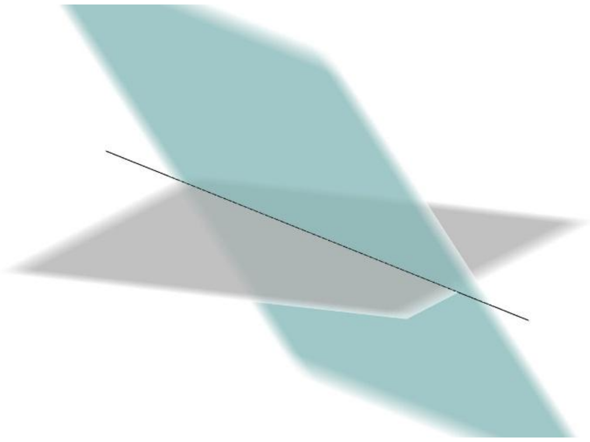
➢ *Возможные случаи расположения двух плоскостей:*

а) две плоскости *пересекаются* по прямой

$$\alpha \cap \beta = c$$



б) плоскости не имеют общих точек

$$\alpha \parallel \beta$$

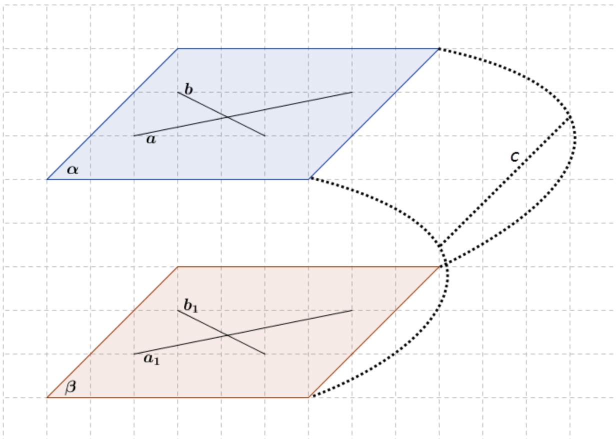
➢ *Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.*

Параллельно-раздвижная система раскрытия дверей и окон.

➢ *Признак параллельности двух плоскостей*

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

$$\left.\begin{array}{l} a\cap b\in\alpha \\ a\parallel a_1,\ b\parallel b_1 \\ a_1\cap b_1\in\beta \end{array}\right|\Rightarrow \alpha\parallel\beta$$



Дано: $a\cap b,\ a\in\alpha,\ b\in\alpha$;

$a\parallel a_1,\ b\parallel b_1,\ a_1\in\beta,\ b_1\in\beta$.

Доказать: $\alpha\parallel\beta$.

Доказательство:

1) $\left.\begin{array}{l} a\notin\beta \\ a\parallel a_1 \\ a_1\in\beta \end{array}\right|\Rightarrow a\parallel\beta$ (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Аналогично, $b\parallel\beta$.

Предположим, что α и β не параллельны, тогда $\alpha\cap\beta=c$.

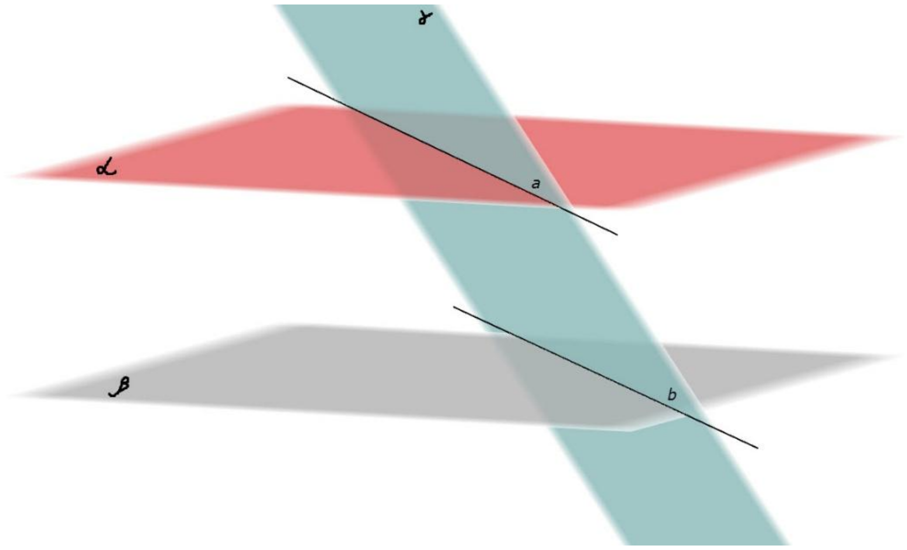
$\left.\begin{array}{l} a\parallel\beta \\ a\in\alpha \\ \alpha\cap\beta=c \end{array}\right|\Rightarrow a\parallel c$ (по следствию из признака параллельности прямой и плоскости).

Аналогично, $b\parallel c$.

Тогда по теореме о трех параллельных прямых: $\left.\begin{array}{l} a\parallel c \\ b\parallel c \end{array}\right|\Rightarrow a\parallel b$, что противоречит условию $a\cap b$. Значит, предположение, что α и β не параллельны неверно, следовательно, $\alpha\parallel\beta$.

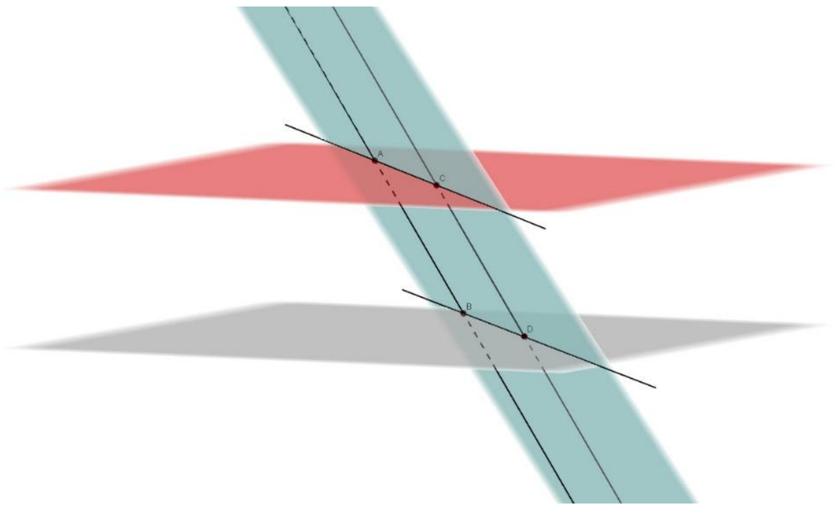
- *Свойства параллельных плоскостей*

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.



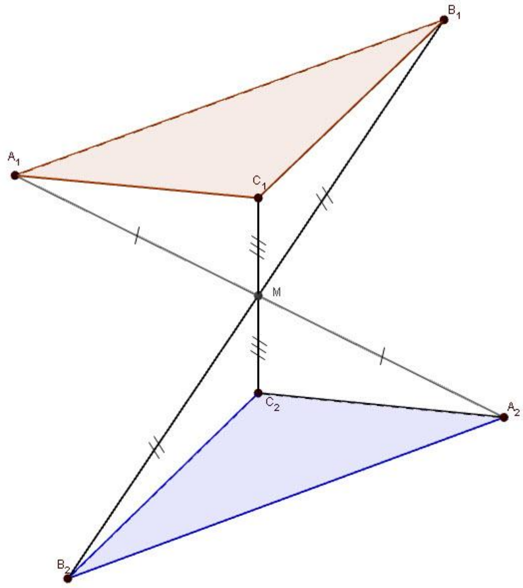
$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b\end{array}\right| \Rightarrow a \parallel b$$

2. Отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, равны



Задача №53

Три отрезка A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны.



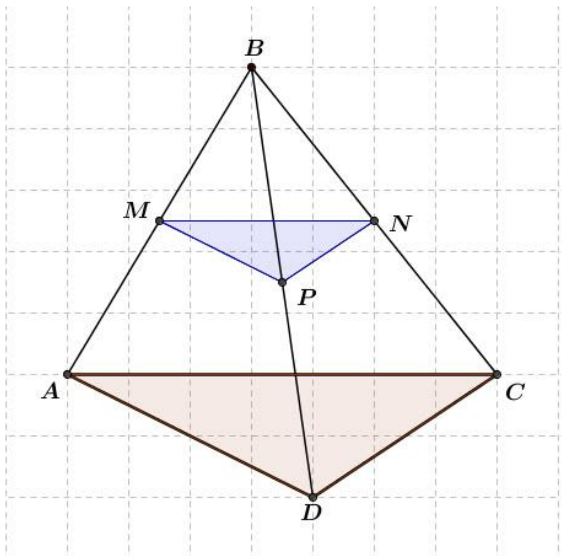
Решение:

1) $A_1A_2 \cap B_1B_2 \Rightarrow \exists(A_1A_2B_1)$ и в этой плоскости $\triangle A_1MB_1 = \triangle A_2MB_2$ по двум сторонам и углу между ними.
Следовательно, $\angle A_1 = \angle A_2$ и они накрест лежащие при прямых A_1B_1 и A_2B_2 и секущей A_1A_2. Значит $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.
Аналогично, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

2)
$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 \cap B_1C_1 \in (A_1B_1C_1) \\ A_1B_1 \parallel A_2B_2,\ C_1B_1 \parallel C_2B_2 \\ A_2B_2 \cap B_2C_2 \in (A_2B_2C_2) \end{array}\right| \Rightarrow (A_1B_1C_1) \parallel (A_2B_2C_2)$$

Задача №54

Точка B не лежит в плоскости треугольника ADC, точки M, N и P - середины отрезков BA, BC и BD соответственно.
а) Докажите, что плоскости MNP и ADC параллельны;
б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ADC равна 48 $см^2$.



Дано: $B \notin (ADC)$,
$AM = MB,\ BN = NC,\ DP = PB$.
Доказать:
а) $(MNP) \parallel (ADC)$;
б) $S_{MNP} = ?$, если $S_{ADC} = 48\ см^2$.
Доказательство:
а) $\triangle ABD,\ MP \parallel AD,\ MP = \frac{1}{2}AD$ (как средняя линия). Аналогично, $PN \parallel DC,\ PN = \frac{1}{2}DC$.

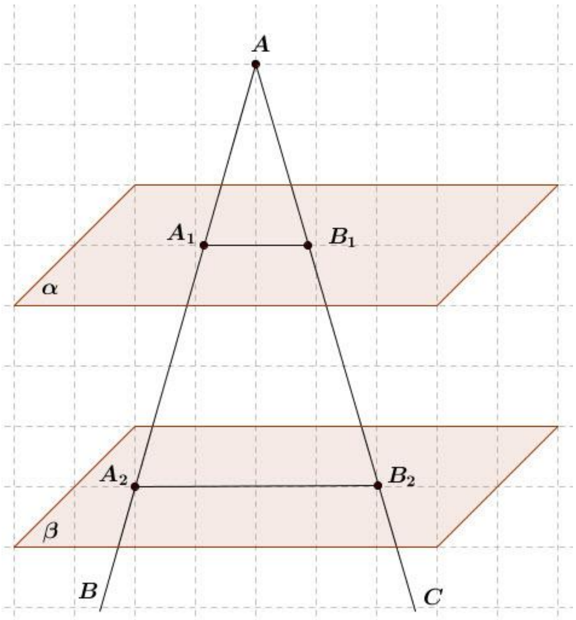
$$\left.\begin{array}{l} MP \cap PN \in (MPN) \\ MP \parallel AD,\ PN \parallel DC \\ AD \cap DC \in (ADC) \end{array}\right| \Rightarrow (MPN) \parallel (ADC)$$

б) $\frac{AD}{MP} = \frac{DC}{PN} = \frac{AC}{MN} = 2 = k$.
Следовательно, $\triangle MPN \sim \triangle ADC$.
Тогда $\frac{S_{ADC}}{S_{MPN}} = k^2 = 4;\ \frac{48}{S_{MPN}} = 4;\ S_{MPN} = 12$

Задача №63

Параллельные плоскости α *и* β *пересекают сторону* AB *угла* BAC *соответственно в точках* A_1 *и* A_2*, а сторону* AC *этого угла - соответственно в точках* B_1 *и* B_2*. Найдите:*

б) A_2B_2 *и* AA_2*, если* $A_1B_1 = 18$ *см,* $AA_1 = 24$ *см,* $AA_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$.



Решение:

1) Из свойства параллельности плоскостей

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ (ABC) \cap \alpha = A_1B_1 \\ (ABC) \cap \beta = A_2B_2 \end{array}\right| \Rightarrow A_1B_1 \parallel A_2B_2$$

2) В плоскости ABC $\triangle A_1AB_1 \sim \triangle A_2AB_2$ (по двум углам). Следовательно, $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AB_1}{AB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$.

$$AA_1 = AA_2 - A_1A_2;\ 24 = \frac{3}{2}A_1A_2 - A_1A_2;\ A_1A_2 = 48;\ AA_2 = 72$$

$$\frac{24}{72} = \frac{18}{A_2B_2};\ A_2B_2 = 54$$

Ответ: $A_2B_2 = 54$ и $AA_2 = 72$.