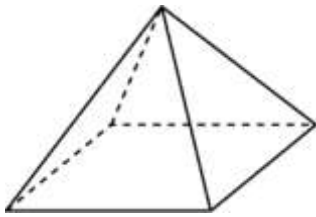


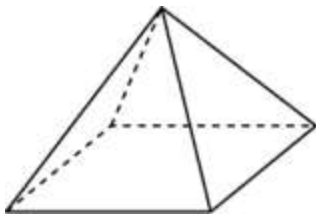
Элементы пирамиды. Площадь поверхности. Сечения

■ Примеры

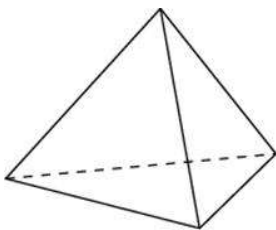
- №1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S вершина, $SO = 4$, $AC = 6$. Найдите боковое ребро SC .



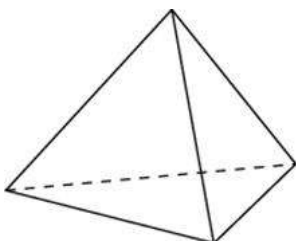
- №2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S вершина, $SC = 5$, $AC = 6$. Найдите длину отрезка SO .



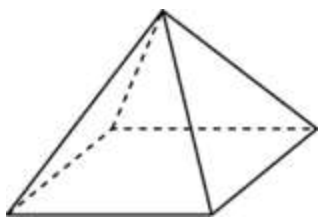
- №3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ R – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $AB = 1$, а $SR = 2$. Найдите площадь боковой поверхности.



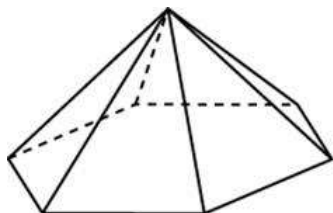
- №4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ L – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $SL = 2$, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка AB .



- №5. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

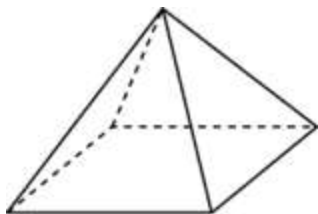


- №6. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

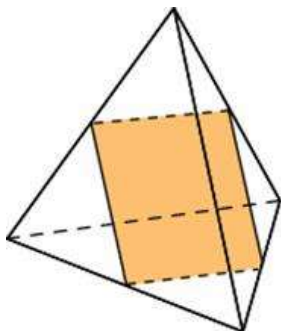


- №7. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

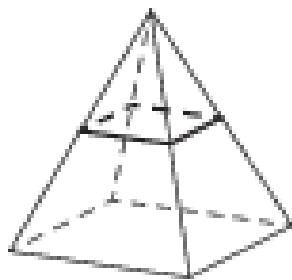
- №8. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4.



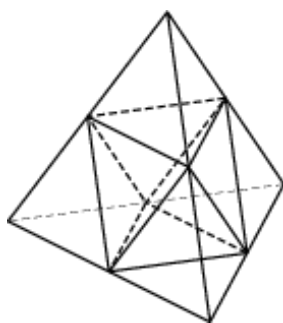
- №9. Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.



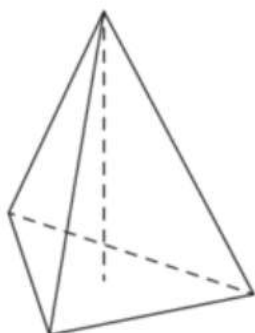
- №10. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



- №11. Площадь поверхности тетраэдра равна 12. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

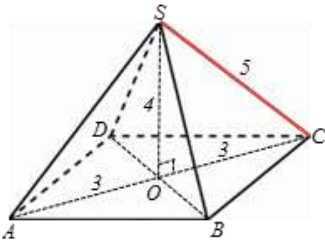


- №12. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а сторона основания равна $3\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.



Решения (примеры)

- №1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S вершина, $SO = 4$, $AC = 6$. Найдите боковое ребро SC .

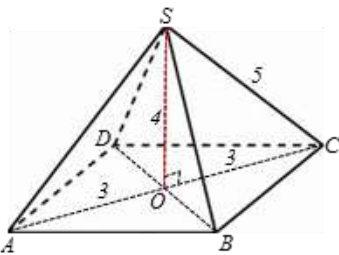


В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат, его центр – точка пересечения диагоналей. Пирамида правильная, значит, высота проходит через центр основания, SO – высота пирамиды.

Треугольник SOC – прямоугольный (Египетский), $SO = 4$, $OC = AC / 2 = 6 / 2 = 3$, тогда $SC = 5$.

Ответ: 5.

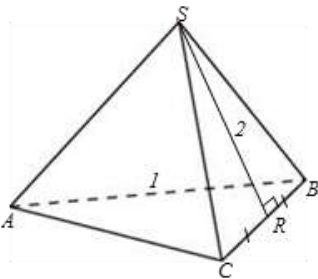
- №2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S вершина, $SC = 5$, $AC = 6$. Найдите длину отрезка SO .



Аналогично, треугольник SOC – прямоугольный (Египетский), $SC = 5$, $OC = AC / 2 = 6 / 2 = 3$, тогда $SO = 4$.

Ответ: 4.

- №3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ R – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $AB = 1$, а $SR = 2$. Найдите площадь боковой поверхности.



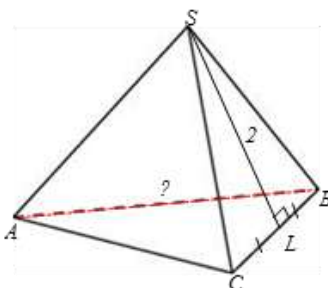
SR – медиана, высота равнобедренного треугольника CBS .

Пирамида правильная треугольная, значит, $S_{б.п.} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$, где $l = SR$ – апофема или высота боковой грани пирамиды.

$$S_{б.п.} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 3.$$

Ответ: 3.

- №4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ L – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $SL = 2$, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка AB .

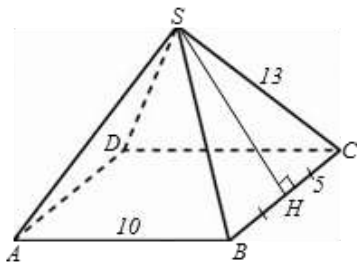


В правильной треугольной пирамиде всего три боковых грани и они равны между собой, поэтому $S_{BCS} = \frac{S_{б.п.}}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

$$S_{BCS} = \frac{1}{2} SL \cdot BC, \quad 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BC, \quad BC = 1. \quad AB = BC = 1.$$

Ответ: 1.

- №5. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



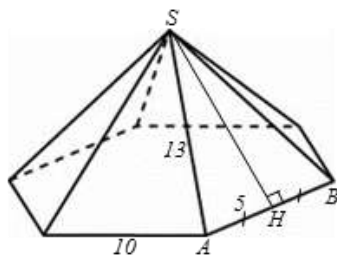
Проведем $SH \perp BC$ и т.к. треугольник BCS – равнобедренный с основанием BC , то SH – медиана, значит, $HC = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5$. В

треугольнике SCH $l = SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

$$S_{\text{п.п.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l + a^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot 12 + 10^2 = 240 + 100 = 340.$$

Ответ: 340.

- №6. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



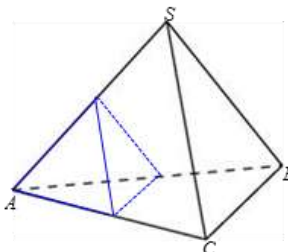
Проведем $SH \perp AB$ и т.к. треугольник ABS – равнобедренный с основанием AB , то SH – медиана, значит, $AH = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$. В

треугольнике ASH $l = SH = \sqrt{AS^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

$$S_{\text{б.п.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 = 360.$$

Ответ: 360.

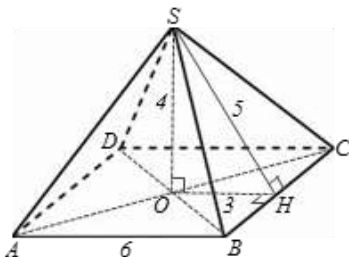
- №7. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



При увеличении всех ребер в одно и то же число раз, получим тетраэдр, подобный данному с коэффициентом подобия $k = 2$. Тогда площадь поверхности увеличится в k^2 раз, т.е. в увеличится в 4 раза.

Ответ: 4.

- №8. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4.

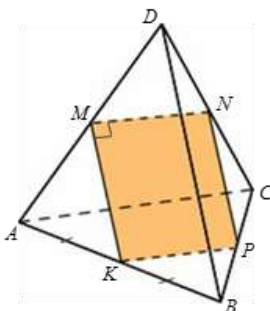


Проведем $OH \perp BC$, тогда $SH \perp BC$ по т. о трех перпендикулярах. $OH = 3$ (средняя линия треугольника ABC). SO – высота пирамиды, тогда треугольник SOH – прямоугольный (Египетский), $SH = 5$.

$$S_{\text{п.п.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l + a^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 + 6^2 = 60 + 36 = 96.$$

Ответ: 96.

- №9. Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.

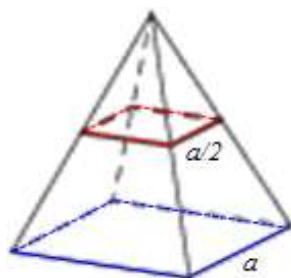


В правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра перпендикулярны $BD \perp AC$, тогда $KM \perp MN$, т.к. $KM \parallel BD$ и $MN \parallel AC$. В данном тетраэдре все ребра равны, поэтому все средние линии боковых граней тоже равны $KM = MN = 0,5$. Сечение $MNPQ$ – квадрат.

$$S_{MNPQ} = MK^2 = 0,5^2 = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

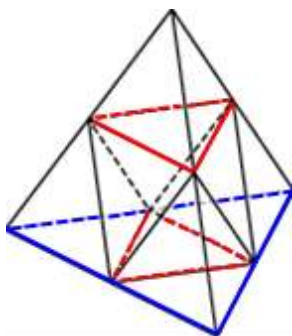
- №10. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



В основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 1. В сечении, проходящем через середины ребер, будет квадрат со стороной 0,5, его площадь $S_{сеч.} = 0,5^2 = 0,25$.

Ответ: 0,25.

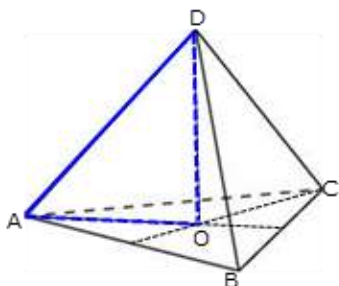
- №11. Площадь поверхности тетраэдра равна 12. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.



Каждой грани тетраэдра подобны две грани октаэдра с коэффициентом подобия $k^2 = 4$. Пусть S_1 – площадь выделенной грани тетраэдра (синий цвет), тогда площадь поверхности двух граней октаэдра (красный цвет) будет равна $\frac{S_1}{4} + \frac{S_1}{4} = \frac{S_1}{2}$. Аналогично для оставшихся трех граней тетраэдра. Тогда площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра, будет равна $\frac{12}{2} = 6$.

Ответ: 6.

- №12. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а сторона основания равна $3\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.



В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной $3\sqrt{3}$.

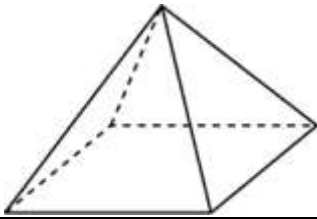
$$AO = R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3.$$

Прямоугольный треугольник AOD с гипотенузой $AD = 5$, катетом $AO = 3$ – Египетский, поэтому $DO = 4$.

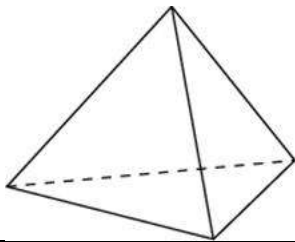
Ответ: 4.

■ **Тест** **Элементы пирамиды. Площадь поверхности. Сечения**

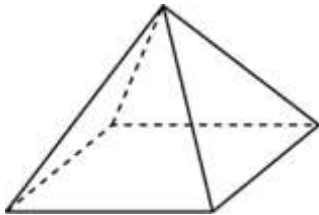
- №1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 9$, $BD = 24$. Найдите боковое ребро SC .



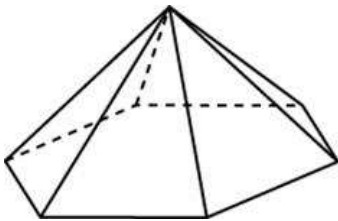
- №2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ M – середина ребра AB , S – вершина. Известно, что $BC = 4$, а $SM = 29$. Найдите площадь боковой поверхности.



- №3. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 42, боковые ребра равны 75. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

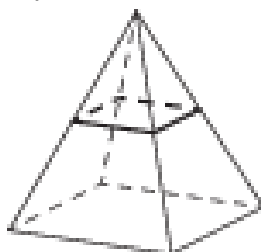


- №4. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 28, боковые ребра равны 50. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

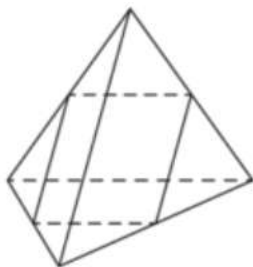


- №5. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в 5 раз?

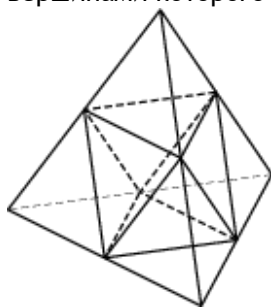
- №6. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 100. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



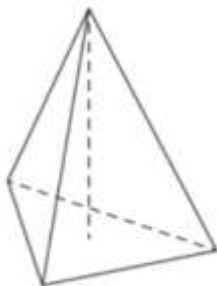
- №7. Ребра правильного тетраэдра равны 38. Найдите площадь сечения. Проходящего через середины четырех его ребер.



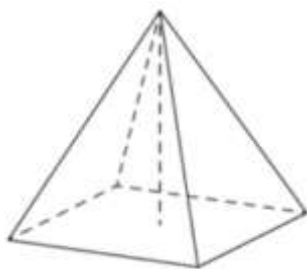
- №8. Площадь поверхности тетраэдра равна 46. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра.



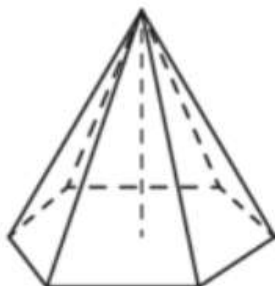
- №9. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 7, а сторона основания равна $\sqrt{39}$. Найдите высоту пирамиды.



- №10. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 5, сторона основания равна $3\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.



- №11. В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 4, а сторона основания равна $\sqrt{7}$. Найдите высоту пирамиды.

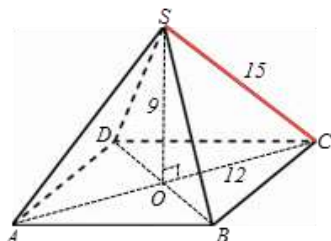


■ **Ответы (тест)** Элементы пирамиды. Площадь поверхности. Сечения

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11
15	174	7812	4032	25	2500	361	23	6	4	3

■ **Решение (тест)** Элементы пирамиды. Площадь поверхности. Сечения

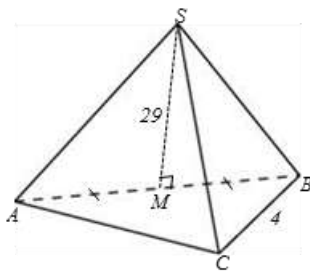
- №1 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 9$, $BD = 24$. Найдите боковое ребро SC .



В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат, его центр – точка пересечения диагоналей. Пирамида правильная, значит, высота проходит через центр основания, SO – высота пирамиды. Треугольник SOC – прямоугольный (подобен Египетскому), $SO = 3 \cdot 3 = 9$, $OC = AC / 2 = BD / 2 = 24 / 2 = 3 \cdot 4 = 12$, тогда $SC = 3 \cdot 5 = 15$.

Ответ: 15.

- №2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ M – середина ребра AB , S – вершина. Известно, что $BC = 4$, а $SM = 29$. Найдите площадь боковой поверхности.



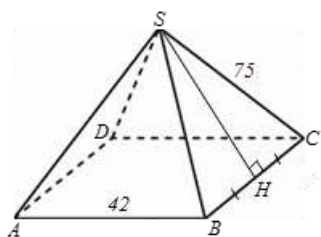
SM – медиана, высота равнобедренного треугольника ABS .

Пирамида правильная треугольная, значит, $S_{б.п.} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$, где $l = SM$ – апофема или высота боковой грани пирамиды.

$$S_{б.п.} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 29 = 174.$$

Ответ: 174.

- №3 Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 42, боковые ребра равны 75. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Проведем $SH \perp BC$ и т.к. треугольник BCS – равнобедренный с основанием BC , то SH – медиана, значит, $HC = \frac{BC}{2} = \frac{42}{2} = 21$. В

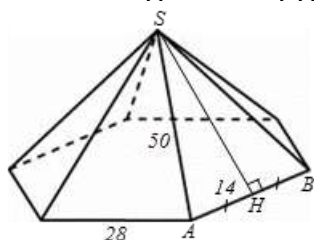
треугольнике SCH

$$l = SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{75^2 - 21^2} = \sqrt{54 \cdot 96} = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 16} = 3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$$

$$S_{п.п.} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l + a^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 42 \cdot 72 + 42^2 = 42 \cdot 6 \cdot (24 + 7) = 7812.$$

Ответ: 7812.

- №4 Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 28, боковые ребра равны 50. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Проведем $SH \perp AB$ и т.к. треугольник ABS – равнобедренный с основанием AB , то SH – медиана, значит, $AH = \frac{AB}{2} = \frac{28}{2} = 14$. В

треугольнике ASH

$$l = SH = \sqrt{AS^2 - AH^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = \sqrt{36 \cdot 64} = 6 \cdot 8 = 48.$$

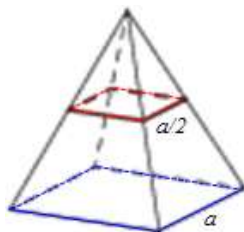
$$S_{б.п.} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 28 \cdot 48 = 4032.$$

Ответ: 4032.

- №5 Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в 5 раз?

При увеличении всех ребер в одно и то же число раз, получим тетраэдр, подобный данному с коэффициентом подобия $k = 5$. Тогда площадь поверхности увеличится в k^2 раз, т.е. в 25 раз.
Ответ: 25.

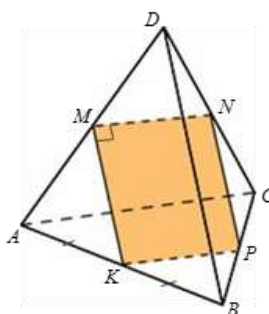
- №6 В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 100. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



В основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 100. В сечении, проходящем через середины ребер, будет квадрат со стороной 50, его площадь $S_{\text{сеч.}} = 50^2 = 2500$.

Ответ: 2500.

- №7. Ребра правильного тетраэдра равны 38. Найдите площадь сечения. Проходящего через середины четырех его ребер.

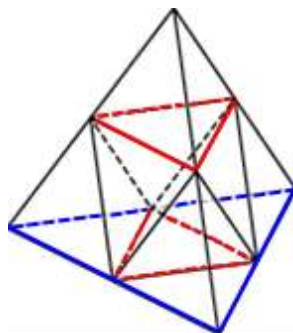


В правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра перпендикулярны $BD \perp AC$, тогда $KM \perp MN$, т.к. $KM \parallel BD$ и $MN \parallel AC$. В данном тетраэдре все ребра равны, поэтому все средние линии боковых граней тоже равны $KM = MN = \frac{38}{2} = 19$. Сечение $MNPK$ – квадрат.

$$S_{MNPK} = MK^2 = 19^2 = 361.$$

Ответ: 361.

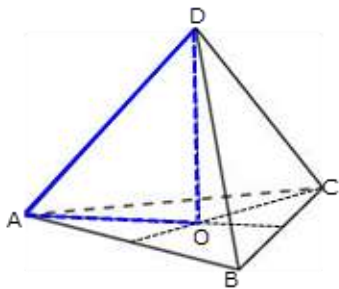
- №8. Площадь поверхности тетраэдра равна 46. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.



Каждой грани тетраэдра подобны две грани октаэдра с коэффициентом подобия $k^2 = 4$. Пусть S_1 – площадь выделенной грани тетраэдра (синий цвет), тогда площадь поверхности двух граней октаэдра (красный цвет) будет равна $\frac{S_1}{4} + \frac{S_1}{4} = \frac{S_1}{2}$. Аналогично для оставшихся трех граней тетраэдра. Тогда площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра, будет равна $\frac{46}{2} = 23$.

Ответ: 23.

- №9. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 7, а сторона основания равна $\sqrt{39}$. Найдите высоту пирамиды.



В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{39}$.

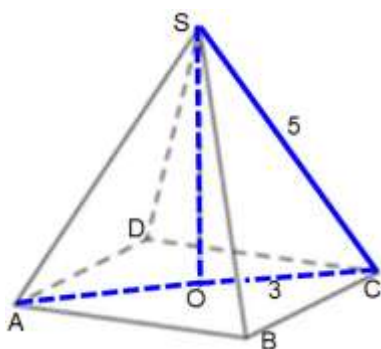
$$AO = R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{3}} = \sqrt{13}. \text{ В прямоугольном треугольнике } AOD$$

гипотенуза $AD = 7$, катет $AO = \sqrt{13}$, тогда

$$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{49 - 13} = 6.$$

Ответ: 6.

- №10. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 5, сторона основания равна $3\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.



В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат.

$$\text{Тогда } R_{ABCD} = OC = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 3.$$

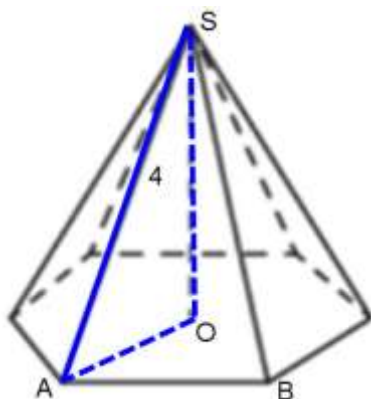
Высота правильной пирамиды проходит через центр ее основания - точку пересечения диагоналей квадрата.

В прямоугольном треугольнике SOC

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Ответ: 4.

- №11. В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 4, а сторона основания равна $\sqrt{7}$. Найдите высоту пирамиды.



Высота правильной пирамиды проходит через центр ее основания - точку пересечения диагоналей шестиугольника.

$$R = AO = AB = \sqrt{7}.$$

В прямоугольном треугольнике SOA

$$SO = \sqrt{AS^2 - OA^2} = \sqrt{4^2 - \sqrt{7}^2} = 3.$$

Ответ: 3.