Показательная функция

1. Исследование показательной функции без производной

2. Исследование функций, содержащих показательную функцию, с помощью производной

1. Исследование показательной функции без производной

- ***Примеры***

№1. Найдите точку минимума функции $y=7^{x^2+2x+3}$.

№2. Найдите точку максимума функции $y=9^{-31+14x-x^2}$.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y=2^{-116-22x-x^2}$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y=6^{x^2+16x+66}$.

▪ *Решение (примеры)*

№1. **Найдите точку минимума функции** $y=7^{x^2+2x+3}$.

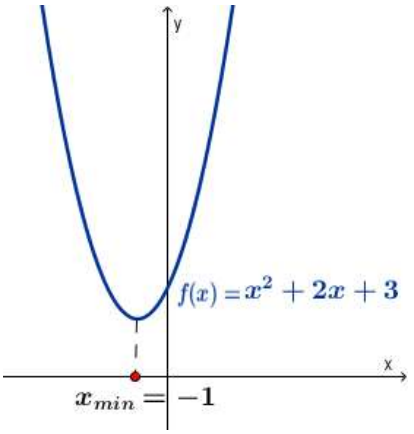
Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y=7^{f(x)}$ имеет сложный аргумент $f(x)=x^2+2x+3$.

Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает минимума в вершине

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2}=-1.$$

Из определения возрастающей функции: меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Точка минимума аргумента является точкой минимума и для самой функции.



$$x_{\min}=-1\to f_{\min}(-1)\to y_{\min}=7^{f_{\min}(-1)}$$

Ответ: -1.

№2. **Найдите точку максимума функции** $y=9^{-31+14x-x^2}$.

Решение:

Показательная функция с основанием больше и 1 $y=9^{f(x)}$ - возрастающая и, поэтому большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Показательная функция имеет сложный аргумент - квадратичную функцию $f(x)=-31+14x-x^2$. Графиком функции $f(x)$ является парабола с ветвями, направленными вниз. Единственный экстремум - это максимум, который достигается в вершине: $x_в=x_{\max}=-\frac{b}{2a}=-\frac{14}{2\cdot(-1)}=7$. Точка максимума аргумента является точкой максимума и для самой показательной функции.

Ответ: 7.

№3. **Найдите наибольшее значение функции** $y=2^{-116-22x-x^2}$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y=2^{f(x)}$ имеет сложный аргумент $f(x)=-116-22x-x^2$.

Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вниз, достигает максимума в вершине

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{-22}{-2}=-11.$$

Из определения возрастающей функции: большему значению аргумента соответствует большее значение функции. В точке максимума аргумент принимает наибольшее значение, и заданная функция принимает наибольшее значение в этой же точке.

$$x_{\max}=-11\to f_{\max}(-11)=-116-22\cdot(-11)-(-11)^2=-116-11\cdot(-22+11)=5$$

$$y_{\max}=2^{f_{\max}(-11)}=2^5=32$$

Ответ: 32.

№4. **Найдите наименьшее значение функции** $y=6^{x^2+16x+66}$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y=6^{f(x)}$ имеет сложный аргумент $f(x)=x^2+16x+66$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает минимума в вершине

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{16}{2}=-8.$$

Из определения возрастающей функции: меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. В точке минимума аргумент принимает наименьшее значение, и заданная функция принимает наименьшее значение в этой же точке.

$$x_{\min}=-8\to f_{\min}(-8)=(-8)^2+16\cdot(-8)+66=64-128+66=2$$

$$y_{\min}=6^{f_{\min}(-8)}=6^2=36$$

Ответ: 36.

▪ *Тест* 1. Исследование показательной функций без производной

№1. Найдите точку минимума функции $y=9^{x^2+26x+193}$.

№2. Найдите точку максимума функции $y=8^{-30+12x-x^2}$.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y=3^{-139-24x-x^2}$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y=5^{x^2+30x+229}$.

▪ *Ответы (тест)* 1. Исследование показательной функций без производной

№1	№2	№3	№4
-13	*6*	*243*	*625*

2. Исследование функций, содержащих показательную функцию, с помощью производной

- ***Примеры***

№1. Найдите точку максимума функции $y=(9-x)e^{x+9}$.

№2. Найдите точку минимума функции $y=(3-x)e^{3-x}$.

№3. Найдите точку максимума функции $y=\left(x^2-10x+10\right)e^{5-x}$.

№4. Найдите наибольшее значение функции $y=(8-x)e^{x-7}$ на отрезке $[3;10]$.

№5. Найдите наименьшее значение функции $y=\left(3x^2-36x+36\right)e^{x-10}$ на отрезке $[8;11]$.

№6. Найдите наименьшее значение функции $y=(x-23)^2e^{x-23}$ на отрезке $[21,5;27]$.

№7. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+10)^2e^{-8-x}$ на отрезке $[-9;-7]$.

№8. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x}-2e^x+9$ на отрезке $[-1;1]$.

▪ *Решение (примеры)*

№1. **Найдите точку максимума функции** $y=(9-x)e^{x+9}$.

Решение:

1) $D(y)=\mathbb{R}$

$y'=(9-x)'\cdot e^{x+9}+(9-x)\cdot(e^{x+9})'$

$y'=-e^{x+9}+(9-x)\cdot e^{x+9}\cdot(x+9)'$

$y'=-e^{x+9}+(9-x)\cdot e^{x+9}$

$y'=e^{x+9}\cdot(-1+9-x)$

$y'=e^{x+9}\cdot(-x+8)$

$y'=-e^{x+9}\cdot(x-8)$

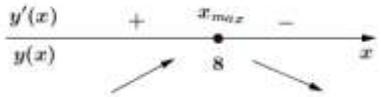
2) $y'=0$

$-e^{x+9}\cdot(x-8)=0$

$e^{x+9}=0 \qquad x-8=0$

$\varnothing \qquad x=8$

3)



$x_{\max}=8$

Ответ: 8.

№2. **Найдите точку минимума функции** $y=(3-x)e^{3-x}$.

Решение:

1) $D(y)=\mathbb{R}$

$y'=(3-x)'\cdot e^{3-x}+(3-x)\cdot(e^{3-x})'$

$y'=-e^{3-x}+(3-x)\cdot e^{3-x}\cdot(3-x)'$

$y'=-e^{3-x}-(3-x)\cdot e^{3-x}$

$y'=e^{3-x}\cdot(-1-3+x)$

$y'=e^{3-x}\cdot(x-4)$

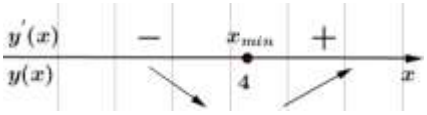
2) $y'=0$

$e^{3-x}\cdot(x-4)=0$

$e^{3-x}=0 \quad x-4=0$

$\varnothing \qquad x=4$

3)



$x_{\min}=4$

Ответ: 4.

№3. **Найдите точку максимума функции** $y=\left(x^2-10x+10\right)e^{5-x}$.

Решение:

1) $D(y)=\mathbb{R}$

$y'=\left(x^2-10x+10\right)'\cdot e^{5-x}+\left(x^2-10x+10\right)\cdot\left(e^{5-x}\right)'$

$y'=(2x-10)e^{5-x}+\left(x^2-10x+10\right)\cdot e^{5-x}\cdot(5-x)'$

$y'=(2x-10)e^{5-x}-\left(x^2-10x+10\right)\cdot e^{5-x}$

$y'=e^{5-x}\cdot\left(2x-10-x^2+10x-10\right)$

$y'=e^{5-x}\cdot\left(-x^2+12x-20\right)$

$y'=-e^{5-x}\cdot\left(x^2-12x+20\right)$

$y'=-e^{5-x}\cdot(x-10)(x-2)$

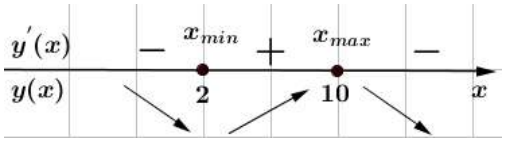
2) $y'=0$

$-e^{5-x}\cdot(x-10)(x-2)=0$

$e^{5-x}=0 \quad x-10=0 \quad x-2=0$

$\varnothing \qquad x=10 \qquad x=2$

3)



$x_{\max}=10$

Ответ: 10.

№4. **Найдите наибольшее значение функции** $y=(8-x)e^{x-7}$ **на отрезке** $[3;10]$.

Решение:

1) $D(y)=\mathbb{R}$

$y'=(8-x)'\cdot e^{x-7}+(8-x)\cdot(e^{x-7})'$

$y'=-e^{x-7}+(8-x)\cdot e^{x-7}\cdot(x-7)'$

$y'=-e^{x-7}+(8-x)\cdot e^{x-7}$

$y'=e^{x-7}\cdot(-1+8-x)$

$y'=e^{x-7}\cdot(-x+7)$

$y'=-e^{x-7}\cdot(x-7)$

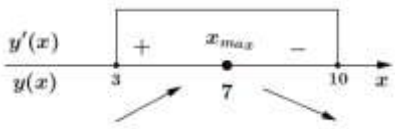
2) $y'=0$

$-e^{x-7}\cdot(x-7)=0$

$e^{x-7}=0 \qquad x-7=0$

$\varnothing \qquad x=7$

3)



$y_{наиб}=y(x_{\max})=(8-7)\cdot e^{7-7}=1$

Ответ: 1.

№5. **Найдите наименьшее значение функции** $y=(3x^2-36x+36)e^{x-10}$ **на отрезке** $[8;11]$.

Решение:

1) $D(y)=\mathbb{R}$

$y'=(3x^2-36x+36)'\cdot e^{x-10}+(3x^2-36x+36)\cdot(e^{x-10})'$

$y'=(6x-36)e^{x-10}+(3x^2-36x+36)\cdot e^{x-10}$

$y'=e^{x-10}\cdot(6x-36+3x^2-36x+36)$

$y'=e^{x-10}\cdot(3x^2-30x)$

$y'=3x(x-10)e^{x-10}$

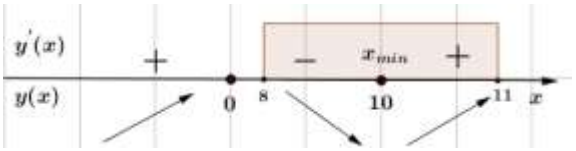
2) $y'=0$

$3x(x-10)e^{x-10}=0$

$x=0 \quad x-10=0 \quad e^{x-10}=0$

$x=10 \qquad \varnothing$

3)



$y_{наим}=y_{\min}=y(10)=$

$=(3\cdot 10^2-36\cdot 10+36)\cdot e^{10-10}=-24$

Ответ: -24.

№6. **Найдите наименьшее значение функции** $y=(x-23)^2e^{x-23}$ **на отрезке** $[21,5;27]$.

Решение:

1) $D(y)=\mathbb{R}$

$y'=((x-23)^2)'\cdot e^{x-23}+(x-23)^2\cdot(e^{x-23})'$

$y'=2(x-23)\cdot(x-23)'\cdot e^{x-23}+(x-23)^2\cdot e^{x-23}\cdot(x-23)'$

$y'=2(x-23)e^{x-23}+(x-23)^2\cdot e^{x-23}$

$y'=e^{x-23}\cdot(x-23)(2+x-23)$

$y'=e^{x-23}\cdot(x-23)(x-21)$

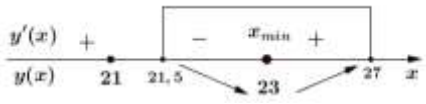
2) $y'=0$

$e^{x-23}\cdot(x-23)(x-21)=0$

$e^{x-23}=0 \quad x-23=0 \quad x-21=0$

$\varnothing \qquad x=23 \qquad x=21$

3)



$y_{наим}=y(x_{\min})=y(23)=$

$=(23-23)^2e^{23-23}=0$

Ответ: 0.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№7. **Найдите наибольшее значение функции** $y=(x+10)^2 e^{-8-x}$ **на отрезке** $[-9;-7]$.

Решение:

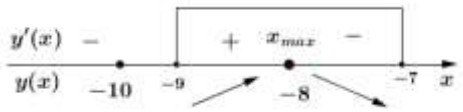
1) $D(y)=\mathbb{R}$

$$y'=\left((x+10)^2\right)'\cdot e^{-8-x}+(x+10)^2\cdot\left(e^{-8-x}\right)'$$
$$y'=2(x+10)\cdot(x+10)'\cdot e^{-8-x}+(x+10)^2\cdot e^{-8-x}\cdot(-8-x)'$$
$$y'=2(x+10)e^{-8-x}-(x+10)^2\cdot e^{-8-x}$$
$$y'=e^{-8-x}\cdot(x+10)(2-x-10)$$
$$y'=e^{-8-x}\cdot(x+10)(-x-8)$$
$$y'=-e^{-8-x}\cdot(x+10)(x+8)$$

2) $y'=0$

$$-e^{-8-x}\cdot(x+10)(x+8)=0$$
$$e^{-8-x}=0 \quad x+10=0 \quad x+8=0$$
$$\varnothing \qquad x=-10 \qquad x=-8$$

3)



$$y_{наиб}=y(x_{\max})=y(-8)=$$
$$=(-8+10)^2 e^{-8-(-8)}=4$$

Ответ: 4.

№8. **Найдите наименьшее значение функции** $e^{2x}-2e^x+9$ **на отрезке** $[-1;1]$.

Решение:

I способ.

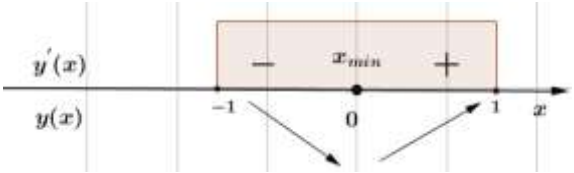
1) $D(y)=\mathbb{R}$

$$y'=\left(e^{2x}\right)'-\left(2e^x\right)'$$
$$y'=e^{2x}\cdot(2x)'-2e^x$$
$$y'=2e^{2x}-2e^x$$
$$y'=2e^x\left(e^x-1\right)$$

2) $y'=0$, $2e^x\left(e^x-1\right)=0$

$$e^x=0 \quad e^x-1=0$$
$$\varnothing \qquad x=0$$

3)



$$y_{наим}=y_{\min}=y(0)=e^0-2e^0+9=1-2+9=8$$

II способ.

Пусть $e^x=t$ и т.к. $-1\le x\le 1$, то $e^{-1}\le t\le e^1$, $t\in\left[\frac{1}{e};e\right]$.

Исходная функция примет вид квадратичной функции $y=t^2-2t+9$, которая имеет единственный экстремум в вершине, а именно: $t_{\min}=-\frac{-2}{2}=1$ и $1\in\left[\frac{1}{e};e\right]$. Тогда на заданном отрезке функция принимает наименьшее значение в точке минимума $y_{\min}=y(1)=1^2-2\cdot 1+9=8$.

Ответ: 8.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

Тест 2. Исследование функций, содержащих показательную функцию, с помощью производной

№1. Найдите точку максимума функции $y=\left(x+18\right)e^{18-x}$.

№2. Найдите точку максимума функции $y=\left(x-7\right)^2 e^{x-8}$.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y=\left(x+6\right)^2 e^{-x-4}$ на отрезке $\left[-6;-1\right]$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x}-14e^{x}-1$ на отрезке $\left[1;2\right]$.

№5. Найдите точку минимума функции $y=\left(3x^2-27x+27\right)\cdot e^{x-9}$.

№6. Найдите наибольшее значение функции $y=\left(x^2-47x+47\right)e^{47-x}$ на отрезке $\left[43;52\right]$.

Ответы (тест) 2. Исследование функций, содержащих показательную функцию, с помощью производной

№1	№2	№3	№4	№5	№6
-17	*5*	*4*	*-50*	*7*	*47*

▪ *Решение (тест)* 2. Исследование функций, содержащих показательную функцию, с помощью производной

№1. **Найдите точку максимума функции** $y=(x+18)e^{18-x}$.

Решение:

1) $D(y)=\mathbb{R}$

$y'=(x+18)'\cdot e^{18-x}+(x+18)\cdot(e^{18-x})'$

$y'=e^{18-x}+(x+18)\cdot e^{18-x}\cdot(18-x)'$

$y'=e^{18-x}-(x+18)\cdot e^{18-x}$

$y'=e^{18-x}\cdot(1-x-18)$

$y'=-e^{18-x}\cdot(x+17)$

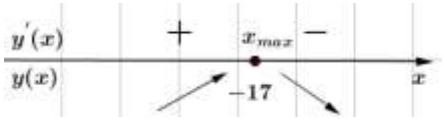
2) $y'=0$

$-e^{18-x}\cdot(x+17)=0$

$e^{18-x}=0 \quad x+17=0$

$\varnothing \qquad x=-17$

3)



$x_{\max}=-17$

Ответ: -17.

№2. **Найдите точку максимума функции** $y=(x-7)^2e^{x-8}$.

Решение:

1) $D(y)=\mathbb{R}$

$y'=\left((x-7)^2\right)'\cdot e^{x-8}+(x-7)^2\cdot(e^{x-8})'$

$y'=2(x-7)e^{x-8}+(x-7)^2\cdot e^{x-8}$

$y'=e^{x-8}\cdot(x-7)\cdot(2+x-7)$

$y'=e^{x-8}\cdot(x-7)\cdot(x-5)$

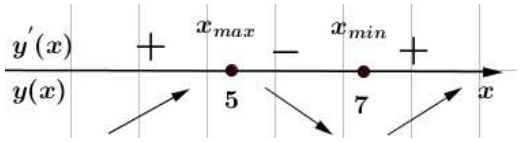
2) $y'=0$

$e^{x-8}\cdot(x-7)(x-5)=0$

$e^{x-8}=0 \quad x-7=0 \quad x-5=0$

$\varnothing \qquad x=7 \qquad x=5$

3)



$x_{\max}=5$

Ответ: 5.

№3. **Найдите наибольшее значение функции** $y=(x+6)^2e^{-x-4}$ **на отрезке** $[-6;-1]$.

Решение:

1) $D(y)=\mathbb{R}$

$y'=\left((x+6)^2\right)'\cdot e^{-x-4}+(x+6)^2\cdot(e^{-x-4})'$

$y'=2(x+6)e^{-x-4}+(x+6)^2\cdot e^{-x-4}\cdot(-x-4)'$

$y'=2(x+6)e^{-x-4}-(x+6)^2\cdot e^{-x-4}$

$y'=e^{-x-4}\cdot(x+6)\cdot(2-x-6)$

$y'=-e^{-x-4}\cdot(x+6)\cdot(x+4)$

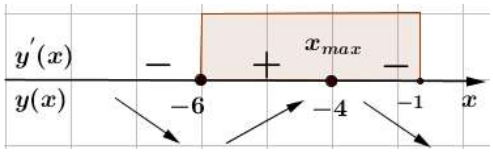
2) $y'=0$

$-e^{-x-4}\cdot(x+6)(x+4)=0$

$e^{-x-4}=0 \quad x+6=0 \quad x+4=0$

$\varnothing \qquad x=-6 \qquad x=-4$

3)



$y_{наиб}=y_{\max}=y(-4)=(-4+6)^2e^{-(-4)-4}=4$

Ответ: 4.

№4. **Найдите наименьшее значение функции $e^{2x}-14e^{x}-1$ на отрезке $[1;2]$.**

Решение:

Пусть $e^{x}=t$ и т.к. $-1\le x\le 1$, то $e^{1}\le t\le e^{2}$, $t\in\left[e;e^{2}\right]$.

Исходная функция примет вид квадратичной функции $y=t^{2}-14t-1$, которая имеет единственный экстремум в вершине, а именно: $t_{\min}=-\dfrac{-14}{2}=7$ и $7\in\left[e;e^{2}\right]$. Тогда на заданном отрезке функция принимает наименьшее значение в точке минимума $y_{\min}=y(7)=7^{2}-14\cdot 7-1=-50$.

Ответ: -50.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

✓ *Производная*

1. *Формулы дифференцирования:*

$$(Const)' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(kx+m)' = k$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x>0)$$

2. *Правила дифференцирования*:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(k \cdot f)' = k \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$\left(f(kx+m)\right)' = k \cdot f'(kx+m)$$

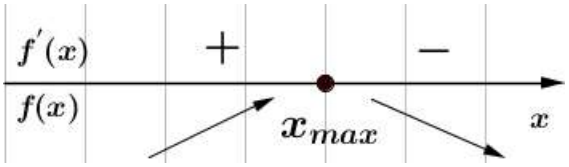
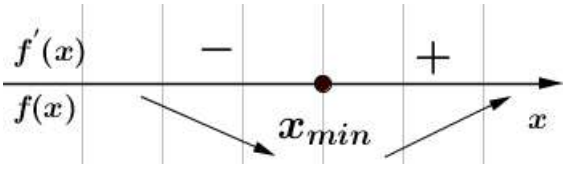
3. Если $f'(x) > 0$ при всех $x \in D(f)$, то $f(x)\nearrow$ возрастает;

Если $f'(x) < 0$ при всех $x \in D(f)$, то $f(x)\searrow$ убывает.

4. *Необходимые и достаточные условия существования экстремумов:*

1) Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует;

2) Если в окрестности точки $x = x_0$ производная меняет свой знак с «+» на «-», то это точка максимума;



если в окрестности точки $x = x_0$ производная меняет свой знак с «-» на «+», то это точка минимума;