

$$3x^2 + 2\sqrt{51}x + 17 = 0$$

Решение: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$$(\sqrt{3}x)^2 + 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \sqrt{17} + (\sqrt{17})^2 = 0$$

$$(\sqrt{3}x + \sqrt{17})^2 = 0$$

1. Целые уравнения

2. Дробно-рациональные уравнения

Содержание сборника:

1. Целые уравнения	
▪ Примеры.....	2
▪ Решение (примеры).....	2
▪ Тест.....	2
▪ Ответы и решение (тест)	3
2. Дробно-рациональные уравнения	
▪ Примеры.....	4
▪ Решение (примеры).....	4
▪ Тест.....	5
▪ Ответы и решение (тест).....	6
Справочный материал.....	22

1. Целые уравнения

▪ Примеры

Решите уравнения:

$$\text{№1. } \frac{x-3}{6} + x = \frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2}.$$

$$\text{№2. } \frac{2}{3}(x+3) = \frac{6+2x}{3}.$$

$$\text{№3. } 3x^2 + 2\sqrt{51}x + 17 = 0.$$

$$\text{№4. } (x^2 + 4x)^2 + 3(x+2)^2 = 52.$$

$$\text{№5. } (4+x)^2 = (4+x)(17x+2).$$

$$\text{№6. } (2x-1)^2(5x-3) = (16x^2-4)(x-0,6).$$

Решение (примеры) 1. Целые уравнения

№1.

$$\frac{x-3}{6} + x = \frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2}$$

$$x-3+6x=2(2x-1)-3(4-x)$$

$$7x-3=4x-2-12+3x$$

$$7x-7x=-14+3$$

$$0 \cdot x = -11$$

$$\underline{x \in \emptyset}$$

Ответ: нет решений.

№2.

$$\frac{2}{3}(x+3) = \frac{6+2x}{3}$$

$$2(x+3) = 6+2x$$

$$2x-2x = 6-6$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$\underline{x \in \mathbb{R}}$$

Ответ: бесконечное множество решений.

№3.

$$3x^2 + 2\sqrt{51}x + 17 = 0$$

$$(\sqrt{3}x)^2 + 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \sqrt{17} + (\sqrt{17})^2 = 0$$

$$(\sqrt{3}x + \sqrt{17})^2 = 0$$

$$\sqrt{3}x + \sqrt{17} = 0$$

$$x = -\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{x = -\frac{\sqrt{51}}{3}}$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{51}}{3}$.

№4.

$$(x^2 + 4x)^2 + 3(x+2)^2 = 52$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 3(x^2 + 4x + 4) - 52 = 0$$

Пусть $t = x^2 + 4x$

$$t^2 + 3(t+4) - 52 = 0$$

$$t^2 + 3t - 40 = 0$$

$$t_1 + t_2 = -3 \quad t_1 = -8$$

$$t_1 \cdot t_2 = -40 \quad t_2 = 5$$

Вернемся к замене.

$$x^2 + 4x = 5 \quad \text{или} \quad x^2 + 4x = -8$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \quad x^2 + 4x + 8 = 0$$

$$x_1 = -5 \quad D < 0$$

$$x_2 = 1 \quad x \in \emptyset$$

Ответ: -5 и 1.

№5.

$$(4+x)^2 = (4+x)(17x+2)$$

$$(4+x)^2 - (4+x)(17x+2) = 0$$

$$(4+x)(4+x - (17x+2)) = 0$$

$$4+x=0 \quad \text{или} \quad 4+x-17x-2=0$$

$$\underline{x = -4} \qquad -16x = -2$$

$$\qquad \qquad \underline{x = \frac{1}{8}}$$

Ответ: -4 и 0,125.

№6.

$$(2x-1)^2(5x-3) = (16x^2-4)(x-0,6)$$

$$(2x-1)^2 \cdot 5(x-0,6) - (4x-2)(4x+2)(x-0,6) = 0$$

$$5(2x-1)^2(x-0,6) - 2(2x-1)(4x+2)(x-0,6) = 0$$

$$(2x-1)(x-0,6)(5(2x-1) - 2(4x+2)) = 0$$

$$2x-1=0 \quad \text{или} \quad x-0,6=0 \quad \text{или} \quad 10x-5-8x-4=0$$

$$\underline{x = 0,5} \qquad \underline{x = 0,6} \qquad \underline{x = 4,5}$$

Ответ: 0,5; 0,6 и 4,5.

■ Тест 1. Целые уравнения

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $5 - 3(x - 2(x - 2(x - 2))) = 2$

№2. $2x - 3 + 2(x - 1) = 4(x - 1) - 7$

№3. $2x + 3 - 6(x - 1) = 4(1 - x) + 5$

№4. $\frac{3x^2 + 5x + 2}{3} = \frac{5x^2 + 2x + 3}{5}$

№5. $11x^2 + x\sqrt{19} = 0$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $(x - 3)^2 = 16$

№2. $27x^2 - 6\sqrt{3} \cdot x + 1 = 0$

№3. $\frac{(x + \sqrt{6})^2}{6} + \frac{1 - \sqrt{6} \cdot x}{3} = 2$

№4. $x\sqrt{2} + x\sqrt{18} + 4\sqrt{2} = x\sqrt{50} + \sqrt{8}$

№5. $(3x - 2)(x - 1) = 4(x - 1)^2$

Вариант 3

Решите уравнения:

№1. $(4x^2 - 3x)^3 = (3x)^3$

№2. $(3x + 7)^3 = (2x)^6$

№3. $(x + 0,06)^2 = (x - 0,2)^2$

№4. $(x^2 + 27x - 57)^2 = (x^2 - 3x + 1)^2$

№5. $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$

Вариант 4

Решите уравнения:

№1. $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$

№2. $(x^2 + 3x - 2)^2 + (x^2 + 3x - 3)^2 = 5$

№3. $(x^2 + 2x)^2 - 4(x + 1)^2 + 7 = 0$

№4. $(2x - 1)(5x - 2)^2 = 100(x^2 - 0,16)(x - 0,5)$

№5. $(2x + 8)^2(13x - 39) = 26(4x^2 - 64)(x - 3)$

Вариант 5

Решите уравнения:

№1. $x^3 = 4x^2 + 5x$

№2. $(x+7)^3 = 49(x+7)$

№3. $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$

№4. $x^3 + 2x^2 = 9x + 18$

№5. $(x-2)(x-3)(x-4) = (x-3)(x-4)(x-5)$

Вариант 6

Решите уравнения:

№1. $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x+2)$

№2. $x^6 = (9x-20)^3$

№3. $x^4 = (2x-8)^2$

№4. $(x+2)^4 - 4(x+2)^2 - 5 = 0$

Вариант 7

Решите уравнения:

№1. $x^3 = 3x^2 + 10x$

№2. $(x+5)^3 = 25(x+5)$

№3. $x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$

№4. $x^3 + 3x^2 = 16x + 48$

№5. $(2x-9)^2(x-9) = (2x-9)(x-9)^2$

Вариант 8

Решите уравнения:

№1. $(x-1)(x^2 + 6x + 9) = 5(x+3)$

№2. $x^6 = (8x-15)^3$

№3. $x^4 = (x-20)^2$

№4. $(x-2)^4 + 3(x-2)^2 - 10 = 0$

▪ **Ответы (тест)** 1. Целые уравнения

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	3	Нет корней	Любое число	$-\frac{1}{19}$	0 и $-\frac{\sqrt{19}}{11}$
Вар.2	7 и -1	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	± 2	2	1 и 2
Вар.3	0 и 1,5	-1 и 1,75	0,07	-14; $\frac{29}{15}$ и 2	$\pm \frac{1}{3}$
Вар.4	-3; -1 и 2 и 4	-4; 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$	-3; 1; $-1 \pm \sqrt{2}$	-1,2; 0,4 и 0,5	3; 4 и 12
Вар.5	-1; 0 и 5	-14; -7 и 0	-5; -1 и 1	-3; -2 и 3	3 и 4
Вар.6	-3; -2 и 1	4 и 5	-4 и 2	$\sqrt{5}-2$; $-\sqrt{5}-2$	
Вар.7	-2; 0 и 5	-10; -5 и 0	-5; -3 и 3	-4; -3 и 4	0; 4,5 и 9
Вар.8	-4; -3 и 2	3 и 5	-5 и 4	$\sqrt{2}+2$; $-\sqrt{2}+2$	

Вариант 1

№1.

$$5 - 3(x - 2(x - 2(x - 2))) = 2$$

$$5 - 3(x - 2(x - 2x + 4)) = 2$$

$$5 - 3(x - 2(-x + 4)) = 2$$

$$5 - 3(x + 2x - 8) = 2$$

$$5 - 3(3x - 8) = 2$$

$$5 - 9x + 24 = 2$$

$$-9x = -29 + 2$$

$$-9x = -27$$

$$\underline{x = 3}$$

№2.

$$2x - 3 + 2(x - 1) = 4(x - 1) - 7$$

$$2x - 3 + 2x - 2 = 4x - 4 - 7$$

$$4x - 5 = 4x - 11$$

$$4x - 4x = -11 + 5$$

$$0 \cdot x = -6$$

$$x \in \emptyset$$

№3.

$$2x + 3 - 6(x - 1) = 4(1 - x) + 5$$

$$2x + 3 - 6x + 6 = 4 - 4x + 5$$

$$-4x + 9 = 9 - 4x$$

$$-4x + 4x = 9 - 9$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$\underline{x \in \mathbb{R}}$$

№4.

$$\frac{3x^2 + 5x + 2}{3} = \frac{5x^2 + 2x + 3}{5}$$

$$5(3x^2 + 5x + 2) = 3(5x^2 + 2x + 3)$$

$$15x^2 + 25x + 10 = 15x^2 + 6x + 9$$

$$25x - 6x = 9 - 10$$

$$19x = -1$$

$$\underline{x = -\frac{1}{19}}$$

№5.

$$11x^2 + x\sqrt{19} = 0$$

$$x(11x + \sqrt{19}) = 0$$

$$11x + \sqrt{19} = 0$$

$$\underline{x = 0} \quad \text{или} \quad \underline{x = -\frac{\sqrt{19}}{11}}$$

Вариант 2

№1

$$(x-3)^2 = 16$$

$$x-3=4 \quad \text{или} \quad x-3=-4$$

$$\underline{x=7} \quad \quad \quad \underline{x=-1}$$

№2.

$$27x^2 - 6\sqrt{3} \cdot x + 1 = 0$$

$$(3\sqrt{3} \cdot x)^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot x \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$(3\sqrt{3} \cdot x - 1)^2 = 0$$

$$3\sqrt{3} \cdot x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\underline{x = \frac{\sqrt{3}}{9}}$$

№3.

$$\frac{(x+\sqrt{6})^2}{6} + \frac{1-\sqrt{6} \cdot x}{3} = 2$$

$$(x+\sqrt{6})^2 + 2(1-\sqrt{6} \cdot x) - 12 = 0$$

$$x^2 + 2\sqrt{6} \cdot x + 6 + 2 - 2\sqrt{6} \cdot x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$\underline{x=2} \quad \text{или} \quad \underline{x=-2}$$

№4.

$$x\sqrt{2} + x\sqrt{18} + 4\sqrt{2} = x\sqrt{50} + \sqrt{8}$$

$$x\sqrt{2} + 3x\sqrt{2} - 5x\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$$

$$x\sqrt{2}(1+3-5) = -2\sqrt{2}$$

$$-x = -2$$

$$\underline{x=2}$$

№5.

$$(3x-2)(x-1) = 4(x-1)^2$$

$$(x-1)(3x-2) - 4(x-1)^2 = 0$$

$$(x-1)(3x-2-4(x-1)) = 0$$

$$x-1=0 \quad \quad \quad 3x-2-4x+4=0$$

$$\underline{x=1} \quad \quad \quad \text{или} \quad -x+2=0$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{x=2}$$

Вариант 3

№1.

$$\begin{aligned}(4x^2 - 3x)^3 &= (3x)^3 \\ 4x^2 - 3x &= 3x \\ 4x^2 - 6x &= 0 \\ 2x(2x - 3) &= 0 \\ \underline{x=0} \quad \text{или} \quad 2x - 3 &= 0 \\ &\quad \underline{x=1,5}\end{aligned}$$

№2.

$$\begin{aligned}(3x+7)^3 &= (2x)^6 \\ (3x+7)^2 &= ((2x)^2)^3 \\ 3x+7 &= 4x^2 \\ 4x^2 - 3x - 7 &= 0 \\ \underline{x_1=1,75} \quad \underline{x_2=-1}\end{aligned}$$

№3.

$$\begin{aligned}(x+0,06)^2 &= (x-0,2)^2 \\ \begin{cases} x+0,06 = x-0,2, \emptyset \\ x+0,06 = -x+0,2 \end{cases} \\ 2x &= 0,14 \\ \underline{x=0,07}\end{aligned}$$

№4.

$$\begin{aligned}(x^2+27x-57)^2 &= (x^2-3x+1)^2 \\ \begin{cases} x^2+27x-57 = x^2-3x+1 \\ x^2+27x-57 = -x^2+3x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} 30x = 58 \\ 2x^2+24x-56 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{29}{15} \\ x^2+12x-28 = 0 \end{cases} \\ \underline{x = \frac{29}{15}} \quad \underline{x = -14} \quad \underline{x = 2}\end{aligned}$$

№5.

$$\begin{aligned}9x^4 + 8x^2 - 1 &= 0 \\ t = x^2, t \geq 0 \\ 9t^2 + 8t - 1 &= 0 \\ t = \frac{1}{9} \quad t = -1 \\ x^2 = \frac{1}{9} \quad \text{или} \quad x^2 = -1 \\ &\quad x \in \emptyset \\ \underline{x = \pm \frac{1}{3}}\end{aligned}$$

№6.

$$\begin{aligned}(x^2-x)^2 - 14(x^2-x) + 24 &= 0 \\ t = x^2 - x \\ t^2 - 14t + 24 &= 0 \\ t_1 = 12 \quad t_2 = 2 \\ x^2 - x = 12 \quad x^2 - x = 2 \\ x^2 - x - 12 = 0 \quad x^2 - x - 2 = 0 \\ x_1 = -3 \quad x_3 = 2 \\ x_2 = 4 \quad x_4 = 1 \\ \text{Ответ: } -3; -1; 2; 4\end{aligned}$$

Вариант 4

№1.

$$(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$$

$$t = x^2 - x$$

$$t^2 - 14t + 24 = 0$$

$$t_1 = 12 \quad t_2 = 2$$

$$x^2 - x = 12 \quad x^2 - x = 2$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = -3 \quad x_3 = 2$$

$$x_2 = 4 \quad x_4 = 1$$

Ответ: -3; -1; 2; 4

№2.

$$(x^2 + 3x - 2)^2 + (x^2 + 3x - 3)^2 = 5$$

$$t = x^2 + 3x - 2; \quad t - 1 = x^2 + 3x - 3$$

$$t^2 + (t - 1)^2 = 5$$

$$2t^2 - 2t - 4 = 0 \quad | : 2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t = 2 \quad t = -1$$

$$x^2 + 3x - 2 = 2 \quad x^2 + 3x - 2 = -1$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = 1$$

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Ответ: -4; 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

№3.

$$(x^2 + 2x)^2 - 4(x + 1)^2 + 7 = 0$$

$$(x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x + 1) + 7 = 0$$

$$t = x^2 + 2x$$

$$t^2 - 4(t + 1) + 7 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 3$$

$$x^2 + 2x = 1 \quad x^2 + 2x = 3$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \quad x_3 = -3$$

$$x_4 = 1$$

Ответ: 1; -3; $-1 \pm \sqrt{2}$

№4.

$$(2x - 1)(5x - 2)^2 = 100(x^2 - 0,16)(x - 0,5)$$

$$2(x - 0,5) \cdot (5(x - 0,4))^2 - 100(x - 0,4)(x + 0,4)(x - 0,5) = 0$$

$$2(x - 0,5) \cdot 25 \cdot (x - 0,4)^2 - 100 \cdot (x - 0,4)(x + 0,4)(x - 0,5) = 0$$

$$50(x - 0,5)(x - 0,4)(x - 0,4 - 2(x + 0,4)) = 0$$

$$x - 0,5 = 0 \quad \text{или} \quad x - 0,4 = 0 \quad \text{или} \quad x - 0,4 - 2x - 0,8 = 0$$

$$\underline{x = 0,5} \quad \text{или} \quad \underline{x = 0,4} \quad \text{или} \quad \underline{x = -1,2}$$

Ответ: -1,2; 0,4; 0,5

№5.

$$(2x + 8)^2 (13x - 39) = 26(4x^2 - 64)(x - 3)$$

$$(2(x + 4))^2 \cdot 13(x - 3) - 26 \cdot 4(x^2 - 16)(x - 3) = 0$$

$$4(x + 4)^2 \cdot 13(x - 3) - 26 \cdot 4 \cdot (x - 4)(x + 4)(x - 3) = 0$$

$$4 \cdot 13(x + 4)(x - 3)(x + 4 - 2(x - 4)) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{или} \quad x - 3 = 0 \quad \text{или} \quad x + 4 - 2x + 8 = 0$$

$$\underline{x = -4} \quad \text{или} \quad \underline{x = 3} \quad \text{или} \quad \underline{x = 12}$$

Ответ: -4; 3; 12

Вариант 5

№1.

$$x^3 = 4x^2 + 5x$$

$$x^3 - 4x^2 - 5x = 0$$

$$x(x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$\underline{x = 0} \quad x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\underline{x = 5} \quad \underline{x = -1}$$

№2.

$$(x+7)^3 = 49(x+7)$$

$$(x+7)^3 - 49(x+7) = 0$$

$$(x+7)((x+7)^2 - 49) = 0$$

$$(x+7)(x+7-7)(x+7+7) = 0$$

$$\underline{x = -7} \quad \underline{x = 0} \quad \underline{x = -14}$$

№3.

$$x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$$

$$x^2(x+5) - (x+5) = 0$$

$$(x+5)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x+5)(x-1)(x+1) = 0$$

$$\underline{x = -5} \quad \underline{x = 1} \quad \underline{x = -1}$$

№4.

$$x^3 + 2x^2 = 9x + 18$$

$$x^2(x+2) - 9(x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 9) = 0$$

$$(x+2)(x-3)(x+3) = 0$$

$$\underline{x = -2} \quad \underline{x = 3} \quad \underline{x = -3}$$

№5.

$$(x-2)(x-3)(x-4) = (x-3)(x-4)(x-5)$$

$$(x-2)(x-3)(x-4) - (x-3)(x-4)(x-5) = 0$$

$$(x-3)(x-4)(x-2 - (x-5)) = 0$$

$$(x-3)(x-4) \cdot 3 = 0$$

$$\underline{x = 3} \quad \underline{x = 4}$$

Вариант 6

№1.

$$x(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)$$

$$x(x + 2)^2 - 3(x + 2) = 0$$

$$(x + 2)(x(x + 2) - 3) = 0$$

$$(x + 2)(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$\underline{x = -2} \quad \underline{x = -3} \quad \underline{x = 1}$$

№2.

$$x^6 = (9x - 20)^3$$

$$(x^2)^3 = (9x - 20)^3$$

$$x^2 = 9x - 20$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$\underline{x = 5} \quad \underline{x = 4}$$

№3.

$$x^4 = (2x - 8)^2$$

$$(x^2)^2 - (2x - 8)^2 = 0$$

$$(x^2 - (2x - 8))(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$(x^2 - 2x + 8)(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$x^2 - 2x + 8 = 0 \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\emptyset \quad \underline{x = -4} \quad \underline{x = 2}$$

№4.

$$(x + 2)^4 - 4(x + 2)^2 - 5 = 0$$

$$t = (x + 2)^2$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$t = 5 \quad t = -1$$

$$(x + 2)^2 = 5 \quad (x + 2)^2 = -1$$

$$\begin{cases} x + 2 = \sqrt{5} \\ x + 2 = -\sqrt{5} \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\underline{x = -2 \pm 5}$$

Вариант 7

№1.

$$x^3 = 3x^2 + 10x$$

$$x^3 - 3x^2 - 10x = 0$$

$$x(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$\underline{x = 0} \quad x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\underline{x = 5} \quad \underline{x = -2}$$

№3.

$$x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$$

$$x^2(x + 5) - 9(x + 5) = 0$$

$$(x + 5)(x^2 - 9) = 0$$

$$\underline{x = -5} \quad \underline{x = 3} \quad \underline{x = -3}$$

№2.

$$(x + 5)^3 = 25(x + 5)$$

$$(x + 5)((x + 5)^2 - 25) = 0$$

$$(x + 5)(x + 5 - 5)(x + 5 + 5) = 0$$

$$\underline{x = -5} \quad \underline{x = 0} \quad \underline{x = -10}$$

№4.

$$x^3 + 3x^2 = 16x + 48$$

$$x^2(x + 3) - 16(x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(x^2 - 16) = 0$$

$$\underline{x = -3} \quad \underline{x = 4} \quad \underline{x = -4}$$

№5.

$$(2x - 9)^2(x - 9) = (2x - 9)(x - 9)^2$$

$$(2x - 9)^2(x - 9) - (2x - 9)(x - 9)^2 = 0$$

$$(2x - 9)(x - 9)(2x - 9 - (x - 9)) = 0$$

$$\underline{x = 4,5} \quad \underline{x = 9} \quad \underline{x = 0}$$

Вариант 8

№1.

$$(x-1)(x^2+6x+9)=5(x+3)$$

$$(x-1)(x+3)^2-5(x+3)=0$$

$$(x+3)((x-1)(x+3)-5)=0$$

$$x+3=0 \quad x^2+2x-8=0$$

$$\underline{x=-3} \quad \underline{x=-4} \quad \underline{x=2}$$

№2.

$$x^6=(8x-15)^3$$

$$(x^2)^3=(8x-15)^3$$

$$x^2=8x-15$$

$$x^2-8x+15=0$$

$$x=3 \quad x=5$$

№3.

$$x^4=(x-20)^2$$

$$(x^2)^2-(x-20)^2=0$$

$$(x^2-x+20)(x^2+x-20)=0$$

$$\emptyset \quad \underline{x=-5} \quad \underline{x=4}$$

№4.

$$(x-2)^4+3(x-2)^2-10=0$$

$$t=(x-2)^2$$

$$t^2+3t-10=0$$

$$t=2 \quad t=-5$$

$$(x-2)^2=2 \quad (x-2)^2=-5$$

$$\begin{cases} x-2=\sqrt{2} \\ x-2=-\sqrt{2} \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\underline{x=2\pm\sqrt{2}}$$

2. Дробно-рациональные уравнения

▪ **Примеры** Решите уравнения:

№1.
$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4} = 0.$$

№2.
$$\frac{x^4 - 625}{25 - x^2} = -(8x + 90).$$

№3.
$$\frac{8x^3 + 27}{4x + 6} = 5x + 21.$$

№4.
$$\frac{2x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{(3x - 2)^2}{9x^2 - 4}.$$

▪ **Решение (примеры)** 2. Дробно-рациональные уравнения

№1.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ x^2 - 5x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-4)(x+3) = 0 \\ (x-4)(x-1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4, x = -3 \\ x \neq 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\underline{x = -3}$$

Ответ: -3

№2.

$$\frac{x^4 - 625}{25 - x^2} = -(8x + 90)$$

$$\frac{(x^2 - 25)(x^2 + 25)}{-(x^2 - 25)} = -(8x + 90)$$

$$\begin{cases} -(x^2 + 25) = -(8x + 90) \\ x^2 - 25 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 25 - 8x - 90 = 0 \\ x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

$$x^2 - 8x - 65 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 13, x_2 = -5 \\ x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

$$\underline{x = 13}$$

Ответ: 13

№3.

$$\frac{8x^3 + 27}{4x + 6} = 5x + 21$$

$$\frac{(2x+3)(4x^2 - 6x + 9)}{2(2x+3)} = 5x + 21$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 6x + 9 = 2(5x + 21) \\ 2x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 6x + 9 - 10x - 42 = 0 \\ x \neq -1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 16x - 33 = 0 \\ x \neq -1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5,5 \\ x = -1,5 \\ x \neq -1,5 \end{cases}$$

$$\underline{x = 5,5}$$

Ответ: 5,5.

№4.

$$\frac{2x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{(3x-2)^2}{9x^2 - 4}$$

Разложим на множители квадратные трехчлены

$$1) 3x^2 - 4x - 4 = 3(x-2)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x-2)(3x+2)$$

$$2) 2x^2 - 7x + 6 = 2(x-2)(x-1,5) = (x-2)(2x-3)$$

Вернемся к уравнению

$$\frac{(x-2)(2x-3)}{(x-2)(3x+2)} - \frac{(3x-2)^2}{(3x-2)(3x+2)} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{3x+2} - \frac{3x-2}{3x+2} = 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{2}{3} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3-(3x-2) = 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{2}{3} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$-x - 1 = 0$$

$$\underline{x = -1} \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: -1

Вариант 1

Решите уравнения:

№1.
$$\frac{y^2 - 25}{4y + 20} = 0$$

№2.
$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = 0$$

№3.
$$\frac{x^3 - 8}{2x - 4} = 12x - 18$$

№4.
$$\frac{3x^2 + 4x - 4}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{(2x - 1)^2}{4x^2 - 1}$$

№5.
$$\frac{x^2 - 25}{x^3 + 4x^2 + 25} = 0$$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1.
$$\frac{y^2 - 9}{4y + 12} = 0$$

№2.
$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 4} = 0$$

№3.
$$\frac{x^4 - 256}{16 - x^2} = 2(7x + 12)$$

№4.
$$\frac{x^2 + x - 12}{6x^2 - 10x - 24} = \frac{(6x - 8)^2}{36x^2 - 64}$$

№5.
$$\frac{x^2 - 36}{x^3 + 5x^2 + 36} = 0$$

Вариант 3

Решите уравнения:

№1.
$$\left(\frac{3}{x} + 1\right)^2 + 6 = 5\left(\frac{3}{x} + 1\right)$$

№2.
$$x^2 + x^{-2} - 4x - 4x^{-1} - 3 = 0$$

№3.
$$\frac{x - 1}{x - 3} - \frac{3}{x - 2} = 1$$

№4.
$$\frac{x}{x - 2} - \frac{3x - 8}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

Вариант 4

Решите уравнения:

№1.
$$\left(1 - \frac{5}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{5}{x}\right) + 2$$

№2.
$$x^2 + x^{-2} - 5x - 5x^{-1} - 4 = 0$$

№3.
$$\frac{x - 1}{x - 6} - \frac{6}{x - 4} = 1$$

№4.
$$\frac{x}{x - 1} - \frac{4x - 5}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

▪ **Ответы (тест)** 2. Дробно-рациональные уравнения

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	5	4	20	1	5
Вар.2	3	-2	-10	2,4	6
Вар.3	1,5 и 3	$\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$	5	4	
Вар.4	-5 и 2,5	$3 \pm 2\sqrt{2}$	16	1 и 5	

Вариант 1

№1.

$$\frac{y^2 - 25}{4y + 20} = 0$$

$$\frac{(y-5)(y+5)}{4(y+5)} = 0$$

$$\begin{cases} (y-5)(y+5) = 0 \\ y+5 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \Leftrightarrow \underline{y = 5} \\ y \neq -5 \end{cases}$$

№3.

$$\frac{x^3 - 8}{2x - 4} = 12x - 18$$

$$\frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{2(x-2)} = 12x - 18$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 4 = 2(12x - 18) \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 24x + 4 + 36 = 0$$

$$x^2 - 22x + 40 = 0$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ x = 2 \Leftrightarrow \underline{x = 20} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

№2.

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x-4) = 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \Leftrightarrow \underline{x = 4} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

№4.

$$\frac{3x^2 + 4x - 4}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{(2x-1)^2}{4x^2 - 1}$$

$$1) 3x^2 + 4x - 4 = 3(x+2)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x+2)(3x-2)$$

$$2) 2x^2 + 5x + 2 = 2(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x+2)(2x+1)$$

$$\frac{(x+2)(3x-2)}{(x+2)(2x+1)} - \frac{(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} = 0$$

$$x \neq -2, x \neq \frac{1}{2}, x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3x-2}{2x+1} - \frac{2x-1}{2x+1} = 0$$

$$3x-2-2x+1=0$$

$$x-1=0$$

$$\underline{x=1} \in \text{ОДЗ}$$

№5.

$$\frac{x^2 - 25}{x^3 + 4x^2 + 25} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ x^3 + 4x^2 + 25 \neq 0 \end{cases}$$

$$x = 5 \quad \text{или} \quad x = -5$$

Проверка знаменателя:

$$x = 5, \text{ то } 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 25 \neq 0$$

$$x = -5, \text{ то } \begin{aligned} (-5)^3 + 4 \cdot (-5)^2 + 25 &= \\ &= 5^2 \cdot (-5 + 4 + 1) = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 5

Вариант 2

№1.

$$\frac{y^2 - 9}{4y + 12} = 0$$

$$\frac{(y-3)(y+3)}{4(y+3)} = 0$$

$$\begin{cases} (y-3)(y+3) = 0 \\ y+3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = -3 \Leftrightarrow \underline{y = 3} \\ y \neq -3 \end{cases}$$

№2.

$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 4} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 8 = 0 \\ x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)(x+4) = 0 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \Leftrightarrow \underline{x = -2} \\ x \neq -4 \end{cases}$$

№3.

$$\frac{x^4 - 256}{16 - x^2} = 2(7x + 12)$$

$$\frac{(x^2 - 16)(x^2 + 16)}{-(x^2 - 16)} = 2(7x + 12)$$

$$\begin{cases} x^2 + 16 = -2(7x + 12) \\ x^2 \neq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + 16 + 24 = 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$x^2 + 14x + 40 = 0$$

$$\begin{cases} x = -10, x = -4 \\ x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x = -10}$$

№4.

$$\frac{x^2 + x - 12}{6x^2 - 10x - 24} = \frac{(6x - 8)^2}{36x^2 - 64}$$

$$1) x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$$

$$2) 6x^2 - 10x - 24 = 6(x - 2)\left(x + \frac{4}{3}\right) = (x - 3)(6x + 8)$$

$$\frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(6x+8)} - \frac{(6x-8)^2}{(6x-8)(6x+8)} = 0$$

$$x \neq 3, x \neq -\frac{4}{3}, x \neq \frac{4}{3}$$

$$\frac{x+4}{6x+8} - \frac{6x-8}{6x+8} = 0$$

$$x+4-6x+8=0$$

$$-5x+12=0$$

$$x = 2, 4 \in \text{ОДЗ}$$

№5.

$$\frac{x^2 - 36}{x^3 + 5x^2 + 36} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 36 = 0 \\ x^3 + 5x^2 + 36 \neq 0 \end{cases}$$

$$x = 6 \text{ или } x = -6$$

Проверим знаменатель

$$x = 6, 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 36 \neq 0, \text{ верно}$$

$$x = -6, (-6)^3 + 5 \cdot (-6)^2 + 36 = 6^2(-6 + 5 + 1) = 0$$

Ответ: 6

Вариант 3

№1.

$$\left(\frac{3}{x}+1\right)^2+6=5\left(\frac{3}{x}+1\right)$$

$$t=\frac{3}{x}+1 \quad (x \neq 0)$$

$$t^2-5t+6=0$$

$$t_1=2 \quad t_2=3$$

$$\frac{3}{x}+1=2 \quad \frac{3}{x}+1=3$$

$$\frac{3}{x}=1 \quad \frac{3}{x}=2$$

$$\underline{x=3} \quad \underline{x=1,5}$$

№2.

$$x^2+x^{-2}-4x-4x^{-1}-3=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-4x-\frac{4}{x}-3=0 \quad (x \neq 0)$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left|t=x+\frac{1}{x}, t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}, t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}\right.$$

$$t^2-2-4t-3=0$$

$$t^2-4t-5=0$$

$$t_1=5$$

$$t_2=-1$$

$$x+\frac{1}{x}=5$$

$$x+\frac{1}{x}=-1$$

$$x^2-5x+1=0$$

$$x^2+x+1=0$$

$$x=\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \quad D < 0, \emptyset$$

$$\underline{\text{ОТВЕТ: } \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}}$$

№3.

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{3}{x-2}=1$$

ОДЗ: $x \neq 3, x \neq 2$

$$(x-1)(x-2)-3(x-3)=(x-3)(x-2)$$

$$x^2-3x+2-3x+9-x^2+5x-6=0$$

$$-x+5=0$$

$$\underline{x=5} \in \text{ОДЗ}$$

№4.

$$\frac{x}{x-2}-\frac{3x-8}{x^2-5x+6}=0$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$\frac{x}{x-2}-\frac{3x-8}{(x-2)(x-3)}=0 \quad \left| \cdot (x-2)(x-3) \right.$$

ОДЗ: $x \neq 2, x \neq 3$

$$x(x-3)-(3x-8)=0$$

$$x^2-3x-3x+8=0$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$x_1=2 \notin \text{ОДЗ} \quad x_2=4 \in \text{ОДЗ}$$

$$\underline{\text{ОТВЕТ: } 4}$$

Вариант 4

№1.

$$\left(1 - \frac{5}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{5}{x}\right) + 2$$

$$t = 1 - \frac{5}{x}, \quad x \neq 0$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_1 = 2 \quad t_2 = -1$$

$$1 - \frac{5}{x} = 2 \quad 1 - \frac{5}{x} = -1$$

$$\frac{5}{x} = -1 \quad \frac{5}{x} = 2$$

$$\underline{x = -5} \quad \underline{x = 2,5}$$

№2.

$$x^2 + x^{-2} - 5x - 5x^{-1} - 4 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5x - \frac{5}{x} - 4 = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$$

$$\left| t = x + \frac{1}{x}, \quad t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \right.$$

$$t^2 - 2 - 5t - 4 = 0$$

$$t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$t = 6 \quad t = -1$$

$$x + \frac{1}{x} = 6 \quad x + \frac{1}{x} = -1$$

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \quad x^2 + x + 1 = 0$$

$$D/4 = 9 - 1 = 8 \quad D < 0$$

$$\underline{x = 3 \pm 2\sqrt{2}} \quad \emptyset$$

№3.

$$\frac{x-1}{x-6} - \frac{6}{x-4} = 1$$

ОДЗ: $x \neq 6, x \neq 4$

$$(x-1)(x-4) - 6(x-6) = (x-6)(x-4)$$

$$x^2 - 5x + 4 - 6x + 36 - x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$-x + 16 = 0$$

$$\underline{x = 16} \in \text{ОДЗ}$$

№4.

$$\frac{x}{x-1} - \frac{4x-5}{x^2-3x+2} = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{4x-5}{(x-1)(x-2)} = 0 \quad | \cdot (x-1)(x-2)$$

ОДЗ: $x \neq 1, x \neq 2$

$$x(x-2) - (4x-5) = 0$$

$$x^2 - 2x - 4x + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_1 = 1 \in \text{ОДЗ} \quad x_2 = 5 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 1 и 5

Линейные уравнения

- ✓ Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b - некоторые постоянные, называется **линейным уравнением**.

Количество корней линейного уравнения

Один корень	Нет корней	Бесконечное множество корней
$a \neq 0$ и b - любое число	$a = 0$ и $b \neq 0$	$a = 0$ и $b = 0$
$x = -\frac{b}{a}$	$0 \cdot x = -b$ $x \in \emptyset$	$0 \cdot x = 0$ $x \in \mathbb{R}$

Квадратные уравнения

- ✓ Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c - некоторые числа ($a \neq 0$), называется **квадратным уравнением**.

Способы решения квадратного уравнения.

Для любых коэффициентов	Для четного коэффициента перед x	Формулы Виета	Неполное квадратное уравнение: $c = 0$	Неполное квадратное уравнение: $b = 0$
<p>Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$</p> <p>Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$</p> <p>Если $D = 0$, то уравнение имеет два совпадающих решения: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.</p> <p>Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней $x \in \emptyset$.</p>	<p>Дискриминант: $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$</p> <p>Формула корней: $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$</p>	<p>$D > 0$ и x_1, x_2 - корни уравнения</p> <p>$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$</p> <p>$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$</p> <p>Если $a = 1$, то уравнение называется приведенным, тогда $x_1 + x_2 = -b$ $x_1 \cdot x_2 = c$</p> <p>Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, а $x_2 = \frac{c}{a}$.</p>	<p>$ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$</p> <p>$x_1 = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$</p>	<p>$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$</p> <p>Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$</p> <p>Если $-\frac{c}{a} = 0$, уравнение имеет один корень $x = 0$;</p> <p>Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет корней $x \in \emptyset$</p>

Дробно-рациональные уравнения

- ✓ Если одна часть уравнения - целое выражение, а другая - дробно-рациональное или обе части - дробно-рациональные выражения, то такое уравнение называют **дробно-рациональным уравнением**.
- ✓ Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:
 1. Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;
 2. Решить получившееся целое уравнение;
 3. Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей.
- ✓ Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.
ОДЗ - область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.
- ✓ Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Формулы сокращенного умножения (ФСУ)

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ разность квадратов
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ квадрат разности
3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ квадрат суммы
4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ разность кубов
5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ сумма кубов
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ куб суммы
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ куб разности

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена