

- ЕГЭ Профиль / *Задание №6*
- Алгебра 7 / *Линейные уравнения*
- Алгебра 8 / *Квадратные уравнения*

1. Линейные уравнения

2. Уравнения, сводящиеся к линейным

3. Квадратные уравнения

4. Квадратные уравнения (продолжение)

5. Дробно-рациональные уравнения

Содержание сборника:

1. Линейные уравнения	
▪ Примеры.....	2
▪ Решение (примеры).....	2
▪ Тест.....	2
▪ Ответы и решение (тест).....	3
2. Уравнения, сводящиеся к линейным	
▪ Примеры.....	4
▪ Решение (примеры).....	4
▪ Тест.....	5
▪ Ответы и решение (тест).....	6
3. Квадратные уравнения	
▪ Примеры.....	8
▪ Решение (примеры).....	8
▪ Тест.....	9
▪ Ответы и решение (тест).....	10
4. Квадратные уравнения (продолжение)	
▪ Примеры.....	12
▪ Решение (примеры).....	12
▪ Тест.....	13
▪ Ответы и решение (тест).....	14
5. Дробно-рациональные уравнения	
▪ Примеры.....	15
▪ Решение (примеры).....	16
▪ Тест.....	18
▪ Ответы и решение (тест).....	19
Справочный материал.....	22

1. Линейные уравнения

▪ **Примеры** Решите уравнения:

№1.

$$\frac{5}{7}x = 4\frac{2}{7}$$

№2.

$$\frac{8}{9}x = 18\frac{2}{3}$$

№3.

$$-\frac{5}{8}x = -3\frac{3}{4}$$

№4.

$$\frac{3}{4}x = -19\frac{1}{2}$$

▪ **Решение (примеры)** 1. Линейные уравнения

№1.

$$\begin{aligned} \frac{5}{7}x &= 4\frac{2}{7} \\ \frac{5}{7}x &= \frac{30}{7} \quad | \cdot \frac{7}{5} \\ \underline{x} &= 6 \end{aligned}$$

№2.

$$\begin{aligned} \frac{8}{9}x &= 18\frac{2}{3} \\ \frac{8}{9}x &= \frac{56}{3} \quad | \cdot \frac{9}{8} \\ x &= 7 \cdot 3 \\ \underline{x} &= 21 \end{aligned}$$

№3.

$$\begin{aligned} -\frac{5}{8}x &= -3\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{8}x &= -\frac{15}{4} \quad | \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) \\ x &= 3 \cdot 2 \\ \underline{x} &= 6 \end{aligned}$$

№4.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x &= -19\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}x &= -\frac{39}{2} \quad | \cdot \frac{4}{3} \\ x &= -13 \cdot 2 \\ \underline{x} &= -26 \end{aligned}$$

▪ **Тест** 1. Линейные уравнения

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $\frac{5}{9}x = 14\frac{4}{9}$

№2. $-\frac{4}{7}x = -6\frac{6}{7}$

№3. $-\frac{7}{8}x = -12\frac{1}{4}$

№4. $-\frac{8}{9}x = 21\frac{1}{3}$

▪ **Тест** 1. Линейные уравнения

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $\frac{7}{8}x = 21\frac{7}{8}$

№2. $-\frac{3}{5}x = -8\frac{2}{5}$

№3. $\frac{5}{6}x = 17\frac{1}{2}$

№4. $-\frac{5}{6}x = 18\frac{1}{3}$

▪ **Ответы (тест)** 1. Линейные уравнения

	№1	№2	№3	№4
Вар.1	26	12	14	-24
Вар.2	25	14	21	-22

▪ **Решение (тест)** 1. Линейные уравнения

Вариант 1

№1.

$$\frac{5}{9}x = 14\frac{4}{9}$$

$$\frac{5}{9}x = \frac{130}{9} \quad \left| \cdot \frac{9}{5} \right.$$

$$\underline{x = 26}$$

№2.

$$-\frac{4}{7}x = -6\frac{6}{7}$$

$$-\frac{4}{7}x = -\frac{48}{7} \quad \left| \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) \right.$$

$$\underline{x = 12}$$

№3.

$$-\frac{7}{8}x = -12\frac{1}{4}$$

$$-\frac{7}{8}x = -\frac{49}{4} \quad \left| \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) \right.$$

$$x = 7 \cdot 2$$

$$\underline{x = 14}$$

№4.

$$-\frac{8}{9}x = 21\frac{1}{3}$$

$$-\frac{8}{9}x = \frac{64}{3} \quad \left| \cdot \left(-\frac{9}{8}\right) \right.$$

$$x = -8 \cdot 3$$

$$\underline{x = -24}$$

Вариант 2

№1.

$$\frac{7}{8}x = 21\frac{7}{8}$$

$$\frac{7}{8}x = \frac{21 \cdot 8 + 7}{8} \quad \left| \cdot \frac{8}{7} \right.$$

$$x = \frac{7(3 \cdot 8 + 1)}{7}$$

$$\underline{x = 25}$$

№2.

$$-\frac{3}{5}x = -8\frac{2}{5}$$

$$-\frac{3}{5}x = -\frac{42}{5} \quad \left| \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \right.$$

$$\underline{x = 14}$$

№3.

$$\frac{5}{6}x = 17\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{6}x = \frac{35}{2} \quad \left| \cdot \frac{6}{5} \right.$$

$$x = \frac{35 \cdot 6}{2 \cdot 5}$$

$$x = 7 \cdot 3$$

$$\underline{x = 21}$$

№4.

$$-\frac{5}{6}x = 18\frac{1}{3}$$

$$-\frac{5}{6}x = \frac{55}{3} \quad \left| \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) \right.$$

$$x = -\frac{55 \cdot 6}{3 \cdot 5}$$

$$x = -11 \cdot 2$$

$$\underline{x = -22}$$

2. Уравнения, сводящиеся к линейным

▪ **Примеры** Решите уравнения:

№1.

$$(x-4)^2 = (x+1)^2$$

№2.

$$(6x+11)^2 = (6x+13)^2$$

№3.

$$x^2 - 13 = (x-13)^2$$

№4.

$$(x+8)^5 = 243$$

▪ **Решение (примеры)** 2. Уравнения, сводящиеся к линейным

№1.

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &= (x+1)^2 \\ (x-4)^2 - (x+1)^2 &= 0 \\ (x-4-(x+1))(x-4+x+1) &= 0 \\ (x-4-x-1)(2x-3) &= 0 \\ -5 \cdot (2x-3) &= 0 \\ 2x-3 &= 0 \\ 2x &= 3 \\ \underline{x} &= \underline{1,5} \end{aligned}$$

Ответ: 1,5

№2.

$$\begin{aligned} (6x+11)^2 &= (6x+13)^2 \\ (6x+11)^2 - (6x+13)^2 &= 0 \\ (6x+11-(6x+13))(6x+11+6x+13) &= 0 \\ (6x+11-6x-13)(12x+24) &= 0 \\ -2 \cdot (12x+24) &= 0 \\ 12x+24 &= 0 \\ 12x &= -24 \\ \underline{x} &= \underline{-2} \end{aligned}$$

Ответ: -2

№3.

$$\begin{aligned} x^2 - 13 &= (x-13)^2 \\ x^2 - 13 &= x^2 - 26x + 13^2 \\ 26x &= 13 + 13^2 \\ 2 \cdot 13x &= 13(1+13) \\ 2x &= 14 \\ \underline{x} &= \underline{7} \end{aligned}$$

Ответ: 7

№4.

$$\begin{aligned} (x+8)^5 &= 243 \\ (x+8)^5 &= 3^5 \\ x+8 &= 3 \\ x &= -8+3 \\ \underline{x} &= \underline{-5} \end{aligned}$$

Ответ: -5

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $(x-10)^2 = (x+4)^2$

№2. $(2x-11)^2 = (2x-9)^2$

№3. $(6x-7)^2 = (6x+1)^2$

№4. $(x-9)^2 = x^2 - 9$

№5. $x^2 + 11 = (x-1)^2$

№6. $(x+9)^3 = 125$

№7. $(x-8)^9 = 1$

№8. $(x-5)^5 = 32$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $(x-1)^2 = (x+6)^2$

№2. $(5x-3)^2 = (5x+13)^2$

№3. $(5x-6)^2 = (5x-4)^2$

№4. $x^2 + 1 = (x+1)^2$

№5. $x^2 - 8 = (x+4)^2$

№6. $(x-3)^3 = 343$

№7. $(x-2)^9 = 1$

№8. $(x+5)^9 = 512$

▪ **Ответы (тест)** 2. Уравнения, сводящиеся к линейным

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
Вар.1	3	5	0,5	5	-5	-4	9	7
Вар.2	-2,5	-1	1	0	-3	10	3	-3

▪ **Решение (тест)** 2. Уравнения, сводящиеся к линейным

Вариант 1

№1.

$$\begin{aligned}(x-10)^2 &= (x+4)^2 \\ (x-10)^2 - (x+4)^2 &= 0 \\ (x-10-x-4)(x-10+x+4) &= 0 \\ -14 \cdot (2x-6) &= 0 \\ 2x-6 &= 0 \\ 2x &= 6 \\ \underline{x=3}\end{aligned}$$

№2.

$$\begin{aligned}(2x-11)^2 &= (2x-9)^2 \\ (2x-11)^2 - (2x-9)^2 &= 0 \\ (2x-11-2x+9)(2x-11+2x-9) &= 0 \\ -2 \cdot (4x-20) &= 0 \\ 4x-20 &= 0 \\ 4x &= 20 \\ \underline{x=5}\end{aligned}$$

№3.

$$\begin{aligned}(6x-7)^2 &= (6x+1)^2 \\ (6x-7)^2 - (6x+1)^2 &= 0 \\ (6x-7-6x-1)(6x-7+6x+1) &= 0 \\ -8 \cdot (12x-6) &= 0 \\ 12x-6 &= 0 \\ 12x &= 6 \\ \underline{x=0,5}\end{aligned}$$

№4.

$$\begin{aligned}(x-9)^2 &= x^2 - 9 \\ x^2 - 18x + 81 &= x^2 - 9 \\ -18x &= -90 \\ \underline{x=5}\end{aligned}$$

№5.

$$\begin{aligned}x^2 + 11 &= (x-1)^2 \\ x^2 + 11 &= x^2 - 2x + 1 \\ 2x &= -10 \\ \underline{x=-5}\end{aligned}$$

№6.

$$\begin{aligned}(x+9)^3 &= 125 \\ (x+9)^3 &= 5^3 \\ x+9 &= 5 \\ \underline{x=-4}\end{aligned}$$

№7.

$$\begin{aligned}(x-8)^9 &= 1 \\ (x-8)^9 &= 1^9 \\ x-8 &= 1 \\ \underline{x=9}\end{aligned}$$

№8.

$$\begin{aligned}(x-5)^5 &= 32 \\ (x-5)^5 &= 2^5 \\ x-5 &= 2 \\ \underline{x=7}\end{aligned}$$

Вариант 2

№1.

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= (x+6)^2 \\ (x-1)^2 - (x+6)^2 &= 0 \\ (x-1-x-6)(x-1+x+6) &= 0 \\ -7 \cdot (2x+5) &= 0 \\ 2x+5 &= 0 \\ 2x &= -5 \\ \underline{x = -2,5}\end{aligned}$$

№2.

$$\begin{aligned}(5x-3)^2 &= (5x+13)^2 \\ (5x-3)^2 - (5x+13)^2 &= 0 \\ (5x-3-5x-13)(5x-3+5x+13) &= 0 \\ -16 \cdot (10x+10) &= 0 \\ 10x+10 &= 0 \\ 10x &= -10 \\ \underline{x = -1}\end{aligned}$$

№3.

$$\begin{aligned}(5x-6)^2 &= (5x-4)^2 \\ \begin{cases} 5x-6 = 5x-4 \\ 5x-6 = -5x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \cdot x = 2 \\ 10x = 10 \end{cases} \\ \underline{x = 1}\end{aligned}$$

№4.

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= (x+1)^2 \\ x^2 + 1 &= x^2 + 2x + 1 \\ 0 &= 2x \\ \underline{x = 0}\end{aligned}$$

№5.

$$\begin{aligned}x^2 - 8 &= (x+4)^2 \\ x^2 - 8 &= x^2 + 8x + 16 \\ -8 - 16 &= 8x \\ 8x &= -24 \\ \underline{x = -3}\end{aligned}$$

№6.

$$\begin{aligned}(x-3)^3 &= 343 \\ (x-3)^3 &= 7^3 \\ x-3 &= 7 \\ \underline{x = 10}\end{aligned}$$

№7.

$$\begin{aligned}(x-2)^9 &= 1 \\ (x-2)^9 &= 1^9 \\ x-2 &= 1 \\ \underline{x = 3}\end{aligned}$$

№8.

$$\begin{aligned}(x+5)^9 &= 512 \\ (x+5)^9 &= 2^9 \\ x+5 &= 2 \\ x &= -5+2 \\ \underline{x = -3}\end{aligned}$$

3. Квадратные уравнения

Примеры

Решите уравнения:

№1. Найдите корень уравнения $2x^2 - 33x + 136 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то укажите меньший из них.

№2. Найдите корень уравнения $4x^2 + 36x + 65 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то укажите меньший из них.

№3. Найдите корень уравнения $x^2 - 15x + 56 = 0$.
Если уравнение имеет более одного корня, то укажите больший из них.

№4. Найдите корень уравнения $x^2 - 100 = 0$.
Если уравнение имеет более одного корня, то укажите больший из них.

Решение (примеры)

3. Квадратные уравнения

№1.

$$2x^2 - 33x + 136 = 0$$

$$a = 2, b = -33, c = 136$$

$$D = 33^2 - 4 \cdot 2 \cdot 136 = 1089 - 1088 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{33 \pm 1}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{34}{4} = 8,5 \\ \frac{32}{4} = 8 \text{ (меньший)} \end{cases}$$

$$\underline{x = 8}$$

Ответ: 8

№2.

$$4x^2 + 36x + 65 = 0$$

$$a = 4, b = 36 \text{ (четный коэффициент)}, c = 65$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{36}{2}\right)^2 - 4 \cdot 65 = 18^2 - 260 = 64 = 8^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{36}{2} \pm 8}{4} = \frac{-18 \pm 8}{4} = \begin{cases} -2,5 \\ -6,5 \text{ (меньший)} \end{cases}$$

$$\underline{x = -6,5}$$

Ответ: -6,5

№3.

$$x^2 - 15x + 56 = 0.$$

$$a = 1, D = 225 - 4 \cdot 56 = 1 > 0$$

$$x_1 + x_2 = 15 = 7 + 8$$

$$x_1 \cdot x_2 = 56 = 7 \cdot 8$$

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = 8 \text{ (больший)}$$

$$\underline{x = 8}$$

Ответ: 8

№4.

$$x^2 - 100 = 0$$

$$(x - 10)(x + 10) = 0$$

$$x - 10 = 0 \text{ или } x + 10 = 0$$

$$\underline{x = 10} \quad x = -10$$

(больший)

Ответ: 10

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $2x^2 - 31x + 117 = 0$

№2. $4x^2 - 20x - 75 = 0$

№3. $x^2 - 11x + 30 = 0$

№4. $x^2 - 7x + 6 = 0$

№5. $x^2 + 10x + 16 = 0$

№6. $x^2 - x - 6 = 0$

№7. $x^2 - 36 = 0$

№8. $x^2 - 1 = 0$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $2x^2 - 31x + 119 = 0$

№2. $4x^2 - 20x + 21 = 0$

№3. $x^2 - 2x - 35 = 0$

№4. $x^2 + 11x + 24 = 0$

№5. $x^2 - 7x - 30 = 0$

№6. $x^2 - x - 2 = 0$

№7. $x^2 - 25 = 0$

№8. $x^2 - 4 = 0$

▪ **Ответы (тест)** 3. Квадратные уравнения

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
Вар.1	9 и 6,5	7,5 и -2,5	5 и 6	1 и 6	-2 и -8	3 и -2	6 и -6	1 и -1
Вар.2	8,5 и 7	3,5 и 1,5	7 и -5	-8 и -3	10 и -3	2 и -1	5 и -5	2 и -2

▪ **Решение (тест)** 3. Квадратные уравнения

Вариант 1

№1.

$$2x^2 - 31x + 117 = 0$$

$$D = 31^2 - 4 \cdot 2 \cdot 117 = 961 - 936 = 25$$

$$x = \frac{31 \pm 5}{4} = \begin{cases} 9 \\ 6,5 \end{cases}$$

$$\underline{x_1 = 9} \quad \underline{x_2 = 6,5}$$

№2.

$$4x^2 - 20x - 75 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 10^2 - 4 \cdot (-75) = 100 + 300 = 400$$

$$x = \frac{10 \pm 20}{4} = \begin{cases} 7,5 \\ -2,5 \end{cases}$$

$$\underline{x_1 = 7,5} \quad \underline{x_2 = -2,5}$$

№3.

$$x^2 - 11x + 30 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 11 = 5 + 6$$

$$x_1 \cdot x_2 = 30 = 5 \cdot 6$$

$$\underline{x_1 = 5} \quad \underline{x_2 = 6}$$

№4.

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 7 = 1 + 6$$

$$x_1 \cdot x_2 = 6 = 1 \cdot 6$$

$$\underline{x_1 = 1} \quad \underline{x_2 = 6}$$

№5.

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -10$$

$$x_1 \cdot x_2 = 16$$

$$\underline{x_1 = -2} \quad \underline{x_2 = -8}$$

№6.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 1 = -2 + 3$$

$$x_1 \cdot x_2 = -6 = -2 \cdot 3$$

$$\underline{x_1 = -2} \quad \underline{x_2 = 3}$$

№7.

$$x^2 - 36 = 0$$

$$(x - 6)(x + 6) = 0$$

$$\underline{x_1 = 6} \quad \underline{x_2 = -6}$$

№8.

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\underline{x = \pm 1}$$

Вариант 2

№1.

$$2x^2 - 31x + 119 = 0$$

$$D = 31^2 - 4 \cdot 2 \cdot 119 = 961 - 952 = 9$$

$$x = \frac{31 \pm 3}{4} = \begin{cases} 7 \\ 8,5 \end{cases}$$

$$\underline{x_1 = 7} \quad \underline{x_2 = 8,5}$$

№3.

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2 = -5 + 7$$

$$x_1 \cdot x_2 = -35 = -5 \cdot 7$$

$$\underline{x_1 = -5} \quad \underline{x_2 = 7}$$

№5.

$$x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 7 = -3 + 10$$

$$x_1 \cdot x_2 = -30 = -3 \cdot 10$$

$$\underline{x_1 = -3} \quad \underline{x_2 = 10}$$

№7.

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

$$\underline{x_1 = 5} \quad \underline{x_2 = -5}$$

№2.

$$4x^2 - 20x + 21 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 10^2 - 4 \cdot 21 = 100 - 84 = 16$$

$$x = \frac{10 \pm 4}{4} = \begin{cases} 3,5 \\ 1,5 \end{cases}$$

$$\underline{x_1 = 3,5} \quad \underline{x_2 = 1,5}$$

№4.

$$x^2 + 11x + 24 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -11 = -8 + (-3)$$

$$x_1 \cdot x_2 = 24 = -8 \cdot (-3)$$

$$\underline{x_1 = -8} \quad \underline{x_2 = -3}$$

№6.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 1 = -1 + 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = -2 = -1 \cdot 2$$

$$x_1 = -1 \quad \underline{x_2 = 2}$$

№8.

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\underline{x = \pm 2}$$

4. Квадратные уравнения (продолжение)

Примеры Решите уравнения:

№1. Найдите корень уравнения $x^2 + 14x + 49 = 0$
Если уравнение имеет более одного корня, то укажите больший из них.

№2. Найдите корень уравнения $x^2 + 9x = 0$.
Если уравнение имеет более одного корня, то укажите меньший из них.

№3. Найдите корень уравнения $\frac{2}{15}x^2 = 2\frac{7}{10}$
Если уравнение имеет более одного корня, то укажите больший из них.

№4. Найдите корень уравнения $(x - 13)^2 = -52x$.
Если уравнение имеет более одного корня, то укажите меньший из них.

Решение (примеры) 4. Квадратные уравнения (продолжение)

№1.

$$\begin{aligned}x^2 + 14x + 49 &= 0 \\x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 &= 0 \\(x + 7)^2 &= 0 \\x + 7 &= 0 \\x &= \underline{-7}\end{aligned}$$

Ответ: -7

№2.

$$\begin{aligned}x^2 + 9x &= 0 \\x(x + 9) &= 0 \\x = 0 \text{ или } x + 9 &= 0 \\x &= -9 \text{ (меньший)} \\x &= \underline{-9}\end{aligned}$$

Ответ: -9

№3.

$$\begin{aligned}\frac{2}{15}x^2 &= 2\frac{7}{10} \\ \frac{2}{15}x^2 &= \frac{27}{10} \quad \left| \cdot \frac{15}{2} \right. \\ x^2 &= \frac{27 \cdot 3}{2 \cdot 2} \\ x^2 &= \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ x &= \pm 4,5\end{aligned}$$

Большой корень: $x = \underline{4,5}$

Ответ: 4,5

№4.

$$\begin{aligned}(x - 13)^2 &= -52x \\x^2 - 26x + 169 + 52x &= 0 \\x^2 + 26x + 169 &= 0 \\x^2 + 2 \cdot 13x + 13^2 &= 0 \\(x + 13)^2 &= 0 \\x + 13 &= 0 \\x &= \underline{-13}\end{aligned}$$

Ответ: -13

▪ Тест

4. Квадратные уравнения (продолжение)

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $x^2 + 4x = 0$

№2. $x^2 + 16x + 64 = 0$

№3. $\frac{5}{14}x^2 = 4\frac{3}{8}$

№4. $(x-7)^2 = -28x$

№5. $(x+8)^2 = 32x$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $x^2 - 8x = 0$

№2. $x^2 + 18x + 81 = 0$

№3. $\frac{2}{5}x^2 = 12\frac{1}{10}$

№4. $(x-10)^2 = -40x$

№5. $(x+7)^2 = 28x$

▪ **Ответы (тест)** 4. Квадратные уравнения (продолжение)

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	0 и -4	-8	3,5 и -3,5	-7	8
Вар.2	0 и 8	-9	5,5 и -5,5	-10	7

▪ **Решение (тест)** 4. Квадратные уравнения (продолжение)

Вариант 1

№1.

$$\begin{aligned}x^2 + 4x &= 0 \\x(x+4) &= 0 \\x=0 \quad x+4 &= 0 \\x &= \underline{-4}\end{aligned}$$

№2.

$$\begin{aligned}x^2 + 16x + 64 &= 0 \\(x+8)^2 &= 0 \\x+8 &= 0 \\x &= \underline{-8}\end{aligned}$$

№3.

$$\begin{aligned}\frac{5}{14}x^2 &= 4\frac{3}{8} \\ \frac{5}{14}x^2 &= \frac{35}{8} \quad \left| \cdot \frac{14}{5} \right. \\ x^2 &= \left(\frac{7}{2}\right)^2, \quad x = \underline{\pm 3,5}\end{aligned}$$

№4.

$$\begin{aligned}(x-7)^2 &= -28x \\x^2 - 14x + 49 &= -28x \\x^2 - 14x + 28x + 49 &= 0 \\x^2 + 14x + 49 &= 0 \\(x+7)^2 &= 0 \\x+7 &= 0 \\x &= \underline{-7}\end{aligned}$$

№5.

$$\begin{aligned}(x+8)^2 &= 32x \\x^2 + 16x + 64 - 32x &= 0 \\x^2 - 16x + 64 &= 0 \\(x-8)^2 &= 0 \\x-8 &= 0 \\x &= \underline{8}\end{aligned}$$

Вариант 2

№1.

$$\begin{aligned}x^2 - 8x &= 0 \\x(x-8) &= 0 \\x=0 \quad x-8 &= 0 \\x &= \underline{8}\end{aligned}$$

№2.

$$\begin{aligned}x^2 + 18x + 81 &= 0 \\(x+9)^2 &= 0 \\x+9 &= 0 \\x &= \underline{-9}\end{aligned}$$

№3.

$$\begin{aligned}\frac{2}{5}x^2 &= 12\frac{1}{10} \\ \frac{2}{5}x^2 &= \frac{121}{10} \quad \left| \cdot \frac{5}{2} \right. \\ x^2 &= \left(\frac{11}{2}\right)^2 \\ x &= \underline{\pm 5,5}\end{aligned}$$

№4.

$$\begin{aligned}(x-10)^2 &= -40x \\x^2 - 20x + 100 &= -40x \\x^2 - 20x + 40x + 100 &= 0 \\x^2 + 20x + 100 &= 0 \\(x+10)^2 &= 0, \quad x+10=0 \\x &= \underline{-10}\end{aligned}$$

№5.

$$\begin{aligned}(x+7)^2 &= 28x \\x^2 + 14x + 49 - 28x &= 0 \\x^2 - 14x + 49 &= 0 \\(x-7)^2 &= 0 \\x-7 &= 0 \\x &= \underline{7}\end{aligned}$$

5. Дробно-рациональные уравнения

▪ **Примеры** Решите уравнения:

№1. Найдите корень уравнения $\frac{x-46}{x+2} = -2$.

№2. Найдите корень уравнения $x = \frac{-7x-8}{x-16}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

№3. Найдите корень уравнения $\frac{9}{x^2-16} = 1$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

№4. Найдите корень уравнения $\frac{7x}{2x^2-15} = 1$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

№5. Найдите корень уравнения $\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

№6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$.

№7. Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x-5} = 4$.

№8. Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$.

№1.

$$\frac{x-46}{x+2} = -2$$

ОДЗ: $x \neq -2$

$$x - 46 = -2(x + 2)$$

$$x - 46 = -2x - 4$$

$$3x = 42$$

$$x = 14 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 14

№2.

$$x = \frac{-7x-8}{x-16}$$

ОДЗ: $x \neq 16$

$$x(x-16) = -7x-8$$

$$x^2 - 16x + 7x + 8 = 0$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 9 = 1 + 8$$

$$x_1 \cdot x_2 = 8 = 1 \cdot 8$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 8$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

 $x = 1$ меньший корень**Ответ: 1**

№3.

$$\frac{9}{x^2-16} = 1.$$

$$\frac{9}{x^2-16} = 1 \quad | \cdot (x^2-16)$$

$$9 = x^2 - 16$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x-5)(x+5) = 0$$

$$x = 5 \text{ или } x = -5$$

Проверка:

$$x = 5, \quad \frac{9}{5^2-16} = 1, \quad \frac{9}{9} = 1 \text{ верно}$$

$$x = -5, \quad \frac{9}{(-5)^2-16} = 1, \quad \frac{9}{9} = 1 \text{ верно}$$

Меньший корень: -5 **Ответ: -5**

№4.

$$\frac{7x}{2x^2-15} = 1$$

$$\frac{7x}{2x^2-15} = 1 \quad | \cdot (2x^2-15)$$

$$7x = 2x^2 - 15$$

$$2x^2 - 7x - 15 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \begin{cases} 5 \\ -1,5 \end{cases}$$

Проверка:

$$x = 5; \quad 2x^2 - 15 = 2 \cdot 5^2 - 15 \neq 0$$

$$x = -1,5; \quad 2x^2 - 15 = 2 \cdot (-1,5)^2 - 15 \neq 0$$

Большой корень: 5 **Ответ: 5**

№5.

$$\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7}$$

$$\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7} \quad | \cdot (7x-2)(6x-7)$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{2}{7}, \quad x \neq \frac{7}{6}$$

$$(x-8)(6x-7) = (x-8)(7x-2)$$

$$(x-8)(6x-7) - (x-8)(7x-2) = 0$$

$$(x-8)(6x-7-(7x-2)) = 0$$

$$x-8=0 \quad \text{или} \quad 6x-7-7x+2=0$$

$$x=8 \quad \quad \quad -x-5=0$$

$$x=-5$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Больший корень: 8

Ответ: 8

№6.

$$\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ОДЗ: } 9x-7 \neq 0$$

$$x \neq \frac{7}{9}$$

$$9x-7=2$$

$$9x=9$$

$$x=1$$

Ответ: 1

№7.

$$\frac{1}{7x-5} = 4.$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{7x-5} = \frac{4}{1}$$

$$4(7x-5) = 1$$

$$28x-20 = 1$$

$$28x = 21$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$x = 0,75$$

Ответ: 0,75

№8.

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$$

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$$

$$3x-4 = 4x-11$$

$$11-4 = 4x-3x$$

$$x = 7$$

Проверка:

$$\frac{1}{3 \cdot 7 - 4} = \frac{1}{4 \cdot 7 - 11}$$

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{17}, \quad \text{верно}$$

Ответ: 7

Вариант 1

Решите уравнения:

№1.
$$\frac{x-105}{x+3} = -5$$

№2.
$$x = \frac{-4x-18}{x-13}$$

№3.
$$\frac{5}{x^2-20} = 1$$

№4.
$$\frac{14x}{x^2+13} = 1$$

№5.
$$\frac{x+8}{6x-5} = \frac{x+8}{4x-11}$$

№6.
$$\frac{1}{10x+7} = \frac{1}{12}$$

№7.
$$\frac{1}{10x-4} = 10$$

№8.
$$\frac{1}{7x+13} = \frac{1}{4x-5}$$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1.
$$\frac{x+71}{x+1} = -4$$

№2.
$$x = \frac{-3x+48}{x-1}$$

№3.
$$\frac{8}{x^2+4} = 1$$

№4.
$$\frac{6x}{x^2-16} = 1$$

№5.
$$\frac{x-5}{6x+5} = \frac{x-5}{5x-8}$$

№6.
$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{11}$$

№7.
$$\frac{1}{10x-4} = 10$$

№8.
$$\frac{1}{4x-3} = \frac{1}{9x-11}$$

▪ **Ответы (тест)** 5. Дробно-рациональные уравнения

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
Вар.1	15	3 и 6	± 5	1 и 13	-8 и -3	0,5	0,41	-6
Вар.2	-15	-8 и 6	± 2	-2 и 8	-13 и 5	5	-1,45	1,6

▪ **Решение (тест)** 5. Дробно-рациональные уравнения

Вариант 1

№1.

$$\frac{x-105}{x+3} = -5$$

$$x-105 = -5(x+3), x \neq -3$$

$$x-105 = -5x-15$$

$$x+5x = 105-15$$

$$6x = 90 \quad \underline{x = 15} \in \text{ОДЗ}$$

№3.

$$\frac{5}{x^2-20} = 1$$

$$5 = x^2 - 20$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

Проверка:
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 5, \frac{5}{5^2-20} = 1, 1 = 1 \\ x = -5, \frac{5}{(-5)^2-20} = 1, 1 = 1 \end{array} \right.$$

№5.

$$\frac{x+8}{6x-5} = \frac{x+8}{4x-11}$$

$$(x+8)(4x-11) = (x+8)(6x-5)$$

$$(x+8)(4x-11-(6x-5)) = 0$$

$$x+8 = 0 \quad \text{или} \quad 4x-11-6x+5 = 0$$

$$x = -8 \in \text{ОДЗ} \quad \text{или} \quad -2x-6 = 0$$

$$x = -3 \in \text{ОДЗ}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6x-5 \neq 0 \\ 4x-11 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{5}{6} \\ x \neq \frac{11}{4} \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{-8; -3\}$$

№2.

$$x = \frac{-4x-18}{x-13}$$

$$x(x-13) = -4x-18, x \neq 13$$

$$x^2 - 13x + 4x + 18 = 0$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$\underline{x_1 = 3} \quad \underline{x_2 = 6} \in \text{ОДЗ}$$

№4.

$$\frac{14x}{x^2+13} = 1$$

$$14x = x^2 + 13, x^2 + 13 \neq 0 \text{ при } \forall x$$

$$x^2 - 14x + 13 = 0$$

$$\underline{x_1 = 1} \quad \underline{x_2 = 13}$$

№6.

$$\frac{1}{10x+7} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{10x+7} = \frac{1}{12}; 10x+7 \neq 0, x \neq -0,7$$

$$10x+7 = 12$$

$$10x = 5$$

$$\underline{x = 0,5} \in \text{ОДЗ}$$

№7.

$$\frac{1}{10x-4} = 10$$

$$\frac{1}{10x-4} = \frac{10}{1}; 10x-4 \neq 0, x \neq 0,4$$

$$10(10x-4) = 1$$

$$100x - 40 = 1$$

$$100x = 41$$

$$\underline{x = 0,41} \in \text{ОДЗ}$$

№8.

$$\frac{1}{7x+13} = \frac{1}{4x-5}$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq -\frac{13}{7}, x \neq \frac{5}{4}$$

$$7x+13 = 4x-5$$

$$3x = -18$$

$$\underline{x = -6} \in \text{ОДЗ}$$

Вариант 2

№1.

$$\frac{x+71}{x+1} = -4$$

$$x+71 = -4(x+1), x \neq -1$$

$$x+71 = -4x-4$$

$$x+4x = -71-4$$

$$5x = -75 \quad \underline{x = -15} \in \text{ОДЗ}$$

№2.

$$x = \frac{-3x+48}{x-1}$$

$$x(x-1) = -3x+48, x \neq 1$$

$$x^2 - x + 3x - 48 = 0$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\underline{x_1 = 6} \quad \underline{x_2 = -8} \in \text{ОДЗ}$$

№3.

$$\frac{8}{x^2+4} = 1$$

$$8 = x^2 + 4, x^2 + 4 \neq 0 \text{ при } \forall x$$

$$x^2 = 4$$

$$\underline{x = \pm 2} \in \text{ОДЗ}$$

№4.

$$\frac{6x}{x^2-16} = 1$$

$$6x = x^2 - 16; x \neq 4, x \neq -4$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$\underline{x_1 = 8} \quad \underline{x_2 = -2} \in \text{ОДЗ}$$

№5.

$$\frac{x-5}{6x+5} = \frac{x-5}{5x-8}$$

$$(x-5)(5x-8) = (x-5)(6x+5); x \neq \frac{8}{5}, x \neq -\frac{5}{6}$$

$$(x-5)(5x-8-6x-5) = 0$$

$$\underline{x = 5} \in \text{ОДЗ} \quad \text{или} \quad -x-13 = 0$$

$$\underline{x = -13} \in \text{ОДЗ}$$

№6.

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{11}$$

$$11 = 3x - 4, x \neq \frac{4}{3}$$

$$3x = 15$$

$$\underline{x = 5} \in \text{ОДЗ}$$

№7.

$$\frac{1}{4x+6} = 5$$

$$\frac{1}{4x+6} = \frac{5}{1}, x \neq -1,5$$

$$5(4x+6) = 1$$

$$20x + 30 = 1$$

$$20x = -29$$

$$\underline{x = -1,45} \in \text{ОДЗ}$$

№8.

$$\frac{1}{4x-3} = \frac{1}{9x-11}$$

$$4x-3 = 9x-11; x \neq \frac{3}{4}, x \neq \frac{11}{9}$$

$$11-3 = 9x-4x$$

$$8 = 5x$$

$$\underline{x = 1,6} \in \text{ОДЗ}$$

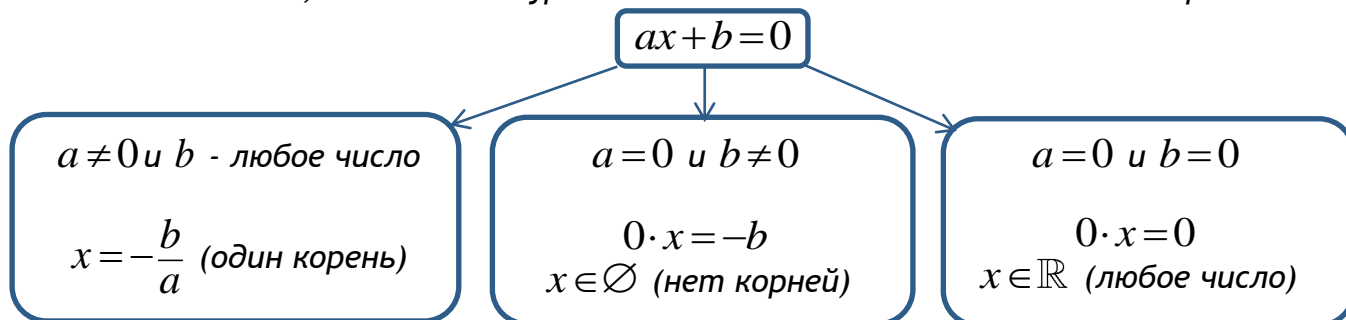
Линейные уравнения

- ✓ Уравнение вида $ax+b=0$, где a и b - некоторые постоянные, называется линейным уравнением.

Если $a \neq 0$, то линейное уравнение имеет единственный корень: $x = -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то линейное уравнение решений не имеет.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то линейное уравнение имеет бесконечное множество решений.



Квадратные уравнения

- ✓ Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа ($a \neq 0$), называется **квадратным уравнением**.
- ✓ Способы решения квадратного уравнения.

Для любых коэффициентов	Для четного коэффициента перед x	Формулы Виета	Неполное квадратное уравнение: $c = 0$	Неполное квадратное уравнение: $b = 0$
<p>Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$</p> <p>Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$</p> <p>Если $D = 0$, то уравнение имеет два совпадающих решения: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$</p> <p>Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней $x \in \emptyset$.</p>	<p>Дискриминант: $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$</p> <p>Формула корней: $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$</p>	<p>$D > 0$ и x_1, x_2 – корни уравнения</p> <p>$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$</p> <p>$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$</p> <p>Если $a = 1$, то уравнение называется приведенным, тогда</p> <p>$x_1 + x_2 = -b$</p> <p>$x_1 \cdot x_2 = c$</p> <p>Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, а</p> <p>$x_2 = \frac{c}{a}$</p> <p>Если $a + c = b$, то $x_1 = -1$, а</p> <p>$x_2 = -\frac{c}{a}$</p>	<p>$ax^2 + bx = 0$</p> <p>$x(ax + b) = 0$</p> <p>$x_1 = 0$</p> <p>$x_2 = -\frac{b}{a}$</p>	<p>$ax^2 + c = 0$</p> <p>$ax^2 = -c$</p> <p>$x^2 = -\frac{c}{a}$</p> <p>Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение имеет два различных корня</p> <p>$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$</p> <p>Если $-\frac{c}{a} = 0$, уравнение имеет один корень $x = 0$;</p> <p>Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет корней $x \in \emptyset$</p>

Дробно-рациональные уравнения

- ✓ Если одна часть уравнения - целое выражение, а другая - дробно-рациональное или обе части - дробно-рациональные выражения, то такое уравнение называют **дробно-рациональным уравнением**.
- ✓ Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:
 1. Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;
 2. Решить получившееся целое уравнение;
 3. Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей
- ✓ Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.
ОДЗ - область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.
- ✓ Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$