придется заплатить за сутки всем рабочим?

№7. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то они производят $4t$ единиц товара.
За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

№8. Некая фирма владеет двумя заводами в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковая продукция, однако на втором заводе используется более совершенное оборудование. Если рабочие на первом заводе трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц продукции, а если рабочие на втором заводе трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $8t$ единиц продукции.
На обоих заводах за каждый час работы фирма платит рабочему 400 рублей. На оплату труда рабочих выделено 3 560 000 рублей и все они должны быть выплачены. Какое наибольшее количество единиц продукции можно произвести за неделю на этих двух заводах?

- ***Ответы (тест)*** Оптимизация без производной. Квадратичная функция

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
120	*8*	*11*	*25*	*16*	*Первый цех - 8 чел., Второй цех - 32 чел., 103 680 руб.*	*500*	*890*

▪ *Решение (тест)* Оптимизация без производной. Квадратичная функция

№1. **Зависимость объема спроса υ (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены единицы продукции p (тыс. руб.) задается формулой $\upsilon = 240 - 4p$. Месячная выручка предприятия S (тыс. руб.) вычисляется по формуле $S = \upsilon p$. Определите численное значение месячного объема спроса на продукцию (в единицах продукции), соответствующего наибольшей месячной выручке предприятия.**

Решение:

Подставим формулу зависимости объема спроса $\upsilon = 240 - 4p$ в формулу для месячной выручки предприятия $S = \upsilon p$, получим $S = (240 - 4p)p = -4p^2 + 240p$.

Рассмотрим функцию $S(p) = -4p^2 + 240p$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшего значения функция достигает в вершине $p_в = -\dfrac{240}{-2 \cdot 4} = 30$.

Тогда численное значение месячного объема спроса на продукцию, соответствующего наибольшей месячной выручке предприятия равно $\upsilon = 240 - 4p = 240 - 4 \cdot 30 = 120$.

Ответ: 120.

№2. **Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + 2x + 5$ млн. рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн. рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн. рублей?**

Решение:

Прибыль (в млн. рублей) за один год выражается как

$$px - (0{,}5x^2 + 2x + 5) = -0{,}5x^2 + (p-2)x - 5$$

Это выражение является квадратным трехчленом и достигает своего наибольшего значения при $x_в = -\dfrac{p-2}{2 \cdot (-0{,}5)} = p - 2$. Наибольшее значение равно $-0{,}5 \cdot (p-2)^2 + (p-2)^2 - 5 = \dfrac{(p-2)^2}{2} - 5$.

Через 3 года прибыль составит не менее 52 млн. рублей

$\dfrac{(p-2)^2}{2} - 5 \ge \dfrac{52}{4}$; $(p-2)^2 \ge 36$; $(p-8)(p+4) \ge 0$. Учитывая, что $p > 0$, получим $p \ge 8$. Таким образом, наименьшее значение $p = 8$.

Ответ: 8.

№3. **Планируется построить новый завод, который ежегодно будет выпускать x тыс. ед. продукции, причем затраты на производство этого количества продукции составят $0,25x^2+4x$ млн. руб. в год. Кроме того планируется, что транспортные расходы на доставку продукции до места реализации составят $x+12$ млн. руб. в год. После продажи продукции (x тыс. ед.) по цене p тыс. рублей, где p – целое число, за единицу ежегодная прибыль завода (в млн. руб.) составит разность между полученной суммой денег и суммарных затрат по производству продукции и транспортных расходов. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 5 лет, если расходы по его строительству оценивают в размере 120 млн. руб.?**

Решение:

Суммарные затраты по производству продукции и транспортные расходы:

$\left(0,25x^2+4x\right)+\left(x+12\right)=0,25x^2+5x+12$.

Прибыль (в млн. рублей) за один год выражается как

$$px-\left(0,25x^2+5x+12\right)=-0,25x^2+\left(p-5\right)x-12$$

Это выражение является квадратным трехчленом и достигает своего наибольшего значения в вершине

$x_в=-\dfrac{p-5}{2\cdot\left(-0,25\right)}=2\left(p-5\right)$.

Наибольшее значение равно $-0,25\cdot\left(2\left(p-5\right)\right)^2+2\left(p-5\right)^2-12=\left(p-5\right)^2-12$.

Через 5 лет прибыль составит не менее 120 млн. рублей

$\left(p-5\right)^2-12\ge\dfrac{120}{5}$; $\left(p-5\right)^2-36\ge0$; $\left(p-11\right)\left(p+1\right)\ge0$. Учитывая, что $p>0$, получим $p\ge11$.

Таким образом, наименьшее целое значение $p=11$.

Ответ: 11.

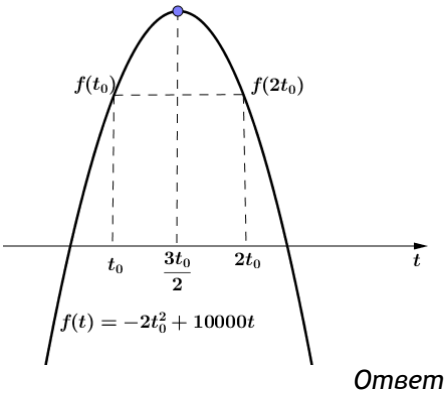
№4. **Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После уменьшение объема производства товара, государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог вдвое (до $t_1=2t_0$), при этом сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы обиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге равном t рублей за единицу товара объем производства товара составляет $10\ 000-2t$ единиц, если это число положительно?**

Решение:

Налоговые сборы составляют

$f\left(t\right)=t\left(10000-2t\right)=10000t-2t^2$ рублей при $t<5000$.

Графиком функции $y=f\left(t\right)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. При этом $f\left(t_0\right)=f\left(2t_0\right)$, значит, функция $f\left(t\right)$ достигает своего максимума при $t=\dfrac{3t_0}{2}$. Поскольку $\dfrac{3t_0}{2}$ составляет 75% от $2t_0$, государству следует понизить налог на 25%.



Ответ: 25.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№5. **Клиент открыл в банке депозитный вклад сроком на 1 год под p_1 процентов годовых. По окончании срока действия вклада и начисления процентов, он добавил к выданной сумме денег дополнительно сумму, составляющую 5% от внесенной год назад при открытии вклада, и переоформил вклад еще на год под p_2 процентов годовых. Известно, что $p_1+p_2=27$. При каком значении p_2 через год при закрытии вклада и начислении процентов клиент получит максимальную сумму денег?**

Решение:

Пусть сумма вклада S, тогда через 1 года после начисления процентов станет сумма $\left(1+\frac{p_1}{100}\right)S$. Клиент добавил к этой сумме $0,05S$, тогда сумма на вкладе стала $\left(1+\frac{p_1}{100}\right)S+0,05S$.

После переоформления вклада под p_2 процентов годовых у клиента через год на счету образовалась сумма $\left(\left(1+\frac{p_1}{100}\right)S+0,05S\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)$. По условию $p_1=27-p_2$, тогда

$\left(\left(1+\frac{27-p_2}{100}\right)S+0,05S\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=\frac{S}{100^2}(132-p_2)(100+p_2)$.

Исследуем функцию $f(p_2)=(132-p_2)(100+p_2)$, $f(p_2)=-p_2^2+32p_2+13\ 200$. Квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями, направленными вниз. Достигает наибольшего значения в вершине $(p_2)_в=-\frac{32}{-2}=16$.

Ответ: 16.

№6. **Бригаду из 40 рабочих нужно распределить по двум объектам. Если на первом объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $300p$ рублей. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $(70p+400)$ рублей. Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная суточная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придется заплатить за сутки всем рабочим?**

Решение:

Пусть на втором объекте работает x человек, тогда на первом - $(40-x)$ человек. В сутки на втором объекте рабочий получает $(70x+400)$ рублей, а на первом - $300(40-x)$ рублей. Всего затраты на зарплату в сутки на втором объекте составят $(70x+400)\cdot x$ рублей, а на первом объекте - $300(40-x)\cdot(40-x)$ рублей. Тогда суммарная суточная зарплата бригады

$300(40-x)^2+(70x+400)\cdot x$

Исследуем функцию $f(x)=300(40-x)^2+(70x+400)\cdot x$ на наименьшее значение.

После преобразования получим вид $f(x)=370x^2-23\ 600x+480\ 000$. Квадратичная функция, графиком является парабола с ветвями, направленными вверх и наименьшее значение функции достигается в точке минимума, т. е. в вершине: $x_{\min}=-\frac{b}{2a}=-\frac{-23600}{740}\approx 31,89$. Поскольку $x-$ это натуральное число, то при $x=31$ $f(31)=103970$, а при $x=32$ $f(32)=103680$. Т. к. $f(31)>f(32)$, то распределение рабочих по объектам: первый объект - 8 человек, второй - 32 человека, суммарная суточная зарплата - 103 680 рублей.

Ответ: первый объект - 8 человек, второй - 32 человека, суммарная суточная зарплата - 103 680 руб.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№7. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то они производят $4t$ единиц товара.
За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение:

Пусть в первом городе рабочие трудятся суммарно x^2 часов в неделю и производят при этом $3x$ единиц товара; во втором городе соответственно - y^2 часов в неделю и $4y$ единиц товара. Каждую неделю нужно производить $S = 3x + 4y$ $(*)$ единиц товара, требуется найти максимум этого выражения. Сумма, которую Григорий заплатит всем рабочим в неделю $500\left(x^2 + y^2\right) = 5000000 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10000$.

Выразим y из условия $(*)$: $y = \dfrac{S - 3x}{4}$, и подставим в выражение $x^2 + y^2 = 10000$.

$$x^2 + \left(\frac{S - 3x}{4}\right)^2 = 10000, \quad 25x^2 - (6S)x + \left(S^2 - 160000\right) = 0.$$

Полученное уравнение имеет решения, если его дискриминант неотрицателен:
$D/_4 = 9S^2 - 25\left(S^2 - 160000\right) \geq 0 \Leftrightarrow -500 \leq S \leq 500$. Значит, наибольшее значение суммы равно 500.

Ответ: 500.

№8. Некая фирма владеет двумя заводами в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковая продукция, однако на втором заводе используется более совершенное оборудование. Если рабочие на первом заводе трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц продукции, а если рабочие на втором заводе трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $8t$ единиц продукции.
На обоих заводах за каждый час работы фирма платит рабочему 400 рублей. На оплату труда рабочих выделено 3 560 000 рублей и все они должны быть выплачены. Какое наибольшее количество единиц продукции можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение:

Пусть на первом заводе рабочие трудятся суммарно x^2 часов и изготавливают $5x$ единиц продукции. На втором заводе соответственно - y^2 часов в неделю и $8y$ единиц продукции. Значит, за неделю оплата труда рабочих составит $400\left(x^2 + y^2\right) = 3\ 560\ 000$.

Всего продукции за неделю производится на двух заводах $5x + 8y = a$. Надо найти максимальное значение a при заданных условиях.

$$\begin{cases} 400\left(x^2 + y^2\right) = 3\ 560\ 000 \\ 5x + 8y = a \to \max \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 8900 \\ y = \dfrac{a - 5x}{8} \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 + \left(\dfrac{a - 5x}{8}\right)^2 = 8900 \\ y = \dfrac{a - 5x}{8} \end{cases}$$

$$89x^2 - 10ax + a^2 - 569600 = 0, \quad D/_4 = 25a^2 - 89\left(a^2 - 569600\right) = 50694400 - 64a^2 = 64\left(792100 - a^2\right)$$

Квадратное уравнение будет иметь решение, если

$$D \geq 0, \quad 7792100 - a^2 \geq 0, \quad a^2 - 890^2 \leq 0, \quad a \in [-890; 890], \quad a_{наиб.} = 890.$$

Значит, наибольшее количество товара, которое могут произвести оба завода за неделю $5x + 8y = 890$.

Ответ: 890.