Тема: Рациональные уравнения

Подготовка к профилю

$$3x^2+2\sqrt{51}x+17=0$$

Решение: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$$(a)^2+2\cdot a\cdot b+(b)^2=0$$

$$\left(\sqrt{3}x+\sqrt{17}\right)^2=0$$

1. Целые уравнения

2. Дробно-рациональные уравнения

1. Целые уравнения

▪ ***Примеры*** Решите уравнения:

№1. $\frac{x-3}{6}+x=\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}$.

№2. $\frac{2}{3}(x+3)=\frac{6+2x}{3}$.

№3. $3x^2+2\sqrt{51}x+17=0$.

№4. $\left(x^2+4x\right)^2+3(x+2)^2=52$.

№5. $(4+x)^2=(4+x)(17x+2)$.

№6. $(2x-1)^2(5x-3)=\left(16x^2-4\right)(x-0{,}6)$.

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $5-3(x-2(x-2(x-2)))=2$

№2. $2x-3+2(x-1)=4(x-1)-7$

№3. $2x+3-6(x-1)=4(1-x)+5$

№4. $\frac{3x^2+5x+2}{3}=\frac{5x^2+2x+3}{5}$

№5. $11x^2+x\sqrt{19}=0$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $(x-3)^2=16$

№2. $27x^2-6\sqrt{3}\cdot x+1=0$

№3. $\frac{(x+\sqrt{6})^2}{6}+\frac{1-\sqrt{6}\cdot x}{3}=2$

№4. $x\sqrt{2}+x\sqrt{18}+4\sqrt{2}=x\sqrt{50}+\sqrt{8}$

№5. $(3x-2)(x-1)=4(x-1)^2$

Вариант 3

Решите уравнения:

№1. $(4x^2-3x)^3=(3x)^3$

№2. $(3x+7)^3=(2x)^6$

№3. $(x+0,06)^2=(x-0,2)^2$

№4. $(x^2+27x-57)^2=(x^2-3x+1)^2$

№5. $9x^4+8x^2-1=0$

Вариант 4

Решите уравнения:

№1. $(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24=0$

№2. $(x^2+3x-2)^2+(x^2+3x-3)^2=5$

№3. $(x^2+2x)^2-4(x+1)^2+7=0$

№4. $(2x-1)(5x-2)^2=100(x^2-0,16)(x-0,5)$

№5. $(2x+8)^2(13x-39)=26(4x^2-64)(x-3)$

Вариант 5

Решите уравнения:

№1. $x^3 = 4x^2 + 5x$

№2. $(x+7)^3 = 49(x+7)$

№3. $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$

№4. $x^3 + 2x^2 = 9x + 18$

№5. $(x-2)(x-3)(x-4) = (x-3)(x-4)(x-5)$

Вариант 6

Решите уравнения:

№1. $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x+2)$

№2. $x^6 = (9x-20)^3$

№3. $x^4 = (2x-8)^2$

№4. $(x+2)^4 - 4(x+2)^2 - 5 = 0$

Вариант 7

Решите уравнения:

№1. $x^3 = 3x^2 + 10x$

№2. $(x+5)^3 = 25(x+5)$

№3. $x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$

№4. $x^3 + 3x^2 = 16x + 48$

№5. $(2x-9)^2(x-9) = (2x-9)(x-9)^2$

Вариант 8

Решите уравнения:

№1. $(x-1)(x^2 + 6x + 9) = 5(x+3)$

№2. $x^6 = (8x-15)^3$

№3. $x^4 = (x-20)^2$

№4. $(x-2)^4 + 3(x-2)^2 - 10 = 0$

▪ *Ответы (тест)* 1. Целые уравнения

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	*3*	*Нет корней*	*Любое число*	$-\frac{1}{19}$	*0 и* $-\frac{\sqrt{19}}{11}$
Вар.2	*7 и -1*	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	± 2	*2*	*1 и 2*
Вар.3	*0 и 1,5*	*-1 и 1,75*	*0,07*	*-14;* $\frac{29}{15}$ *и 2*	$\pm\frac{1}{3}$
Вар.4	*-3; -1 2 и 4*	*-4; 1;* $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$	*-3; 1;* $-1\pm\sqrt{2}$	*-1,2; 0,4 и 0,5*	*3; 4 и 12*
Вар.5	*-1; 0 и 5*	*-14; -7 и 0*	*-5; -1 и 1*	*-3; -2 и 3*	*3 и 4*
Вар.6	*-3; -2 и 1*	*4 и 5*	*-4 и 2*	$\sqrt{5}-2; -\sqrt{5}-2$	
Вар.7	*-2; 0 и 5*	*-10; -5 и 0*	*-5; -3 и 3*	*-4; -3 и 4*	*0; 4,5 и 9*
Вар.8	*-4; -3 и 2*	*3 и 5*	*-5 и 4*	$\sqrt{2}+2; -\sqrt{2}+2$	

2. Дробно-рациональные уравнения

▪ ***Примеры*** Решите уравнения:

№1. $$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4} = 0.$$

№2. $$\frac{x^4 - 625}{25 - x^2} = -(8x + 90).$$

№3. $$\frac{8x^3 + 27}{4x + 6} = 5x + 21.$$

№4. $$\frac{2x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{(3x - 2)^2}{9x^2 - 4}.$$

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $\frac{y^2-25}{4y+20}=0$

№2. $\frac{x^2-7x+12}{x-3}=0$

№3. $\frac{x^3-8}{2x-4}=12x-18$

№4. $\frac{3x^2+4x-4}{2x^2+5x+2}=\frac{(2x-1)^2}{4x^2-1}$

№5. $\frac{x^2-25}{x^3+4x^2+25}=0$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $\frac{y^2-9}{4y+12}=0$

№2. $\frac{x^2+6x+8}{x+4}=0$

№3. $\frac{x^4-256}{16-x^2}=2(7x+12)$

№4. $\frac{x^2+x-12}{6x^2-10x-24}=\frac{(6x-8)^2}{36x^2-64}$

№5. $\frac{x^2-36}{x^3+5x^2+36}=0$

Вариант 3

Решите уравнения:

№1. $\left(\frac{3}{x}+1\right)^2+6=5\left(\frac{3}{x}+1\right)$

№2. $x^2+x^{-2}-4x-4x^{-1}-3=0$

№3. $\frac{x-1}{x-3}-\frac{3}{x-2}=1$

№4. $\frac{x}{x-2}-\frac{3x-8}{x^2-5x+6}=0$

Вариант 4

Решите уравнения:

№1. $\left(1-\frac{5}{x}\right)^2=\left(1-\frac{5}{x}\right)+2$

№2. $x^2+x^{-2}-5x-5x^{-1}-4=0$

№3. $\frac{x-1}{x-6}-\frac{6}{x-4}=1$

№4. $\frac{x}{x-1}-\frac{4x-5}{x^2-3x+2}=0$

- ***Ответы (тест)*** 2. Дробно-рациональные уравнения

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	*5*	*4*	*20*	*1*	*5*
Вар.2	*3*	*-2*	*-10*	*2,4*	*6*
Вар.3	*1,5 и 3*	$\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$	*5*	*4*	
Вар.4	*-5 и 2,5*	$3\pm2\sqrt{2}$	*16*	*1 и 5*	

Линейные уравнения

✓ *Уравнение вида* $ax+b=0$, *где* a *и* b *- некоторые постоянные, называется* ***линейным уравнением.***

Количество корней линейного уравнения

Один корень	Нет корней	Бесконечное множество корней
$a\neq 0$ *и* b *- любое число*	$a=0$ *и* $b\neq 0$	$a=0$ *и* $b=0$
$x=-\dfrac{b}{a}$	$0\cdot x=-b$ $x\in\varnothing$	$0\cdot x=0$ $x\in\mathbb{R}$

Квадратные уравнения

✓ *Уравнение вида* $ax^2+bx+c=0$, *где* $a,\ b,\ c-$ *некоторые числа* $(a\neq 0)$, *называется* ***квадратным уравнением.***

Способы решения квадратного уравнения.

Для любых коэффициентов	Для четного коэффициента перед x	Формулы Виета	Неполное квадратное уравнение: $c=0$	Неполное квадратное уравнение: $b=0$
Дискриминант: $D=b^2-4ac$ Если $D>0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_{1,\,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ Если $D=0$, то уравнение имеет два совпадающих решения: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$. Если $D<0$, то уравнение не имеет корней $x\in\varnothing$.	Дискриминант: $\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac$ Формула корней: $x_{1,\,2}=\dfrac{-\dfrac{b}{2}\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$	$D>0$ и $x_1,\ x_2-$ корни уравнения $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$ Если $a=1$, то уравнение называется приведенным, тогда $x_1+x_2=-b$ $x_1\cdot x_2=c$ Если $a+b+c=0$, то $x_1=1$, а $x_2=\dfrac{c}{a}$.	$ax^2+bx=0$ $x(ax+b)=0$ $x_1=0$ $x_2=-\dfrac{b}{a}$	$ax^2+c=0$ $ax^2=-c$ $x^2=-\dfrac{c}{a}$ Если $-\dfrac{c}{a}>0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ Если $-\dfrac{c}{a}=0$, уравнение имеет один корень $x=0$; Если $-\dfrac{c}{a}<0$, то уравнение не имеет корней $x\in\varnothing$

Дробно-рациональные уравнения

- *Если одна часть уравнения - целое выражение, а другая - дробно-рациональное или обе части - дробно-рациональные выражения, то такое уравнение называют* ***дробно-рациональным*** *уравнением.*

- ***Алгоритм** решения дробно-рационального уравнения:*
  1. *Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;*
  2. *Решить получившееся целое уравнение;*
  3. *Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей.*

- *Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.*
  ОДЗ - область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.

- *Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.*

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

Формулы сокращенного умножения (ФСУ)

1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ *разность квадратов*
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ *квадрат разности*
3. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ *квадрат суммы*
4. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ *разность кубов*
5. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ *сумма кубов*
6. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ *куб суммы*
7. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ *куб разности*

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, *где* x_1 *и* x_2 *- корни квадратного трехчлена*