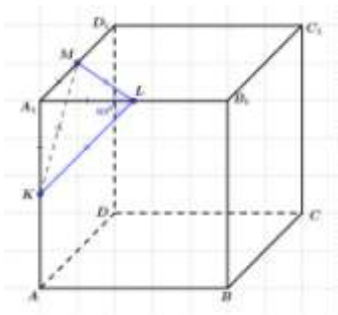


Элементы призмы. Сечения

■ Решение (примеры)

- №1. В кубе $A...D_1$ точка K – середина ребра AA_1 , точка L – середина ребра A_1B_1 , точка M – середина ребра A_1D_1 . Найдите угол MLK . Ответ дайте в градусах.

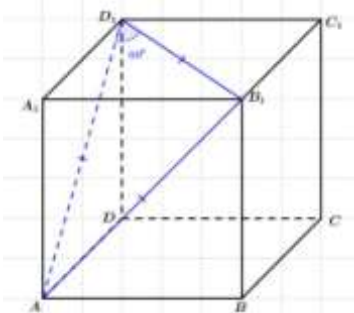


Решение:

$\triangle KA_1L = \triangle KA_1M = \triangle LA_1M$ по двум катетам, следовательно, $KL = ML = KM$ и $\triangle KLM$ – равносторонний, тогда $\angle MLK = 60^\circ$.

Ответ: 60.

- №2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и B_1D_1 . Ответ дайте в градусах.



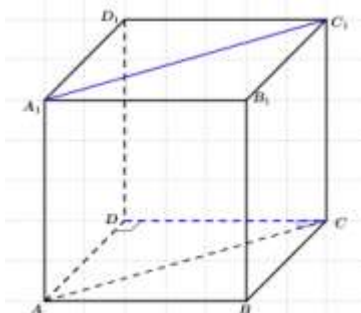
Решение:

В кубе все грани равны и поэтому $AB_1 = B_1D_1 = D_1A$ как диагонали квадратов.

$\triangle AB_1D_1$ – равносторонний, тогда $\angle AD_1B_1 = 60^\circ$.

Ответ: 60.

- №3. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известны длины рёбер $AB = 8$, $AD = 6$, $AA_1 = 21$. Найдите синус угла между прямыми CD и A_1C_1 .



Решение:

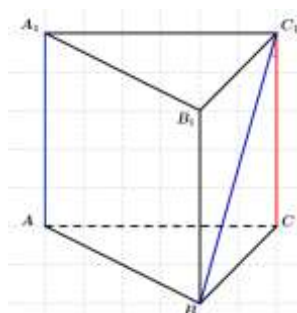
$A_1C_1 \parallel DC$, т.к. $AC \parallel A_1C_1$.

$\triangle ADC$ – прямоугольный, $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

$$\sin \angle ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

- №4. В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ все рёбра равны 3. Найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1 . Ответ дайте в градусах.



Решение:

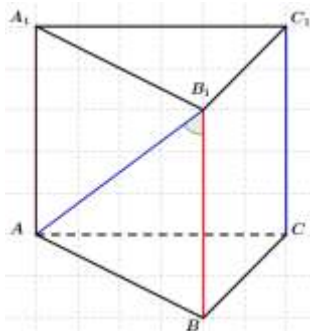
$AA_1 \parallel CC_1$, т.к. $AA_1 \parallel CC_1$.

$\triangle BCC_1$ – прямоугольный, $BC = CC_1$ по условию, значит,

$\angle BC_1C = 45^\circ$.

Ответ: 45.

- №5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = \sqrt{3}AA_1$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1 . Ответ дайте в градусах.



Решение:

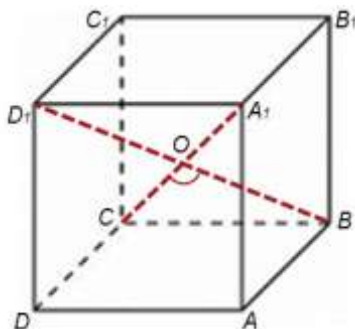
$AB_1 \perp CC_1 = AB_1 \perp BB_1 = \angle AB_1B$, т.к. $CC_1 \parallel BB_1$.

$\triangle ABB_1$ – прямоугольный, $AB = \sqrt{3}AA_1$ по условию, значит,

$$\operatorname{tg} \angle AB_1B = \frac{AB}{BB_1} = \sqrt{3}, \quad \angle AB_1B = 60^\circ.$$

Ответ: 60.

- №6. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AC_1 = 2BC$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1 . Ответ дайте в градусах.



Решение:

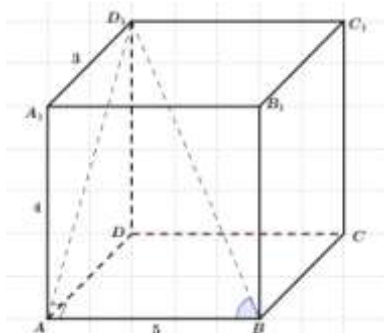
В правильной четырёхугольной призме все диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам.

$AC_1 = BD_1 = CA_1$ и $OB = OC$. По условию $BC = \frac{AC_1}{2}$, значит

$\triangle OBC$ – равносторонний и $\angle BOC = 60^\circ$.

Ответ: 60.

- №7. Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Ответ дайте в градусах.



Решение:

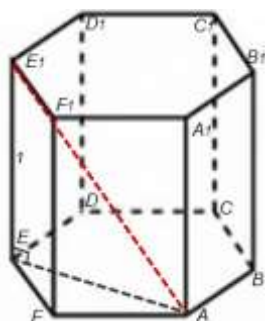
$\triangle AA_1D_1$ – прямоугольный и $AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

$\triangle ABD_1$ – прямоугольный, $AB \perp ADD_1$ и равнобедренный

$AB = AD_1 = 5$, тогда $\angle ABD_1 = 45^\circ$.

Ответ: 45.

- №8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками A и E_1 .



Решение:

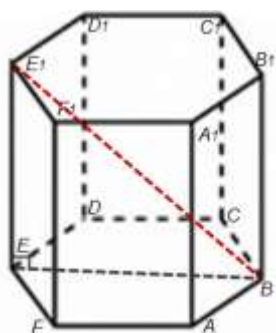
Меньшая диагональ правильного шестиугольника $d_m = a\sqrt{3}$.

$$AE = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\triangle AEE_1 \quad AE_1^2 = AE^2 + EE_1^2 = 3 + 1 = 4; \quad AE_1 = 2$$

Ответ: 2.

- №9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1 .



Решение:

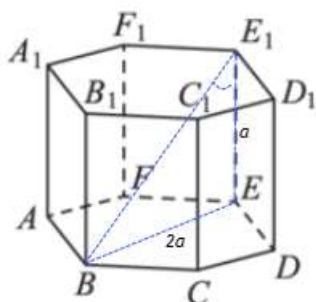
Большая диагональ правильного шестиугольника $d_6 = 2a$,

$$BE = 2\sqrt{5}$$

$$\triangle BEE_1 \quad BE_1^2 = BE^2 + EE_1^2 = (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 25; \quad BE_1 = 5$$

Ответ: 5.

- №10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 45. Найдите тангенс угла BE_1E .



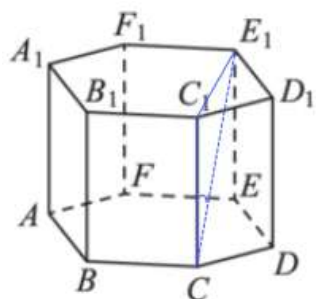
Решение:

Большая диагональ правильного шестиугольника $d_6 = BE = 2a$,

$$\operatorname{tg} \angle BE_1E = \frac{BE}{E_1E} = \frac{2a}{a} = 2$$

Ответ: 2.

- №11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 48. Найдите угол C_1CE_1 . Ответ дайте в градусах.



Решение:

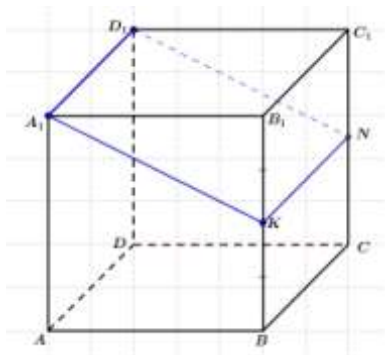
Меньшая диагональ правильного шестиугольника

$$d_3 = C_1E_1 = a\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} \angle C_1CE_1 = \frac{C_1E_1}{C_1C_1} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}, \quad \angle C_1CE_1 = 60^\circ$$

Ответ: 60.

- №12. В прямоугольном параллелепипеде $A \dots D_1$ ребро $AB = 2$, ребро $AD = \sqrt{5}$, ребро $AA_1 = 2$. Точка K – середина ребра BB_1 . Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1 , D_1 и K .



Решение:

Сечение пересекает параллельные грани параллелепипеда по параллельным прямым: $A_1K \parallel D_1N$.

Четырехугольник A_1KND_1 – прямоугольник, т.к. $A_1D_1 \perp ABB_1$.

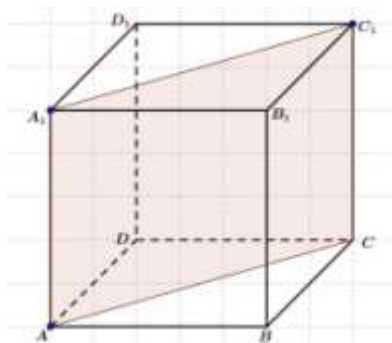
$$S_{A_1KND_1} = A_1D_1 \cdot A_1K. \quad KB_1 = \frac{BB_1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\text{В } \triangle A_1B_1K \quad A_1K = \sqrt{A_1B_1^2 + KB_1^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

$$S_{A_1KND_1} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5.$$

Ответ: 5.

- №13. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известны длины рёбер: $AB = 24$, $AD = 10$, $AA_1 = 22$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A , A_1 и C .



Решение:

Сечение пересекает параллельные грани параллелепипеда по параллельным прямым: $A_1C_1 \parallel AC$.

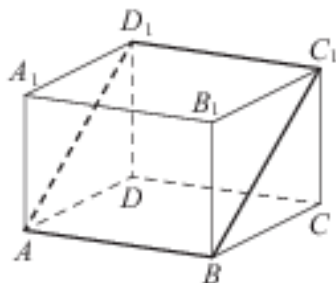
Четырёхугольник AA_1C_1C – прямоугольник, т.к. $AA_1 \perp ABC$.

$$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC. \quad \text{В } \triangle ABC$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{2^2 \cdot (12^2 + 5^2)} = 2 \cdot 13 = 26.$$

$$S_{AA_1C_1C} = 22 \cdot 26 = (20 + 2) \cdot 26 = 520 + 52 = 572. \quad \text{Ответ: 572.}$$

- №14. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известны длины рёбер: $AB = 15$, $AD = 12$, $AA_1 = 16$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .



Решение:

Четырёхугольник ABC_1D_1 – прямоугольник, т.к. $AB \perp BCC_1$.

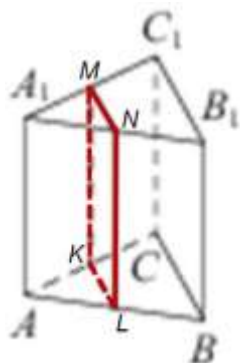
$$S_{ABC_1D_1} = AB \cdot BC_1.$$

В $\triangle BCC_1$

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{4^2 \cdot (3^2 + 4^2)} = 4 \cdot 5 = 20.$$

$$S_{ABC_1D_1} = 15 \cdot 20 = 300. \quad \text{Ответ: 300.}$$

- №15. В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ стороны оснований равны 2, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , $A_1 B_1$ и $A_1 C_1$.



В правильной треугольной призме в основании лежит правильный треугольник. M и N – середины рёбер $A_1 C_1$ и $A_1 B_1$, поэтому MN –

средняя линия треугольника $A_1 B_1 C_1$ и $MN = \frac{B_1 C_1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

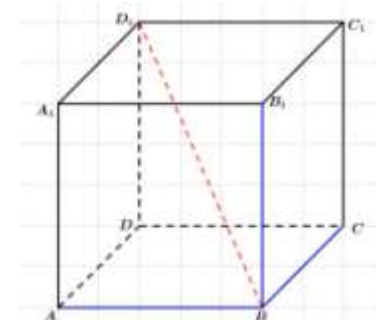
N и L – середины рёбер $A_1 B_1$ и AB , тогда $NL \parallel BB_1$ и $NL = BB_1 = 5$.

Призма правильная, значит, она прямая, поэтому $NL \perp ABC$ и сечение $MNLK$ – прямоугольник.

$$S_{MNLK} = MN \cdot NL = 1 \cdot 5 = 5.$$

Ответ: 5.

- №16. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известно, что $BD_1 = 27$, $CD = 3$, $A_1 D_1 = 24$. Найдите длину ребра CC_1 .



Решение:

В прямоугольном параллелепипеде: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

$$BD_1^2 = BB_1^2 + BC^2 + BA^2$$

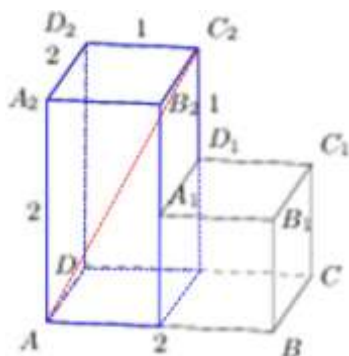
$$27^2 = BB_1^2 + 24^2 + 3^2$$

$$27^2 - 24^2 - 9 = BB_1^2, \quad (27 - 24)(27 + 24) - 9 = BB_1^2$$

$$BB_1^2 = 3 \cdot 51 - 9, \quad BB_1^2 = 144, \quad BB_1 = 12$$

Ответ: 12.

- №17. Найдите расстояние между вершинами A и C_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Решение:

Отрезок AC_2 является диагональю прямоугольного параллелепипеда с измерениями: $AD = 2$, $D_2C_2 = 1$ и $AA_2 = 2$.

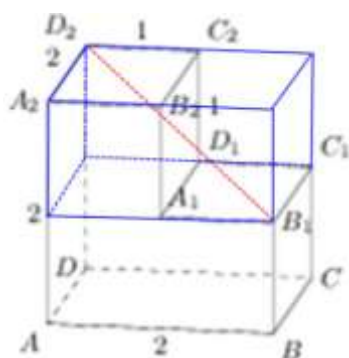
$$AC_2^2 = AD^2 + D_2C_2^2 + AA_2^2$$

$$AC_2^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2$$

$$AC_2 = 3$$

Ответ: 3.

- №18. Найдите расстояние между вершинами B_1 и D_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Решение:

Отрезок B_1D_2 является диагональю прямоугольного параллелепипеда с измерениями: $AB = 2$, $A_2D_2 = 2$, $D_1C_2 = 1$.

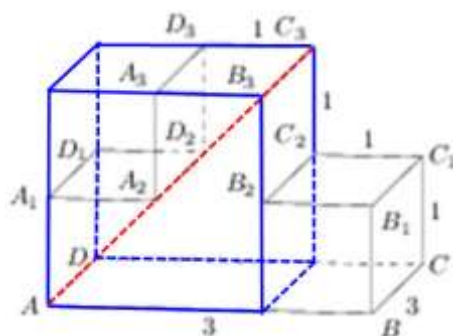
$$B_1D_2^2 = AB^2 + A_2D_2^2 + D_1C_2^2$$

$$B_1D_2^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$$

$$AC_2 = 3$$

Ответ: 3.

- №19. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_3 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Решение:

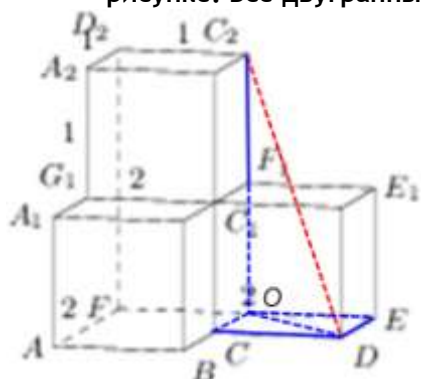
Отрезок AC_3 является диагональю прямоугольного параллелепипеда с измерениями: $AB - C_1C_2 = 3 - 1 = 2$,

$$CC_1 + C_2C_3 = 1 + 1 = 2, \quad BC = 3.$$

$$AC_3^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 = 17$$

Ответ: 17.

20. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Решение:

Продлим ребро F_1C_2 многогранника до пересечения с ребром FE :

$C_2O \perp FE$. Рассмотрим прямоугольный треугольник C_2OD и в нем $DC_2^2 = OD^2 + C_2O^2$.

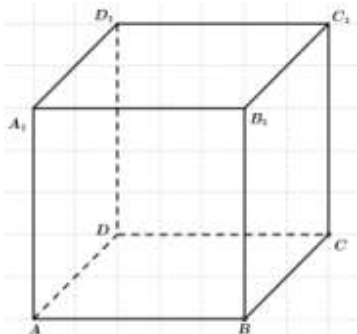
$C_2O = 2$, $OD = CD\sqrt{2} = \sqrt{2}$ как диагональ квадрата $CDEO$ со стороной $CD = 2 - 1 = 1$.

$$DC_2^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 6.$$

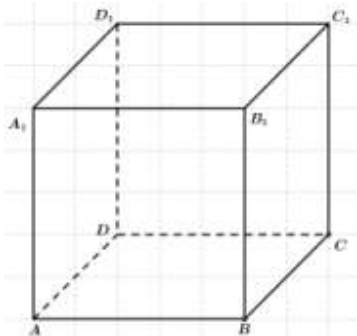
Ответ: 6.

Вариант 1

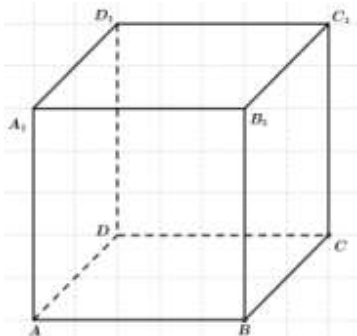
- №1. В кубе $A...D_1$ точка K – середина ребра AD , точка L – середина ребра CD , точка M – середина ребра DD_1 . Найдите угол MLK . Ответ дайте в градусах.



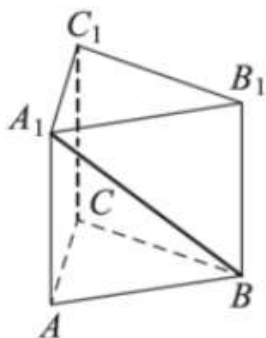
- №2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и BD . Ответ дайте в градусах.



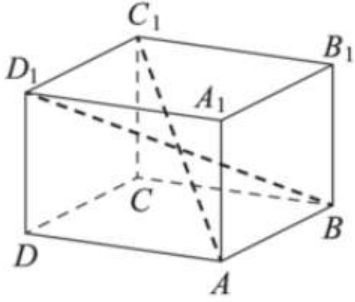
- №3. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известны длины рёбер $AB = 12$, $AD = 9$, $AA_1 = 28$. Найдите синус угла между прямыми AC и A_1D_1 .



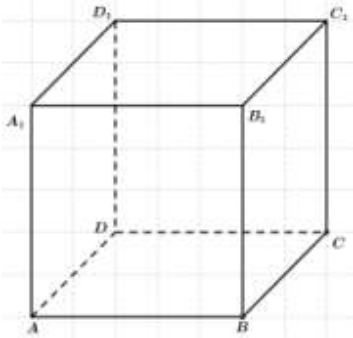
- №4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 4. Найдите угол между прямыми CC_1 и A_1B . Ответ дайте в градусах.



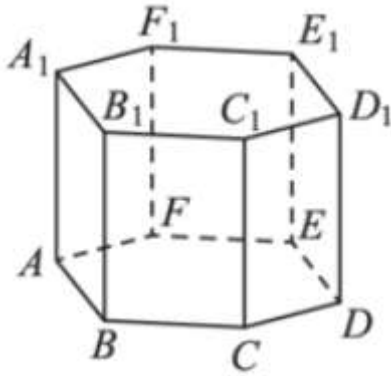
- №5. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AC_1 = 2A_1 D_1$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и AC_1 . Ответ дайте в градусах.



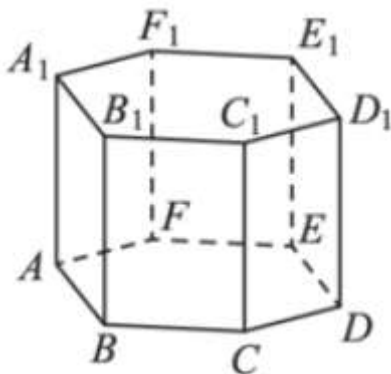
- №6. Найдите угол $AC_1 B_1$ прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 15$, $AD = 17$, $AA_1 = 8$. Ответ дайте в градусах.



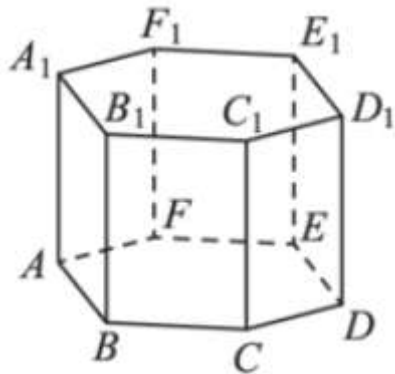
- №7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 41. Найдите расстояние между точками E_1 и C .



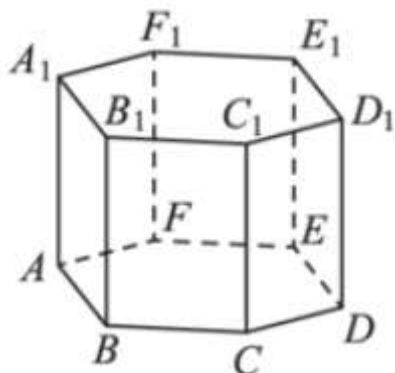
- №8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны $43\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками D и A_1 .



- №9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 18. Найдите тангенс угла $C_1 F F_1$.



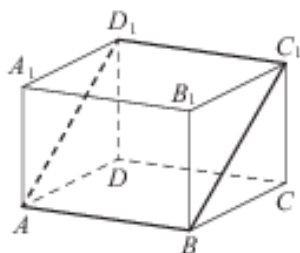
- №10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 5. Найдите угол $E_1 E C_1$. Ответ дайте в градусах.



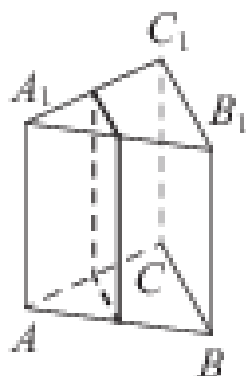
- №11. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ ребро $CD = 2$, ребро $BC = 2\sqrt{2}$, ребро $CC_1 = 4$. Точка K – середина ребра DD_1 . Найдите площадь сечения, проходящего через точки C_1 , B_1 и K .

- №12. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известны длины рёбер: $AB = 35$, $AD = 12$, $AA_1 = 43$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины B , B_1 и D .

- №13. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известны длины рёбер: $AB = 10$, $AD = 18$, $AA_1 = 24$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .

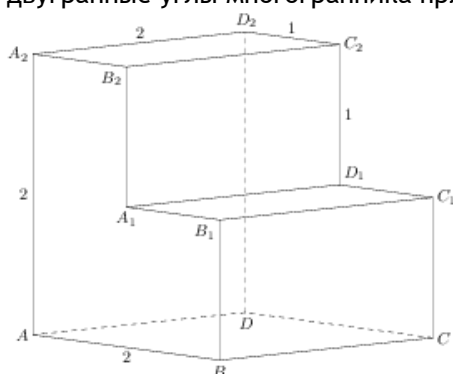


- №14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 8, боковые рёбра равны 20. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .

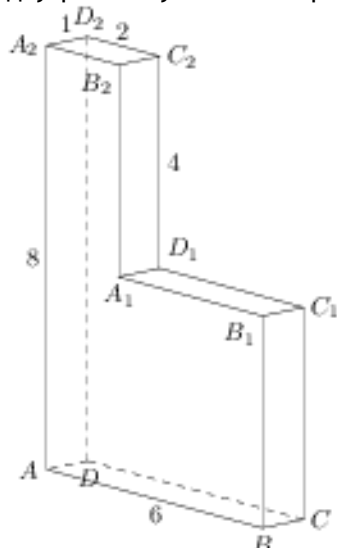


- №15. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известно, что $BD_1 = 23$, $A_1B_1 = 22$, $BC = 6$. Найдите длину ребра DD_1 .

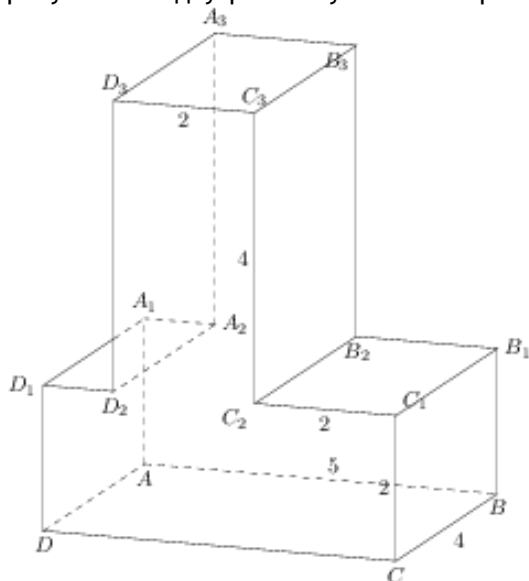
- №16. Найдите расстояние между вершинами D и B_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



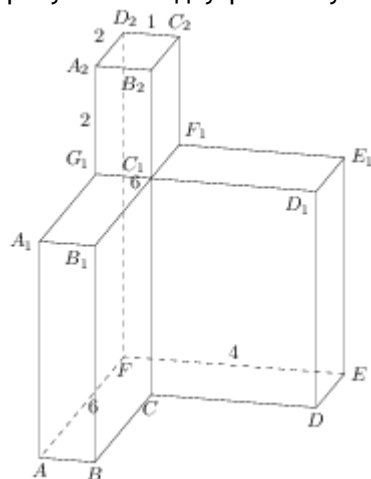
- №17. Найдите расстояние между вершинами C и B_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



- №18. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_3 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.

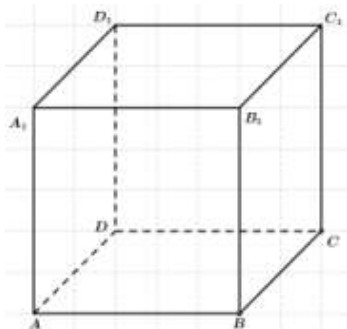


- №19. Найдите квадрат расстояния между вершинами B_1 и D_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.

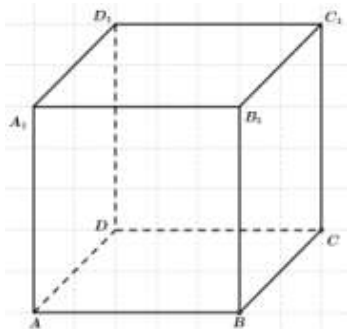


Вариант 2

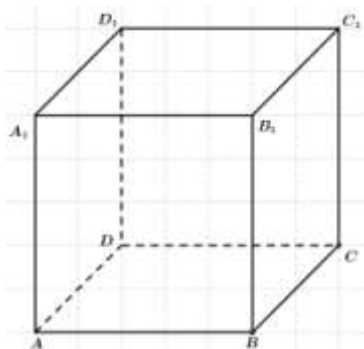
- №1. В кубе $A...D_1$ точка K – середина ребра CC_1 , точка L – середина ребра B_1C_1 , точка M – середина ребра C_1D_1 . Найдите угол MLK . Ответ дайте в градусах.



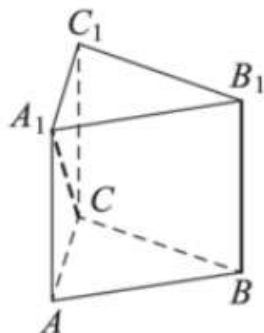
- №2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми CD_1 и AC . Ответ дайте в градусах.



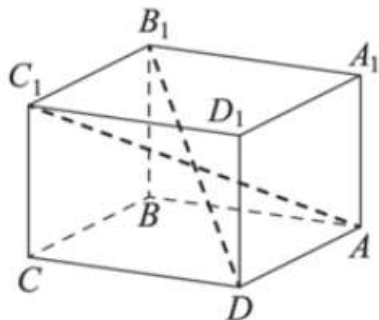
- №3. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известны длины рёбер $AB = 16$, $AD = 21$, $AA_1 = 12$. Найдите синус угла между прямыми AB и C_1D .



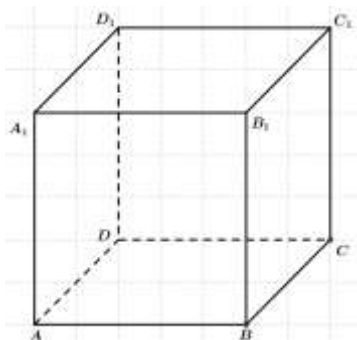
- №4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 4. Найдите угол между прямыми BB_1 и A_1C . Ответ дайте в градусах.



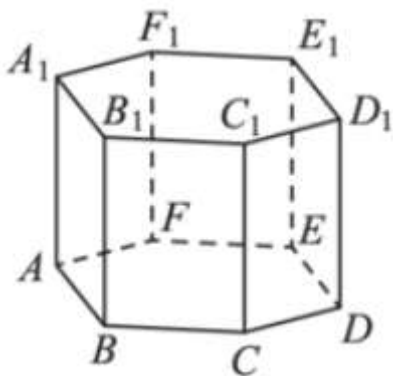
- №5. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BD_1 = 2AD$. Найдите угол между диагоналями $B_1 D$ и AC_1 . Ответ дайте в градусах.



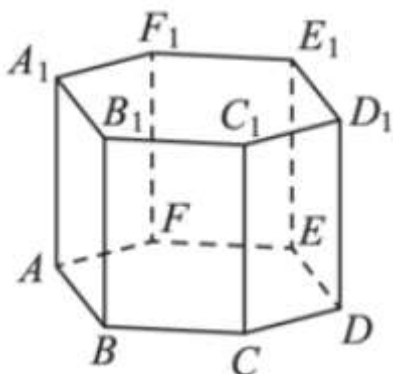
- №6. Найдите угол $AC_1 C$ прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 15$, $AD = 8$, $AA_1 = 17$. Ответ дайте в градусах.



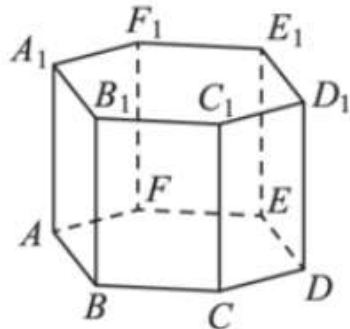
- №7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 29. Найдите расстояние между точками D и B_1 .



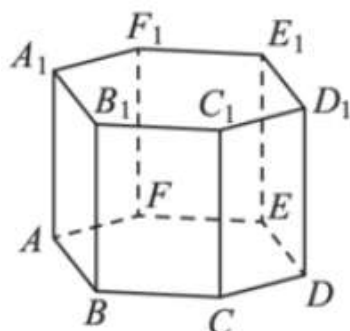
- №8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны $31\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B_1 и E .



- №9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 27. Найдите тангенс угла $A_1 D D_1$.



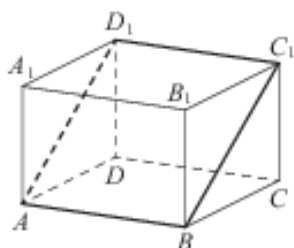
- №10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 23. Найдите угол $F_1 F D_1$. Ответ дайте в градусах.



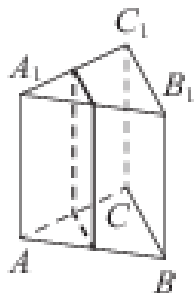
- №11. В прямоугольном параллелепипеде $A \dots D_1$ ребро $AB = 6$, ребро $AD = 2\sqrt{10}$, ребро $AA_1 = 4$. Точка K – середина ребра BB_1 . Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1 , D_1 и K .

- №12. В прямоугольном параллелепипеде $A \dots D_1$ известны длины рёбер: $AB = 36$, $AD = 15$, $AA_1 = 48$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины C , C_1 и A .

- №13. В прямоугольном параллелепипеде $A \dots D_1$ известны длины рёбер: $AB = 8$, $AD = 12$, $AA_1 = 9$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .

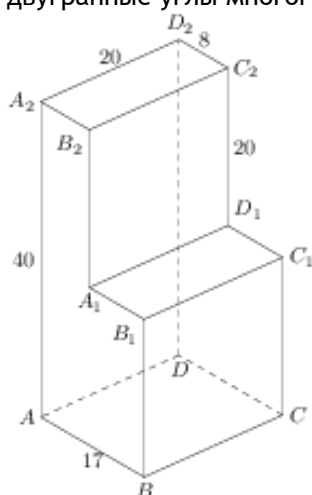


- №14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 14, боковые рёбра равны 3. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .

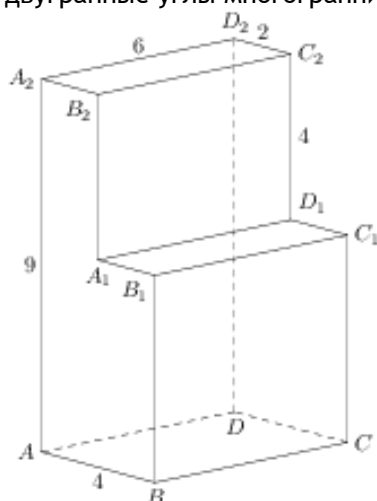


- №15. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известно, что $BD_1 = 3$, $CD = 2$, $AD = 2$. Найдите длину ребра AA_1 .

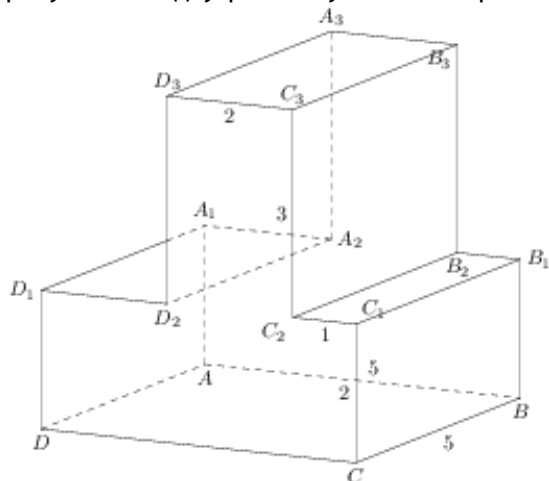
- №16. Найдите расстояние между вершинами D и B_1 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



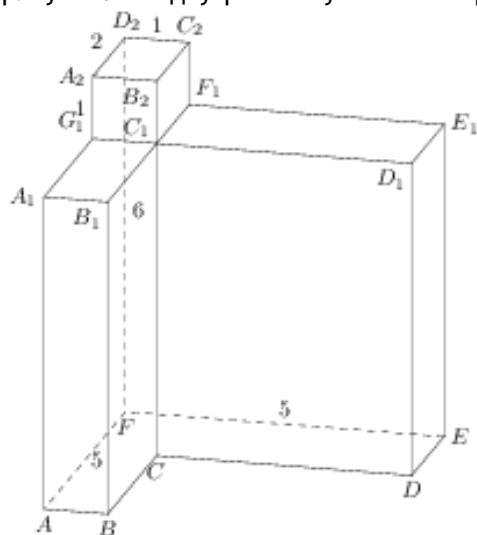
- №17. Найдите расстояние между вершинами B и C_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



- №18. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и B_3 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



- №19. Найдите квадрат расстояния между вершинами A_1 и C_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



▪ **Ответы (тест)** Элементы призмы. Сечения

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
Вар.1	60	60	0,8	45	60	45	82	1075	2	60	8	1591
Вар.2	60	60	0,6	45	60	45	58	155	2	60	40	1872
	№13	№14	№15	№16	№17	№18	№19					
Вар.1	300	80	3	3	9	61	53					
Вар.2	120	21	1	33	11	66	27					