

Дробно-рациональные уравнения

▪ Примеры

Решите уравнения:

№1. $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4} = 0.$

№2. $\frac{x^4 - 625}{25 - x^2} = -(8x + 90).$

№3. $\frac{8x^3 + 27}{4x + 6} = 5x + 21.$

№4. $\frac{2x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{(3x - 2)^2}{9x^2 - 4}.$

№1.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ x^2 - 5x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-4)(x+3) = 0 \\ (x-4)(x-1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4, x = -3 \\ x \neq 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\underline{x = -3}$$

Ответ: -3

№2.

$$\frac{x^4 - 625}{25 - x^2} = -(8x + 90)$$

$$\frac{(x^2 - 25)(x^2 + 25)}{-(x^2 - 25)} = -(8x + 90)$$

$$\begin{cases} -(x^2 + 25) = -(8x + 90) \\ x^2 - 25 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 25 - 8x - 90 = 0 \\ x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

$$x^2 - 8x - 65 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 13, x_2 = -5 \\ x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

$$\underline{x = 13}$$

Ответ: 13

№3.

$$\frac{8x^3 + 27}{4x + 6} = 5x + 21$$

$$\frac{(2x+3)(4x^2 - 6x + 9)}{2(2x+3)} = 5x + 21$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 6x + 9 = 2(5x + 21) \\ 2x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 6x + 9 - 10x - 42 = 0 \\ x \neq -1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 16x - 33 = 0 \\ x \neq -1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5,5 \\ x = -1,5 \\ x \neq -1,5 \end{cases}$$

$$\underline{x = 5,5}$$

Ответ: 5,5.

№4.

$$\frac{2x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{(3x-2)^2}{9x^2 - 4}$$

Разложим на множители квадратные трехчлены

$$1) 3x^2 - 4x - 4 = 3(x-2)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x-2)(3x+2)$$

$$2) 2x^2 - 7x + 6 = 2(x-2)(x-1,5) = (x-2)(2x-3)$$

Вернемся к уравнению

$$\frac{(x-2)(2x-3)}{(x-2)(3x+2)} - \frac{(3x-2)^2}{(3x-2)(3x+2)} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{3x+2} - \frac{3x-2}{3x+2} = 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{2}{3} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 - (3x-2) = 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{2}{3} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$-x - 1 = 0$$

$$\underline{x = -1} \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: -1

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $\frac{y^2 - 25}{4y + 20} = 0$

№2. $\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = 0$

№3. $\frac{x^3 - 8}{2x - 4} = 12x - 18$

№4. $\frac{3x^2 + 4x - 4}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{(2x - 1)^2}{4x^2 - 1}$

№5. $\frac{x^2 - 25}{x^3 + 4x^2 + 25} = 0$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $\frac{y^2 - 9}{4y + 12} = 0$

№2. $\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 4} = 0$

№3. $\frac{x^4 - 256}{16 - x^2} = 2(7x + 12)$

№4. $\frac{x^2 + x - 12}{6x^2 - 10x - 24} = \frac{(6x - 8)^2}{36x^2 - 64}$

№5. $\frac{x^2 - 36}{x^3 + 5x^2 + 36} = 0$

Вариант 3

Решите уравнения:

№1. $\left(\frac{3}{x} + 1\right)^2 + 6 = 5\left(\frac{3}{x} + 1\right)$

№2. $x^2 + x^{-2} - 4x - 4x^{-1} - 3 = 0$

№3. $\frac{x - 1}{x - 3} - \frac{3}{x - 2} = 1$

№4. $\frac{x}{x - 2} - \frac{3x - 8}{x^2 - 5x + 6} = 0$

Вариант 4

Решите уравнения:

№1. $\left(1 - \frac{5}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{5}{x}\right) + 2$

№2. $x^2 + x^{-2} - 5x - 5x^{-1} - 4 = 0$

№3. $\frac{x - 1}{x - 6} - \frac{6}{x - 4} = 1$

№4. $\frac{x}{x - 1} - \frac{4x - 5}{x^2 - 3x + 2} = 0$

▪ **Ответы (тест)** Дробно-рациональные уравнения

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	5	4	20	1	5
Вар.2	3	-2	-10	2,4	6
Вар.3	1,5 и 3	$\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$	5	4	
Вар.4	-5 и 2,5	$3 \pm 2\sqrt{2}$	16	1 и 5	

Вариант 1

№1.

$$\frac{y^2 - 25}{4y + 20} = 0$$

$$\frac{(y-5)(y+5)}{4(y+5)} = 0$$

$$\begin{cases} (y-5)(y+5) = 0 \\ y+5 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \Leftrightarrow \underline{y = 5} \\ y \neq -5 \end{cases}$$

№2.

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x-4) = 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \Leftrightarrow \underline{x = 4} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

№3.

$$\frac{x^3 - 8}{2x - 4} = 12x - 18$$

$$\frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{2(x-2)} = 12x - 18$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 4 = 2(12x - 18) \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 24x + 4 + 36 = 0$$

$$x^2 - 22x + 40 = 0$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ x = 2 \Leftrightarrow \underline{x = 20} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

№4.

$$\frac{3x^2 + 4x - 4}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{(2x-1)^2}{4x^2 - 1}$$

$$1) 3x^2 + 4x - 4 = 3(x+2)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x+2)(3x-2)$$

$$2) 2x^2 + 5x + 2 = 2(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x+2)(2x+1)$$

$$\frac{(x+2)(3x-2)}{(x+2)(2x+1)} - \frac{(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} = 0$$

$$x \neq -2, x \neq \frac{1}{2}, x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3x-2}{2x+1} - \frac{2x-1}{2x+1} = 0$$

$$3x-2-2x+1=0$$

$$x-1=0$$

$$\underline{x = 1} \in \text{ОДЗ}$$

№5.

$$\frac{x^2 - 25}{x^3 + 4x^2 + 25} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ x^3 + 4x^2 + 25 \neq 0 \end{cases}$$

$$x = 5 \text{ или } x = -5$$

Проверка знаменателя:

$$x = 5, \text{ то } 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 25 \neq 0$$

$$x = -5, \text{ то } (-5)^3 + 4 \cdot (-5)^2 + 25 = 5^2 \cdot (-5 + 4 + 1) = 0$$

Ответ: 5

Вариант 2

№1.

$$\frac{y^2 - 9}{4y + 12} = 0$$

$$\frac{(y-3)(y+3)}{4(y+3)} = 0$$

$$\begin{cases} (y-3)(y+3) = 0 \\ y+3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = -3 \Leftrightarrow \underline{y = 3} \\ y \neq -3 \end{cases}$$

№2.

$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 4} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 8 = 0 \\ x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)(x+4) = 0 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \Leftrightarrow \underline{x = -2} \\ x \neq -4 \end{cases}$$

№3.

$$\frac{x^4 - 256}{16 - x^2} = 2(7x + 12)$$

$$\frac{(x^2 - 16)(x^2 + 16)}{-(x^2 - 16)} = 2(7x + 12)$$

$$\begin{cases} x^2 + 16 = -2(7x + 12) \\ x^2 \neq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + 16 + 24 = 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$x^2 + 14x + 40 = 0$$

$$\begin{cases} x = -10, x = -4 \\ x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x = -10}$$

№4.

$$\frac{x^2 + x - 12}{6x^2 - 10x - 24} = \frac{(6x - 8)^2}{36x^2 - 64}$$

$$1) x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$$

$$2) 6x^2 - 10x - 24 = 6(x - 2)\left(x + \frac{4}{3}\right) = (x - 3)(6x + 8)$$

$$\frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(6x+8)} - \frac{(6x-8)^2}{(6x-8)(6x+8)} = 0$$

$$x \neq 3, x \neq -\frac{4}{3}, x \neq \frac{4}{3}$$

$$\frac{x+4}{6x+8} - \frac{6x-8}{6x+8} = 0$$

$$x + 4 - 6x + 8 = 0$$

$$-5x + 12 = 0$$

$$\underline{x = 2, 4} \in \text{ОДЗ}$$

№5.

$$\frac{x^2 - 36}{x^3 + 5x^2 + 36} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 36 = 0 \\ x^3 + 5x^2 + 36 \neq 0 \end{cases}$$

$$x = 6 \text{ или } x = -6$$

Проверим знаменатель

$$x = 6, 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 36 \neq 0, \text{ верно}$$

$$x = -6, (-6)^3 + 5 \cdot (-6)^2 + 36 = 6^2(-6 + 5 + 1) = 0$$

Ответ: 6

Вариант 3

№1.

$$\left(\frac{3}{x}+1\right)^2+6=5\left(\frac{3}{x}+1\right)$$

$$t=\frac{3}{x}+1 \quad (x \neq 0)$$

$$t^2-5t+6=0$$

$$t_1=2 \quad t_2=3$$

$$\frac{3}{x}+1=2 \quad \frac{3}{x}+1=3$$

$$\frac{3}{x}=1 \quad \frac{3}{x}=2$$

$$\underline{x=3} \quad \underline{x=1,5}$$

№2.

$$x^2+x^{-2}-4x-4x^{-1}-3=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-4x-\frac{4}{x}-3=0 \quad (x \neq 0)$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left|t=x+\frac{1}{x}, t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}, t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}\right.$$

$$t^2-2-4t-3=0$$

$$t^2-4t-5=0$$

$$t_1=5$$

$$t_2=-1$$

$$x+\frac{1}{x}=5$$

$$x+\frac{1}{x}=-1$$

$$x^2-5x+1=0$$

$$x^2+x+1=0$$

$$x=\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \quad D < 0, \emptyset$$

$$\underline{\text{Ответ: } \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}}$$

№3.

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{3}{x-2}=1$$

ОДЗ: $x \neq 3, x \neq 2$

$$(x-1)(x-2)-3(x-3)=(x-3)(x-2)$$

$$x^2-3x+2-3x+9-x^2+5x-6=0$$

$$-x+5=0$$

$$\underline{x=5} \in \text{ОДЗ}$$

№4.

$$\frac{x}{x-2}-\frac{3x-8}{x^2-5x+6}=0$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$\frac{x}{x-2}-\frac{3x-8}{(x-2)(x-3)}=0 \quad \left| \cdot (x-2)(x-3) \right.$$

ОДЗ: $x \neq 2, x \neq 3$

$$x(x-3)-(3x-8)=0$$

$$x^2-3x-3x+8=0$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$x_1=2 \notin \text{ОДЗ} \quad x_2=4 \in \text{ОДЗ}$$

$$\underline{\text{Ответ: } 4}$$

Вариант 4

№1.

$$\left(1 - \frac{5}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{5}{x}\right) + 2$$

$$t = 1 - \frac{5}{x}, \quad x \neq 0$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_1 = 2 \quad t_2 = -1$$

$$1 - \frac{5}{x} = 2 \quad 1 - \frac{5}{x} = -1$$

$$\frac{5}{x} = -1 \quad \frac{5}{x} = 2$$

$$\underline{x = -5} \quad \underline{x = 2,5}$$

№2.

$$x^2 + x^{-2} - 5x - 5x^{-1} - 4 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5x - \frac{5}{x} - 4 = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$$

$$\left| t = x + \frac{1}{x}, \quad t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \right.$$

$$t^2 - 2 - 5t - 4 = 0$$

$$t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$t = 6 \quad t = -1$$

$$x + \frac{1}{x} = 6 \quad x + \frac{1}{x} = -1$$

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \quad x^2 + x + 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 1 = 8 \quad D < 0$$

$$\underline{x = 3 \pm 2\sqrt{2}} \quad \emptyset$$

№3.

$$\frac{x-1}{x-6} - \frac{6}{x-4} = 1$$

ОДЗ: $x \neq 6, x \neq 4$

$$(x-1)(x-4) - 6(x-6) = (x-6)(x-4)$$

$$x^2 - 5x + 4 - 6x + 36 - x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$-x + 16 = 0$$

$$\underline{x = 16} \in \text{ОДЗ}$$

№4.

$$\frac{x}{x-1} - \frac{4x-5}{x^2-3x+2} = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{4x-5}{(x-1)(x-2)} = 0 \quad \left| \cdot (x-1)(x-2) \right.$$

ОДЗ: $x \neq 1, x \neq 2$

$$x(x-2) - (4x-5) = 0$$

$$x^2 - 2x - 4x + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_1 = 1 \in \text{ОДЗ} \quad x_2 = 5 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 1 и 5

Дробно-рациональные уравнения

- ✓ Если одна часть уравнения - целое выражение, а другая - дробно-рациональное или обе части - дробно-рациональные выражения, то такое уравнение называют **дробно-рациональным уравнением**.
- ✓ Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:
 1. Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;
 2. Решить полученное целое уравнение;
 3. Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей.
- Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.
ОДЗ - область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.
- Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Формулы сокращенного умножения (ФСУ)

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ разность квадратов
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ квадрат разности
3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ квадрат суммы
4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ разность кубов
5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ сумма кубов
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ куб суммы
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ куб разности

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена