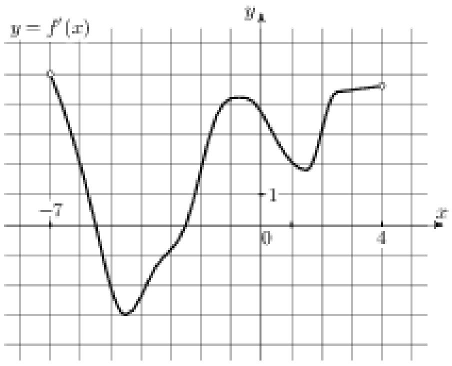
Исследование функции с помощью производной

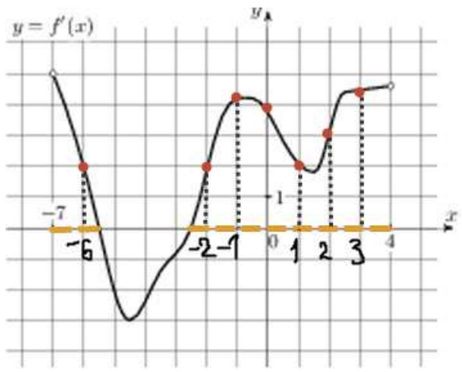
№1. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;4)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Выделим промежутки, где производная положительна, там функция будет возрастать.

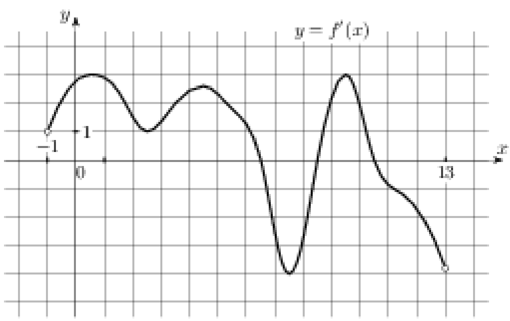
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \nearrow$

$-6 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = -3$



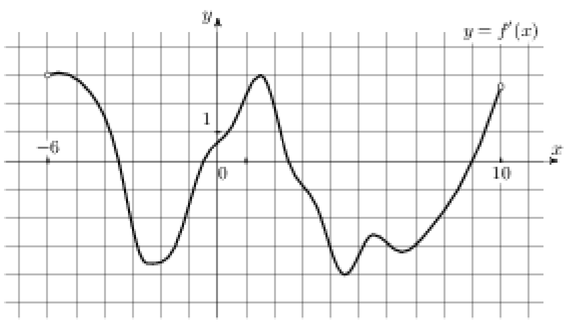
Ответ: -3.

№2. На рисунке изображен график $y = f'(x)$– производной функции $f(x)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



а) На интервале $(-1;13)$

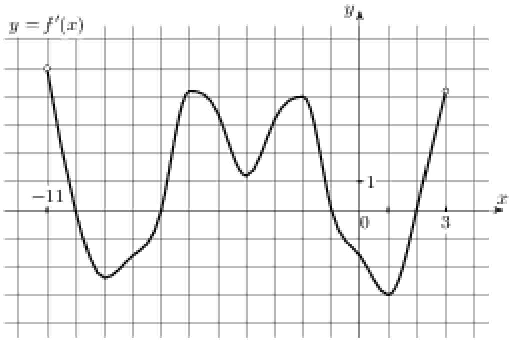
Ответ: 40.



б) на интервале $(-6;10)$

Ответ: -6.

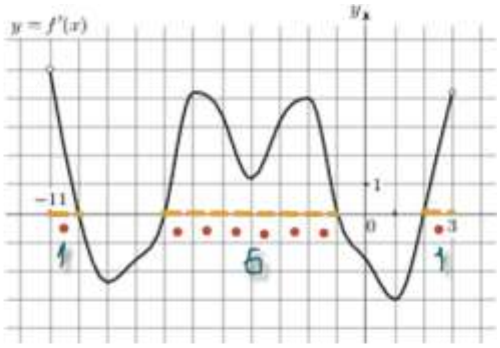
№3. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11;3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Выделим промежутки, где производная положительна, там функция будет возрастать.

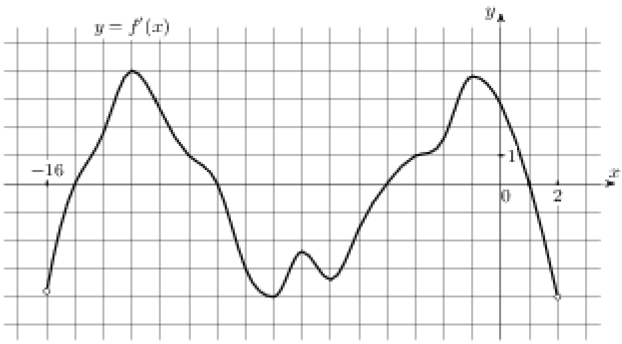
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \nearrow$

Длина наибольшего промежутка возрастания: 6.



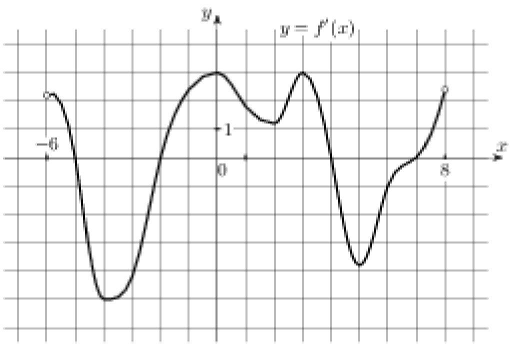
Ответ: 6.

№3а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-16;2)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



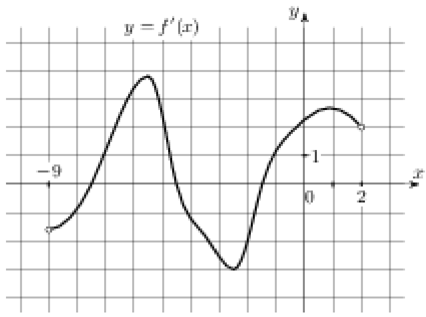
Ответ: 5.

№3б. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;8)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 6.

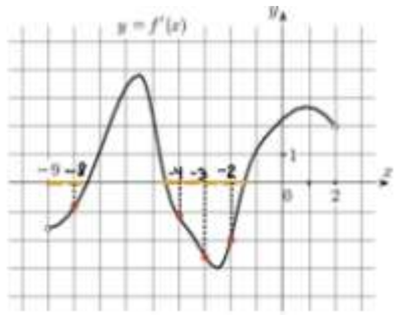
№4. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;2)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Выделим промежутки, где производная отрицательна, там функция будет убывать.

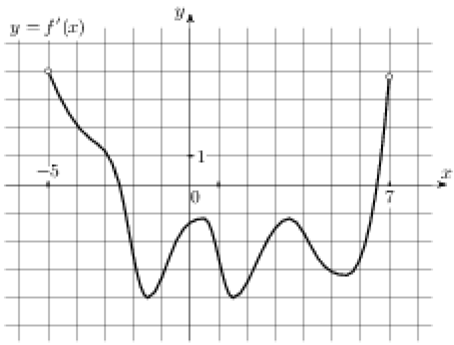
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) \searrow$

$-8-4-3-2=-17$.



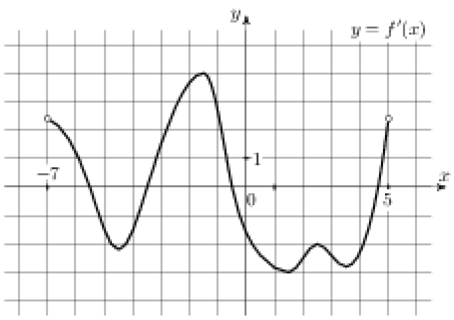
Ответ: -17.

№5. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



а) на интервале $(-5;7)$

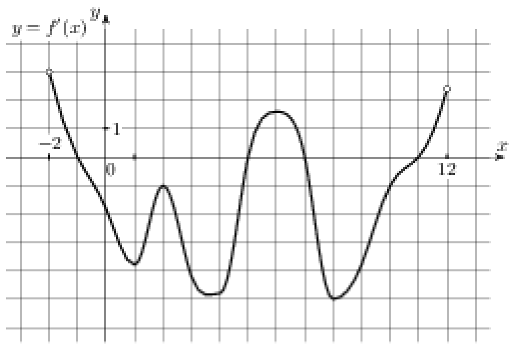
Ответ: 18.



б) на интервале $(-7;5)$

Ответ: 1.

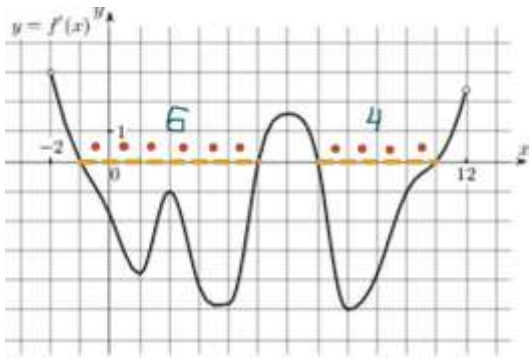
№6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Выделим промежутки, где производная отрицательна, там функция будет убывать.

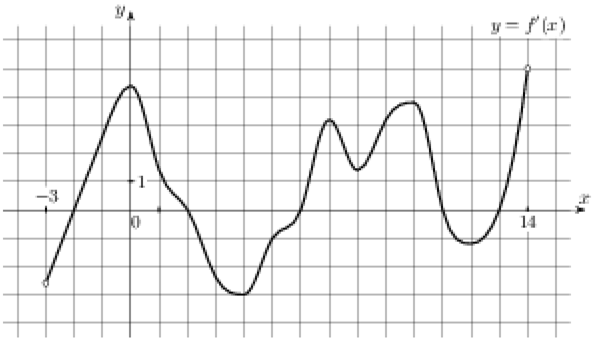
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) \searrow$

Длина наибольшего промежутка убывания: 6.



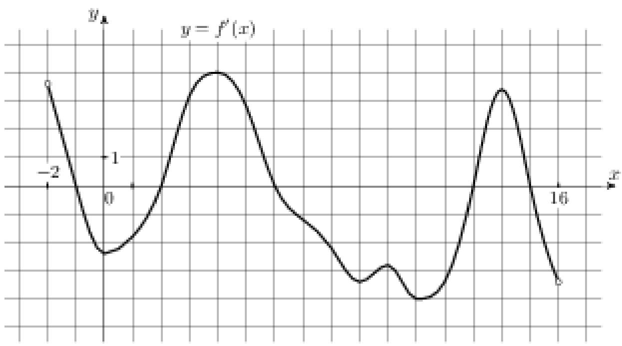
Ответ: 6.

№6а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3;14)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



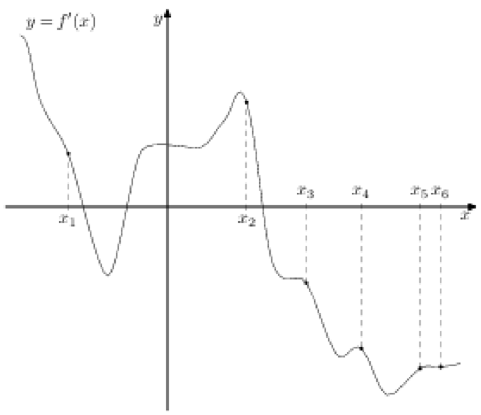
Ответ: 4.

№6б. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;16)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 7.

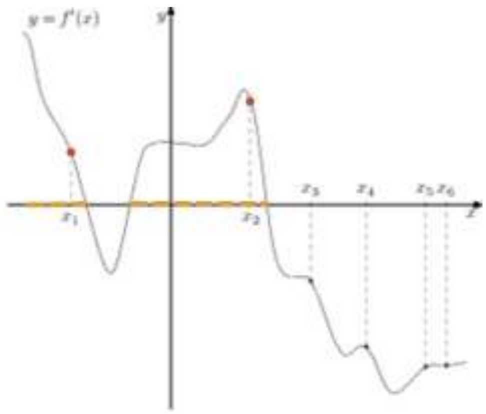
№7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, ..., x_6$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



Выделим промежутки, где производная положительна, там функция будет возрастать.

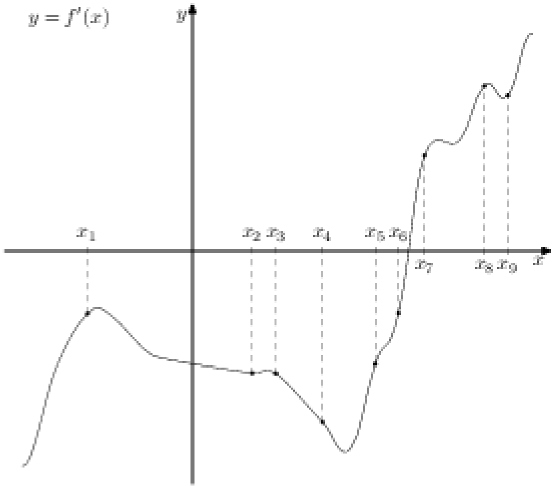
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \nearrow$

В двух точках x_1, x_2 - функция возрастает.



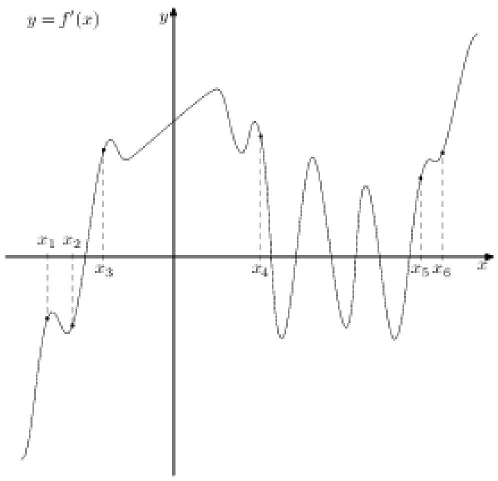
Ответ: 2.

№7а. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ **производной функции** $f(x)$ **и девять точек на оси абсцисс:** $x_1, x_2, ..., x_9$**. В скольких из этих точек функция** $f(x)$ **возрастает?**



Ответ: 3

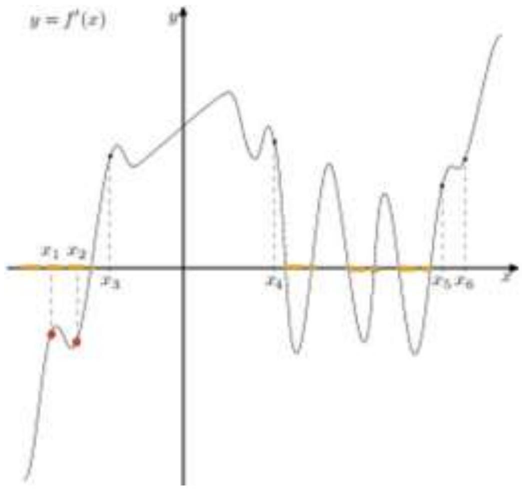
№8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ **производной функции** $f(x)$ **и шесть точек на оси абсцисс:** $x_1, x_2, ..., x_6$**. В скольких из этих точек функция** $f(x)$ **убывает?**



Выделим промежутки, где производная отрицательна, там функция будет убывать.

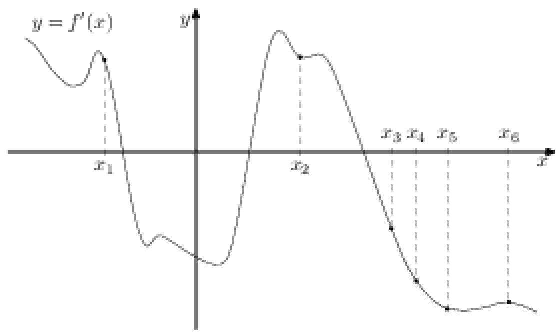
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) \searrow$

В двух точках x_1, x_2 *- функция убывает.*



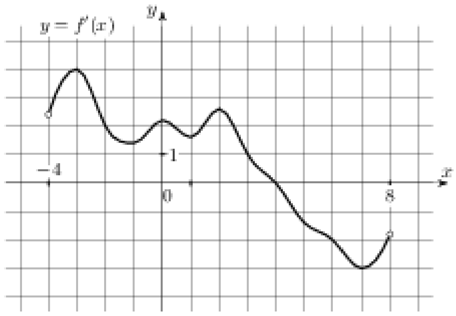
Ответ: 2.

№8а. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ **производной функции** $f(x)$ **и шесть точек на оси абсцисс:** $x_1, x_2, ..., x_6$**. В скольких из этих точек функция** $f(x)$ **убывает?**

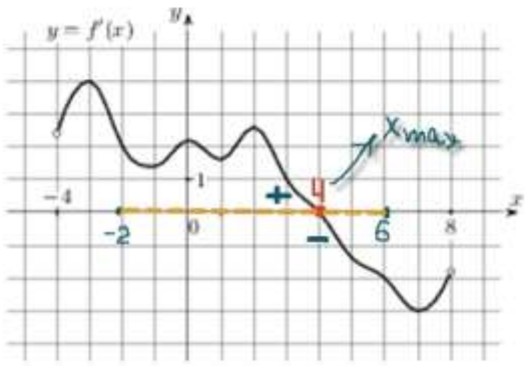


Ответ: 4.

№9. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4;8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку$[-2;6]$.

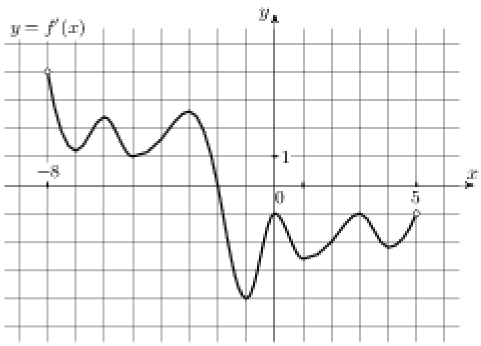


$f'(x_0) = 0$ в точке $x_0 = 4$. Проходя через нее, производная меняет свой знак с «+» на «-». Выполняются необходимое и достаточное условия существования экстремума - максимума функции. Точка экстремума: 4.



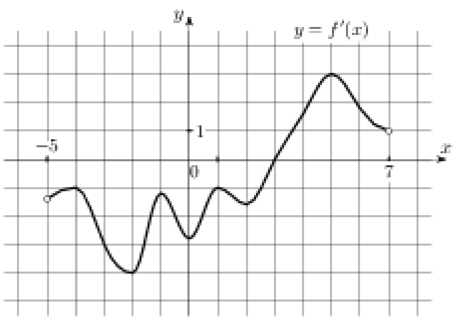
Ответ: 4.

№9а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;5)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-7;0]$.



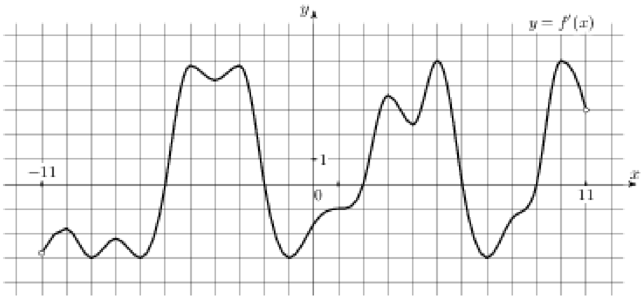
Ответ: -2.

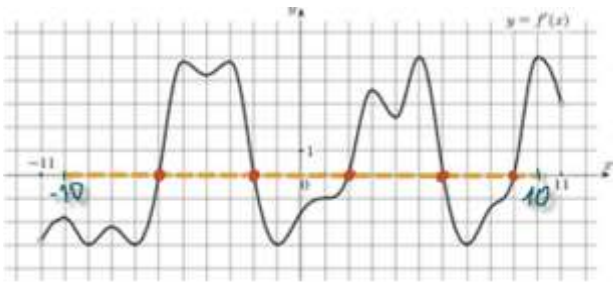
№9б. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-1;4]$.



Ответ: 3.

№10. На рисунке изображен график $y = f^{'}(x)$**— производной функции** $f(x)$**, определенной на интервале** $(-11;11)$**. Найдите количество точек экстремума функции** $f(x)$**, принадлежащих отрезку** $[-10;10]$**.**

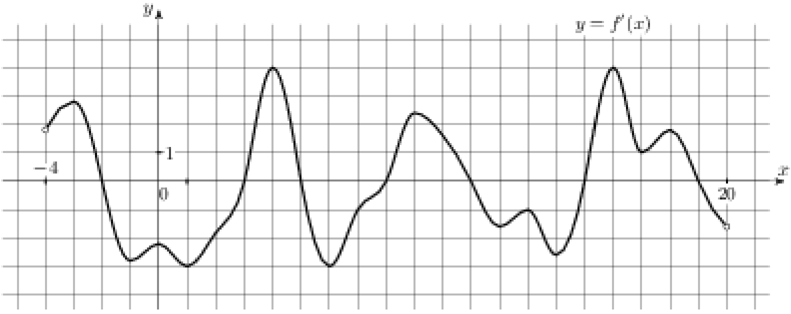




Во всех точках, где $f^{'}(x_0) = 0$ *, проходя через них, производная меняет свой знак. Выполняются необходимое и достаточное условия существования экстремумов. Таких точек: 5.*

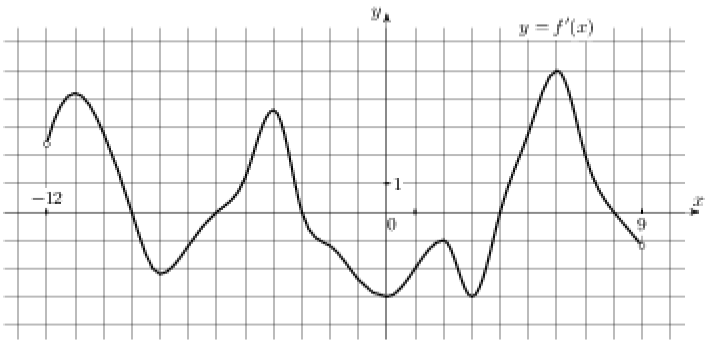
Ответ: 5.

№10а. На рисунке изображен график $y = f^{'}(x)$**— производной функции** $f(x)$**, определенной на интервале** $(-4;20)$**. Найдите количество точек экстремума функции** $f(x)$**, принадлежащих отрезку** $[0;18]$**.**



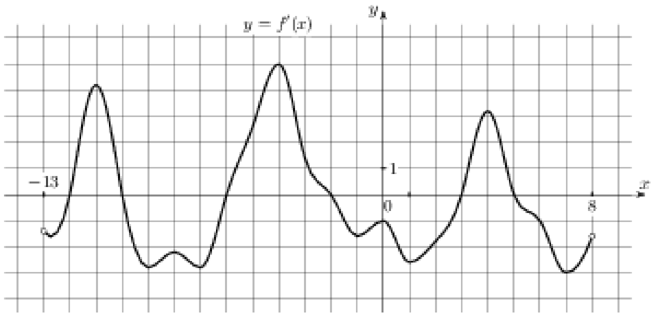
Ответ: 5.

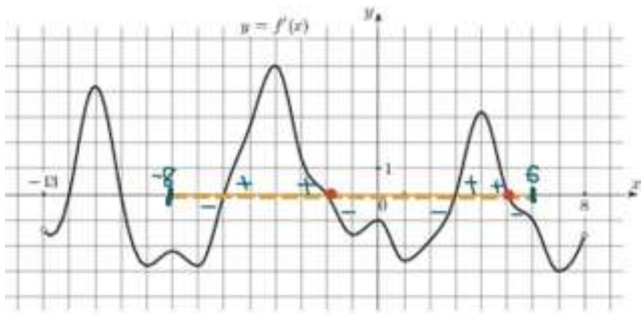
№10б. На рисунке изображен график $y = f^{'}(x)$**— производной функции** $f(x)$**, определенной на интервале** $(-12;9)$**. Найдите количество точек экстремума функции** $f(x)$**, принадлежащих отрезку** $[-11;5]$**.**



Ответ: 4.

№11. На рисунке изображен график $y = f'(x)$**— производной функции** $f(x)$**, определенной на интервале** $(-13;9)$**. Найдите количество точек максимума функции** $f(x)$**, принадлежащих отрезку** $[-8;6]$**.**

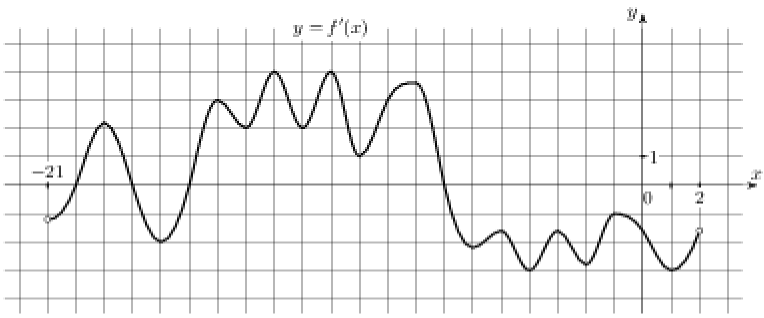




В точках, где $f'(x_0) = 0$ *и проходя через них, производная меняет свой знак с «+» на «-», будут максимумы функции. Таких точек на отрезке* $[-8;6]$ *две.*

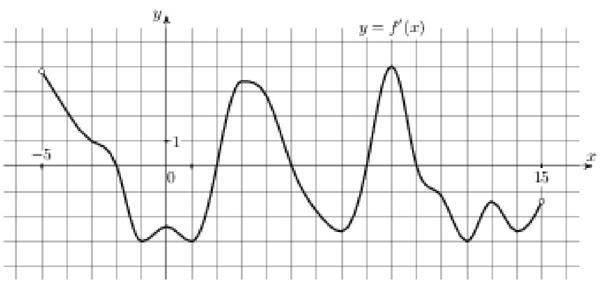
Ответ: 2.

№11а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$**— производной функции** $f(x)$**, определенной на интервале** $(-21;2)$**. Найдите количество точек максимума функции** $f(x)$**, принадлежащих отрезку** $[-19;1]$**.**



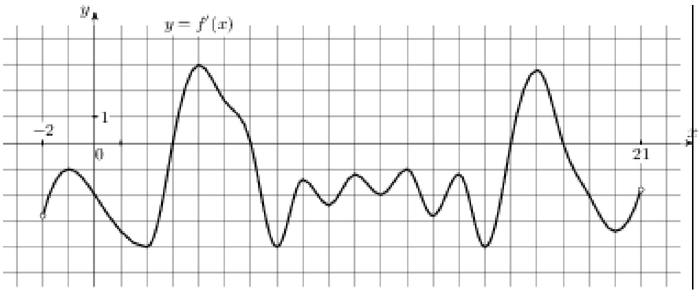
Ответ: 2.

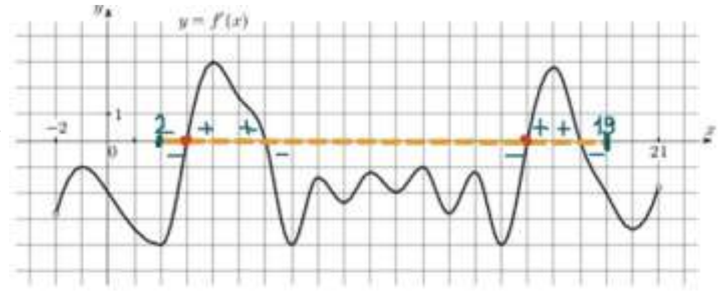
№11б. На рисунке изображен график $y = f'(x)$**— производной функции** $f(x)$**, определенной на интервале** $(-5;15)$**. Найдите количество точек максимума функции** $f(x)$**, принадлежащих отрезку** $[0;14]$**.**



Ответ: 2.

№12. На рисунке изображен график $y=f^{'}(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;21)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[2;19]$.

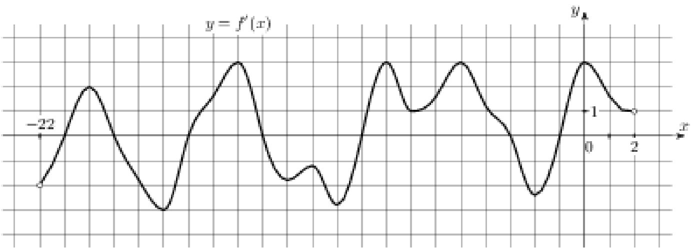




В точках, где $f^{'}(x_0)=0$ и проходя через них, производная меняет свой знак с «-» на «+» будут минимумы функции. Таких точек на отрезке $[2;19]$ две.

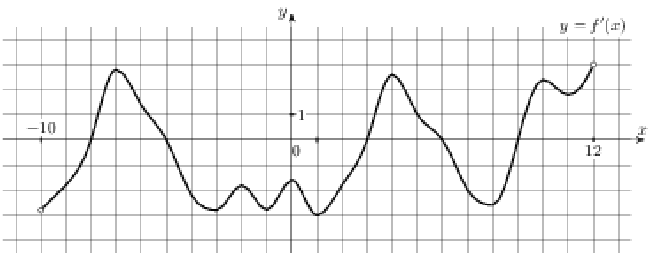
Ответ: 2.

№12а. На рисунке изображен график $y=f^{'}(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-22;2)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17;0]$.



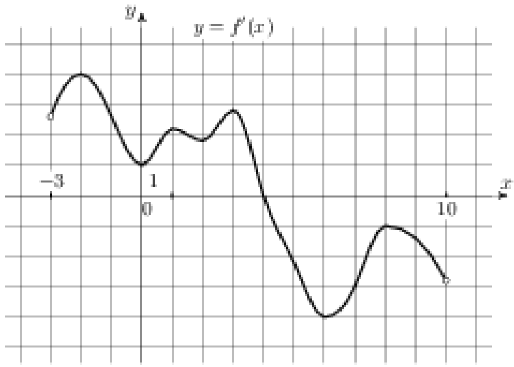
Ответ: 3.

№12б. На рисунке изображен график $y=f^{'}(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;12)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-9;10]$.



Ответ: 3.

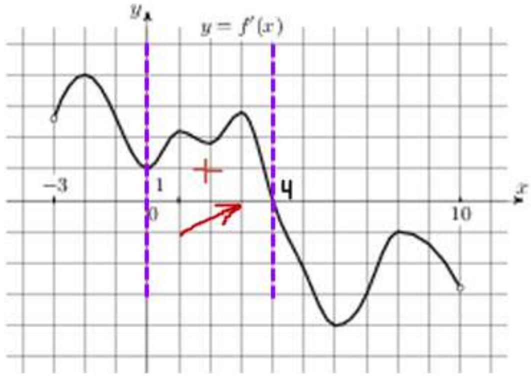
№13. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3;10)$. В какой точке отрезка $[0;4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



$f(x)\nearrow$

$0<4$

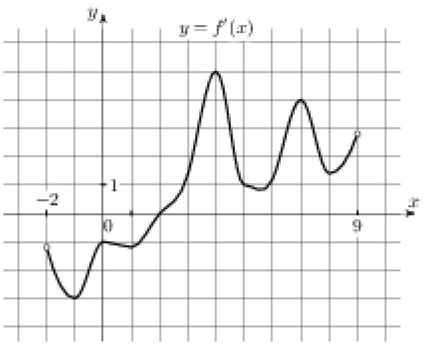
$f(0)<f(4)$



Решение:
Обращаем внимание, что на рисунке изображен график производной функции, поэтому вспоминаем: что если $f'(x)>0$, а на заданном отрезке $[-0;4]$ производная функции не отрицательна, то возрастает на этом отрезке. Согласно определению возрастающей функции: большему значению аргумента соответствует большее значение функции. В задаче просят ответить на вопрос, в какой точке функция принимает наибольшее значение, значит даем значение аргумента $x=4$.

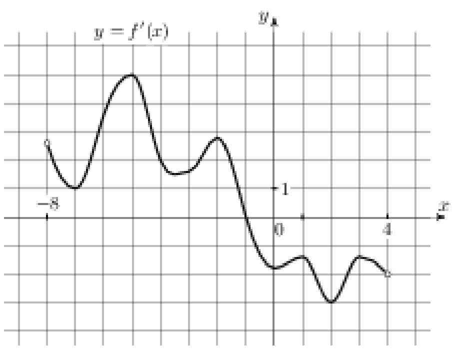
Ответ: 4.

№13а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;9)$. В какой точке отрезка $[2;6]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



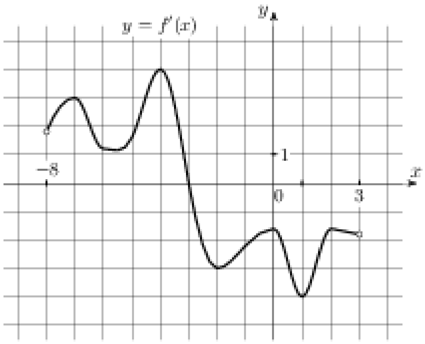
Ответ: 6.

№13б. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;4)$. В какой точке отрезка $[-7;-3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: -7.

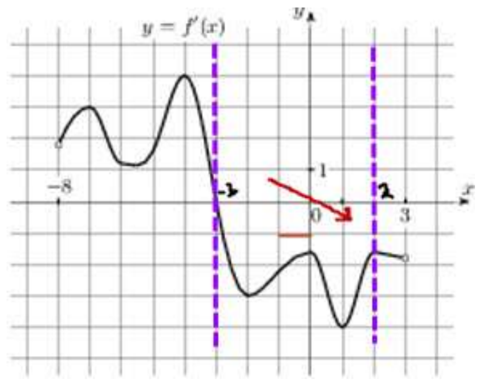
№14. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. В какой точке отрезка $[-3;2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



$f(x)\searrow$

$-3 < 2$

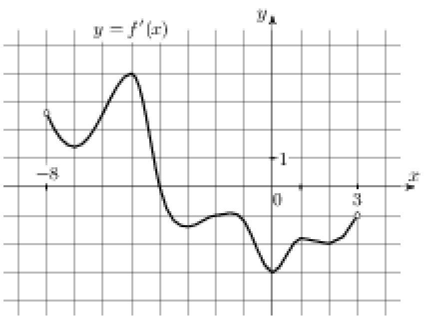
$f(-3) > f(2)$



Решение:
Обращаем внимание, что изображен график производной функции, поэтому вспоминаем, что если $f'(x) < 0$, а на заданном отрезке $[-3;2]$ производная функции не положительна, то убывает на этом отрезке. Согласно определению убывающей функции: меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции. В задаче просят ответить на вопрос, в какой точке функция принимает наибольшее значение, значит в ответ даем значение аргумента $x = -3$.

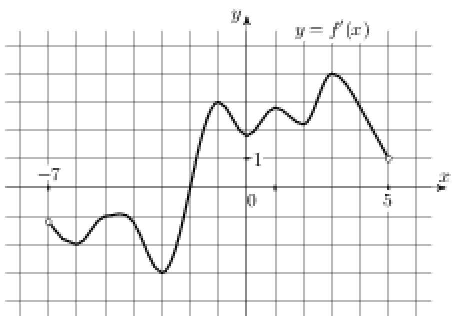
Ответ: -3.

№14а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. В какой точке отрезка $[-4;1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



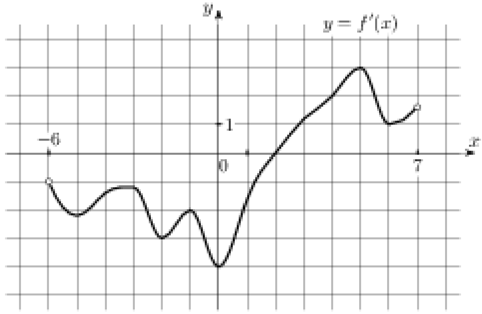
Ответ: -4.

№14б. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;5)$. В какой точке отрезка $[-6;-2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



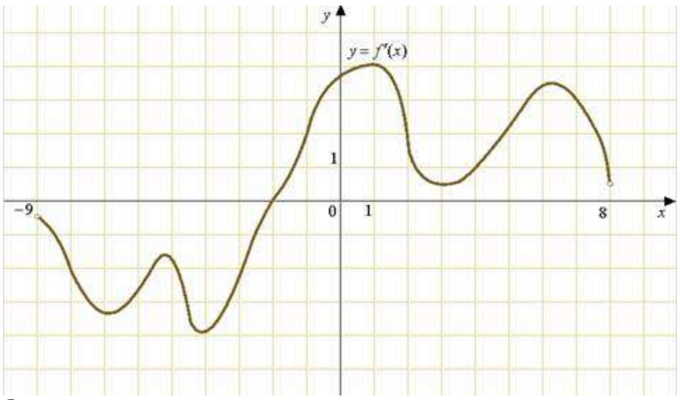
Ответ: -2.

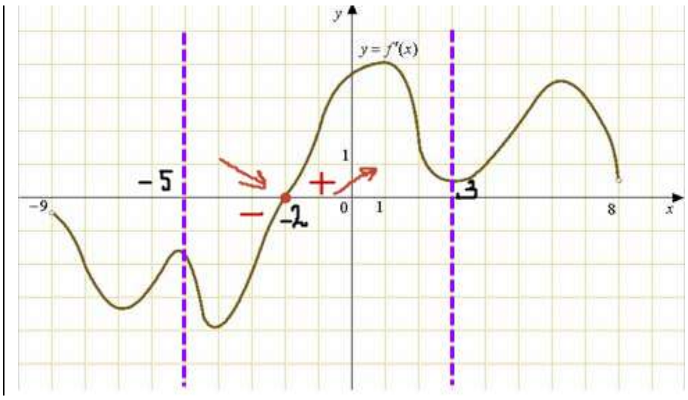
№14в. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;7)$. В какой точке отрезка $[-4;2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: 2.

№15. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. В какой точке отрезка $[-5;3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.



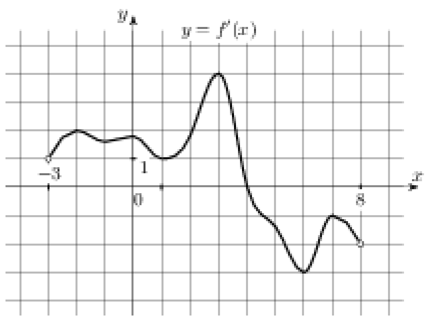


Решение:

На отрезке $[-5;3]$ производная меняет свой знак с « - » на « + » в точке $x = -2$, значит это точка минимума. На заданном отрезке этот минимум единственный, поэтому в нем функция будет принимать наименьшее значение.

Ответ: -2.

№15а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$— производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3;8)$. В какой точке отрезка $[2;6]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: 4.

1. *Физический (механический) смысл производной.* Если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

   $\boxed{v(t) = s'(t).}$

2. *Геометрический смысл производной.* Если к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(x_0)$ выражает угловой коэффициент касательной: $\boxed{f'(x_0) = tg\alpha = k\ .}$

   Для определения углового коэффициента касательной можно применить формулу:

   $\boxed{k = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}$, где $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ - точки на касательной.

3. Если $f'(x) \geq 0$, то $f(x) \nearrow$ возрастает;

   Если $f'(x) \leq 0$, то $f(x) \searrow$ убывает.

4. *Необходимые и достаточные условия существования экстремумов:*

   а) Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует;

   б) Если в окрестности точки $x = x_0$ производная меняет свой знак с «+» на «-», то это точка максимума; если в окрестности точки $x = x_0$ производная меняет свой знак с «-» на «+», то это точка минимума;

$f'(x)$	$+$		$-$		$f'(x)$	$-$		$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	x_{max}	$\searrow$	x	$f(x)$	$\searrow$	x_{min}	$\nearrow$	x

5. Для монотонных функций