Тема: Перпендикуляр и наклонные

10 класс

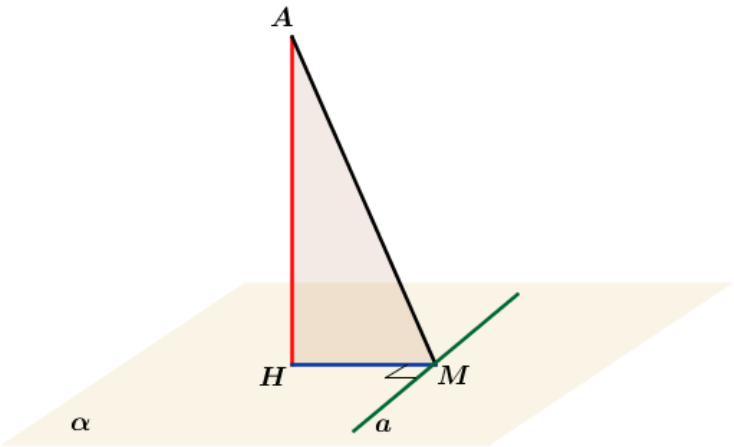
Стереометрия

➢ *Задача*

На стене комнаты расположена точка K, а в плоскости пола – прямая. Придумайте способ, с помощью которого можно определить расстояние от точки K до прямой.

➢ *Теорема о трех перпендикулярах*

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



Дано: $AH \perp \alpha,\ \ a \subset \alpha,\ \ a \perp HM$

$HM -$ проекция наклонной AM.

Док-ть: $a \perp AM$.

Док-во:

$AH \perp \alpha \Rightarrow AH \perp a$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости).

$\left.\begin{array}{l} a \perp HM \\ a \perp AH \\ AH \cap HM \end{array}\right| \Rightarrow a \perp AHM$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости),

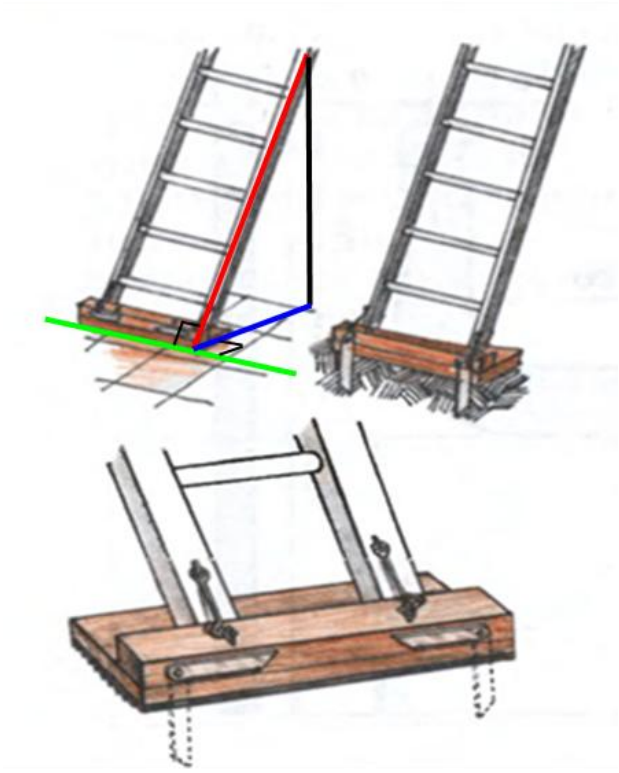
тогда $a \perp AM$ (по определению).

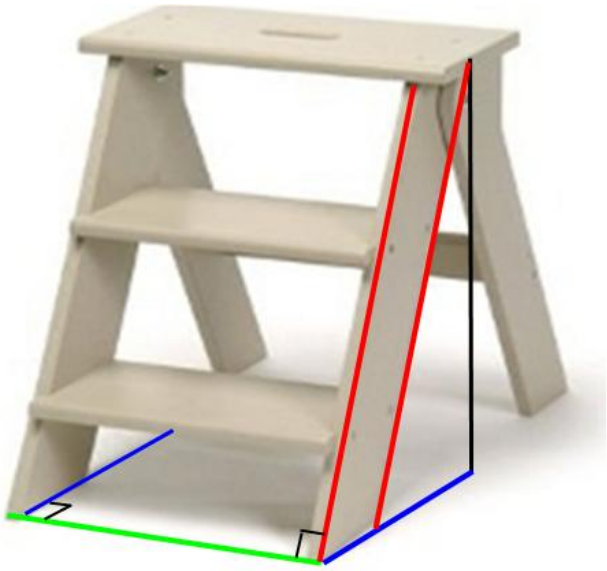
Ч.т.д.

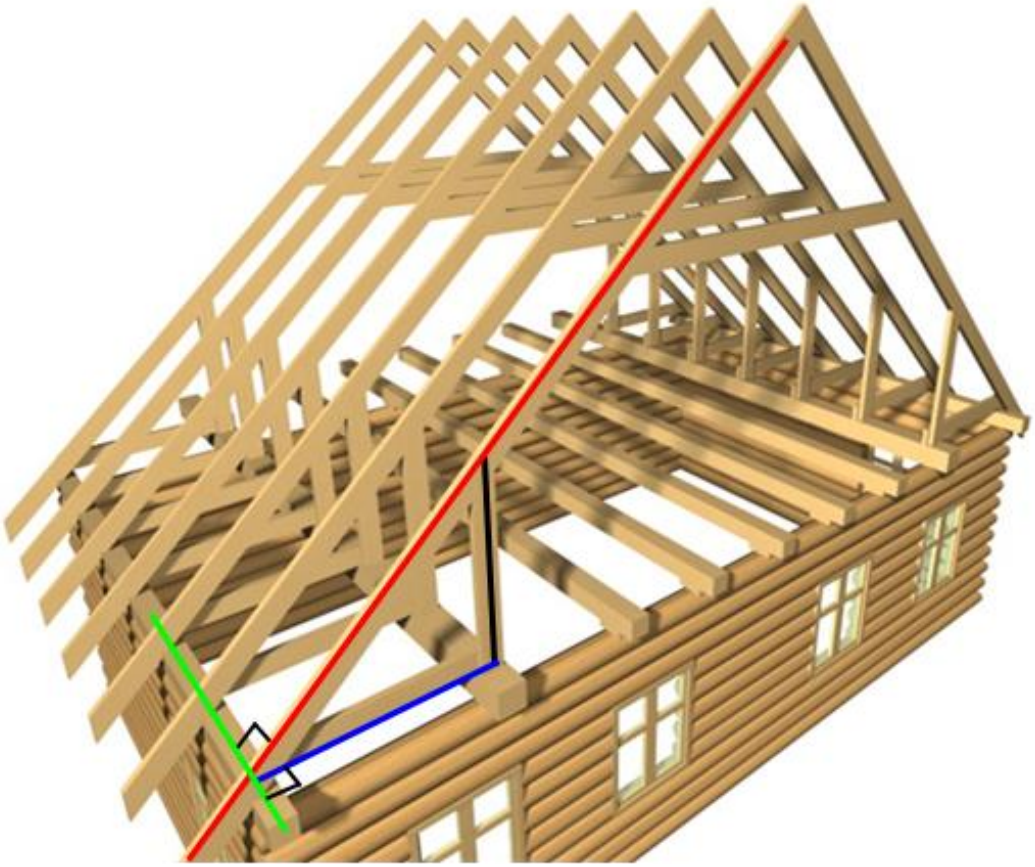
➢ *Обратная теорема*

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

- *Теорема о трех перпендикулярах в строительстве*



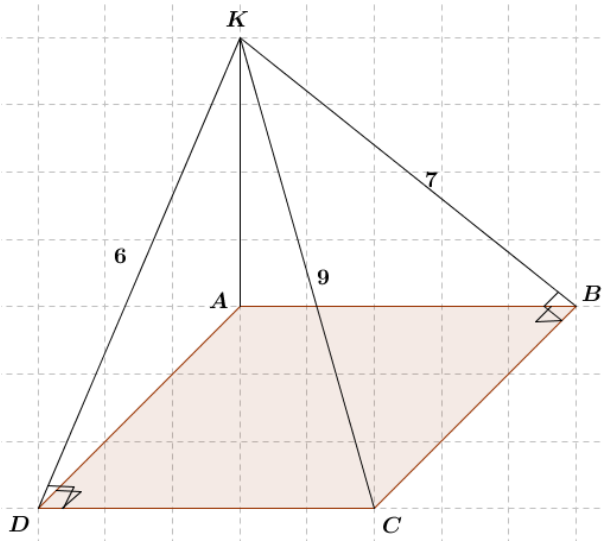




Вантовые мосты

Задача №150

Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что $KD=6,\ KB=7,\ KC=9$. Найдите:
а) расстояние от точки K до плоскости прямоугольника $ABCD$; б) расстояние между прямыми AK и CD.



а) $AK \perp ABC$, $AB-$ проекция наклонной KB, $BC \perp AB$ как стороны прямоугольника, тогда $BC \perp KB$ по теореме о трех перпендикулярах. $\triangle KBC-$ прямоугольный и

$BC=\sqrt{KC^2-KB^2}=\sqrt{9^2-7^2}=4\sqrt{2}$.

$AD=BC=4\sqrt{2}$ и из $\triangle KAD$ $\left(\angle KAD=90^\circ\right)$

$AK=\sqrt{KD^2-AD^2}=\sqrt{6^2-32}=2$.

$\rho\left(K;ABC\right)=KA=2$.

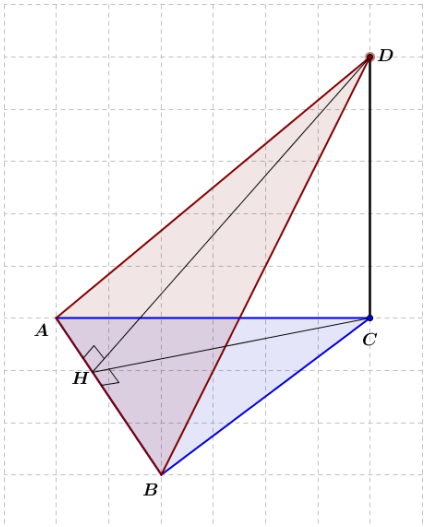
б) $AD \perp DC$ как стороны прямоугольника, $AK \perp AD$, т.к. $AK \perp ABC$, тогда

$\rho\left(AK;CD\right)=AD=4\sqrt{2}$.

Ответ: а) 2; б) $4\sqrt{2}$.

Задача №151

Прямая CD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Докажите, что: а) треугольник ABC является проекцией треугольника ABD на плоскость ABC; б) если $CH-$ высота треугольника ABC, то $DH-$ высота треугольника ABD.

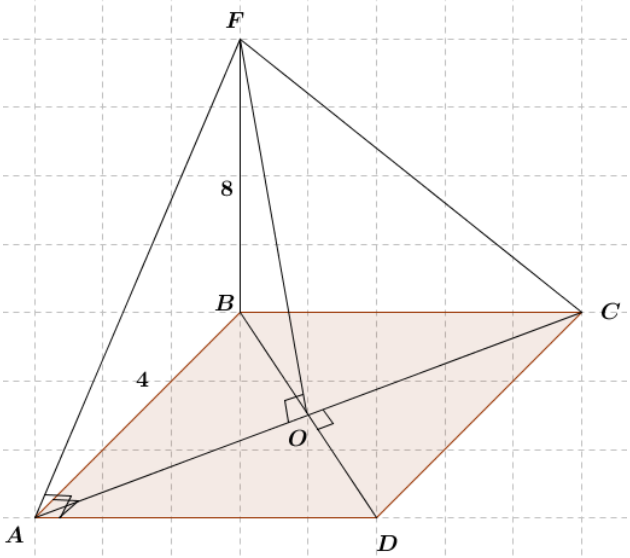


Доказательство:
а) Т.к. $CD \perp ABC$, то при прямоугольном (ортогональном) проецировании каждая точка $\triangle ABD$ имеет свою проекцию на плоскости $\triangle ABC$, поэтому $\triangle ABC$ является проекцией $\triangle ABD$.

б) Проведем $CH \perp AB$, $CH-$ проекция наклонной DH, тогда по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp DH$, значит, $DH-$ высота $\triangle ABD$.

Задача №152

Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BF, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки F до прямых, содержащих стороны и диагонали квадрата, если $BF=8,\ AB=4$.



Решение:

1) $BF \perp ABC \Rightarrow BF \perp AB,\ BF \perp BC$.

$\rho(F;AB)=\rho(F;BC)=FB=8$

2) $AB-$ проекция наклонной AF и $AB \perp AD$ как стороны квадрата, тогда $AF \perp AD$ по т. о 3-х перпендикулярах.

$\rho(F;AD)=AF$, но т.к. $AB=BC$, то $AF=FC$ и $\rho(F;CD)=FC$.

Из $\triangle ABF$ $AF=\sqrt{AB^2+FB^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$.

3) $\rho(F;BD)=FB=8$

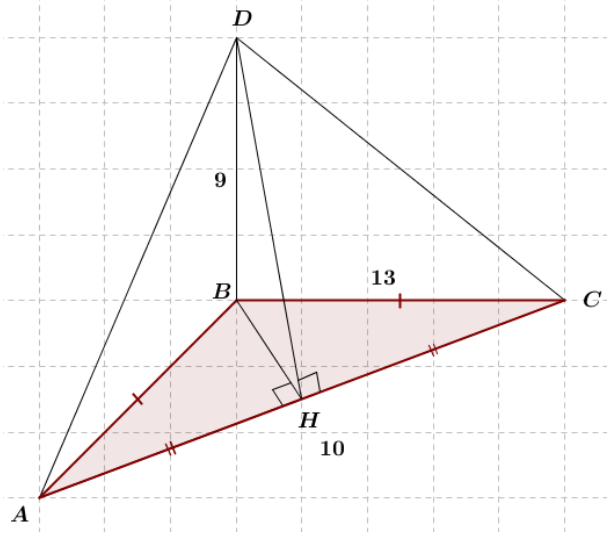
$\rho(F;AC)=FO$, т.к. $AO \perp FO$ по т. о 3-х перпендикулярах: $AC \perp BD$ как диагонали квадрата и $BO-$ проекция наклонной FO.

Из $\triangle FBO$ $FO=\sqrt{FB^2+BO^2}=\sqrt{8^2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2}=6\sqrt{2}$

Ответ: 8; 8; $4\sqrt{5}$; $4\sqrt{5}$; *8;* $6\sqrt{2}$.

Задача №154

Прямая BD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Известно, что $BD=9,\ AC=10,\ BC=BA=13$. Найдите: а) расстояние от точки D до прямой AC; б) площадь треугольника ACD.



Решение:

а) Проведем $BH \perp AC$ и т.к. $\triangle ABC-$ равнобедренный, с основанием AC, то $BH-$ высота и медиана, значит, $AH=HC=5$.

В $\triangle BHC$ $BH=\sqrt{BC^2-HC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

$BH-$ проекция наклонной DH и $AC \perp BH \Rightarrow AC \perp DH$ по т. о 3-х перпендикулярах.

$\rho(D;AC)=DH$.

$BD \perp ABC \Rightarrow BD \perp BH$, тогда в $\triangle DBH$

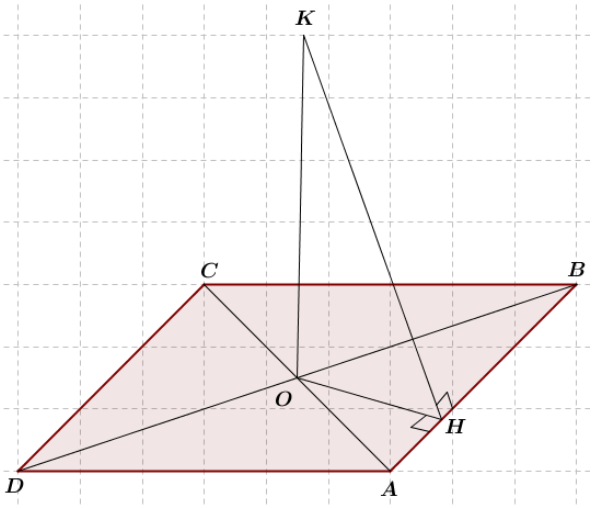
$DH=\sqrt{BD^2+BH^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15$.

б) $S_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot DH\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15=75$.

Ответ: а) 15; б) 75.

Задача №157

Прямая OK перпендикулярна к плоскости ромба $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. а) Докажите, что расстояние от точки K до всех прямых, содержащих стороны ромба, равны. б) Найдите это расстояние, если $OK = 4{,}5$, $AC = 6$, $BD = 8$.



Решение:

а) Проведем $OH \perp AB$, $OH -$ проекция наклонной KH, тогда $KH \perp AB$ по т. о 3-х перпендикулярах, значит, $KH -$ расстояние от точки K до прямой AC.

В ромбе точка пересечения диагоналей - центр вписанной окружности и она равноудалена от всех сторон ромба, тогда и точка K равноудалена от всех сторон ромба.

б) $\triangle AOB -$ прямоугольный и $AO = \frac{6}{2} = 3$, $OB = \frac{8}{2} = 4$,

$AB = 5$. $OH = \frac{AO \cdot OB}{AB} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4$.

$\triangle KOH -$ прямоугольный и

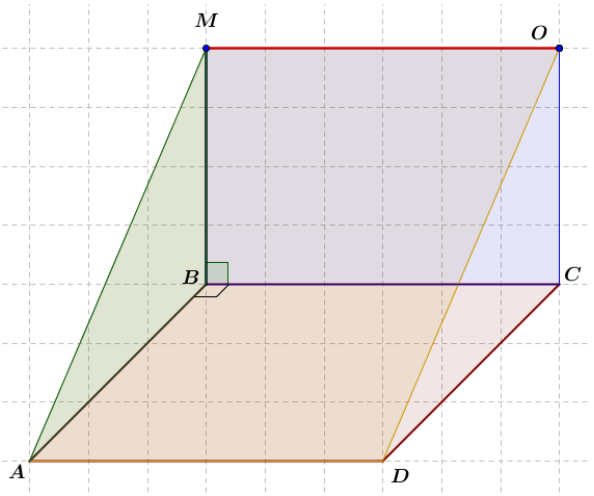
$KH = \sqrt{KO^2 + OH^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}4^2} = 3\sqrt{1{,}5^2 + 0{,}8^2} =$

$= 3 \cdot 1{,}7 = 5{,}1$

Ответ: 5,1.

Задача №159

Прямая BM перпендикулярна к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая, по которой пересекаются плоскости ADM и BCM, перпендикулярна к плоскости ABM.



Решение:

1) $AD \parallel BCM$, т.к. $AD \parallel BC$ как стороны прямоугольника.

$$\left.\begin{array}{l} AD \in ADM \\ AD \parallel BCM \\ ADM \cap BCM = MO \end{array}\right| \Rightarrow MO \parallel AD$$ по следствию из признака параллельности прямой и плоскости.

2) $BC \perp ABM$, т.к. $BC \perp AB$ и $BC \perp MB$.

$AD \parallel BC$, $AD \parallel MO \Rightarrow MO \parallel BC$, тогда $MO \perp ABM$.