

## Ценные бумаги

## ▪ Примеры

- №1. Цена ценной бумаги на конец года вычисляется по формуле  $S = 1,1S_0 + 2000$ , где  $S_0$  – цена этой ценной бумаги на начало года в рублях. Максим хочет приобрести ценную бумагу, а может положить деньги на банковский счет, на котором сумма увеличивается за год на 12%. В начале любого года Максим может продать бумагу и положить все вырученные деньги на банковский счет, а также снять деньги с банковского счета и купить ценную бумагу. Какая наибольшая сумма может быть у Максима через четыре года? Ответ дайте в рублях.
- 
- №2. В начале 2001 года Алексей приобрел ценную бумагу за 11 тыс. рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 4 тыс. рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?
- 
- №3. Сергей хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года этот пакет стоил 160 000 рублей. В середине каждого месяца, начиная с января, Сергей откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму. В конце каждого месяца пакет дорожает, но не более чем на 25%. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Сергею каждый месяц, чтобы через некоторое время накопленных денег хватило на покупку желаемого пакета акций?
- 
- №4. Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года  $t$  становится равной  $t^2$  тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго – 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?
- 
- №5. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тыс. руб. в конце года  $t$  ( $t = 1; 2; \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в  $1 + r$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

## ▪ Решение (примеры)

## Ценные бумаги

- №1. Цена ценной бумаги на конец года вычисляется по формуле  $S = 1,1S_0 + 2000$ , где  $S_0$  – цена этой ценной бумаги на начало года в рублях. Максим хочет приобрести ценную бумагу, а может положить деньги на банковский счет, на котором сумма увеличивается за год на 12%. В начале любого года Максим может продать бумагу и положить все вырученные деньги на банковский счет, а также снять деньги с банковского счета и купить ценную бумагу. Какая наибольшая сумма может быть у Максима через четыре года? Ответ дайте в рублях.

Решение:

$$1) 1,1 \cdot 80\,000 + 2\,000 = 90\,000$$

$$80\,000 \cdot 1,12 = 89\,600$$

Не продает ценную бумагу, так как банковское наращение меньше.

$$90\,000 > 89\,600$$

$$2) 90\,000 \cdot 1,1 + 2\,000 = 101\,000$$

$$90\,000 \cdot 1,12 = 100\,800$$

Не продает ценную бумагу, так как банковское наращение меньше.

$$101\,000 > 100\,800$$

$$3) 101\,000 \cdot 1,1 + 2\,000 = 113\,100$$

$$101\,000 \cdot 1,12 = 113\,120$$

Продает ценную бумагу и вкладывает деньги в банк под 12% годовых.

$$113\,100 < 113\,120$$

$$4) 113\,120 \cdot 1,12 = 126\,694,4$$

$$113\,120 \cdot 1,1 + 2\,000 = 126\,432$$

$$126\,694,4 > 126\,432$$

нежели Максим снял бы их и купил ценную бумагу.

Ответ: 126 694, 4.

- №2. В начале 2001 года Алексей приобрел ценную бумагу за 11 тыс. рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 4 тыс. рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Решение:

Последовательность чисел, выражающая стоимость ценной бумаги, является арифметической прогрессией, где  $a_1 = 11$ ,  $d = 4$  и  $a_i = a_1 + d(i-1) = 11 + 4(i-1) = 7 + 4i$ , где  $i \in \mathbb{N}$ . Если Алексей продает ценную бумагу и

кладет вырученные деньги в банк, то коэффициент наращения на вложенную сумму равен  $1 + \frac{10}{100} = 1,1$  и в банке он постоянен.

Выясним, как изменяется коэффициент доходности ценной бумаги, если она находится на руках у Алексея.

$$k = \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{7 + 4(i+1)}{7 + 4i} = \frac{11 + 4i}{7 + 4i}. \text{ Заметим, что функция, выражающая коэффициент доходности}$$

$k(x) = 1 + \frac{3}{4x+7}$ , является убывающей при всех  $x \in \mathbb{Z}_+$ . Перекладывать деньги в банк после продажи ценной бумаги имеет смысл, когда коэффициент ее доходности станет меньше банковского коэффициента наращения

$$\frac{11+4i}{7+4i} < 1,1; \quad 1 + \frac{4}{7+4i} < 1,1; \quad \frac{4}{7+4i} < \frac{1}{10}; \quad \frac{i-8\frac{1}{4}}{4i+7} > 0; \quad i > 8,25; \quad i_{\text{нам}} = 9.$$

При  $i = 1$  - это начало 2001 года, при  $i = 9$  - это начало 2009 года. Значит, Алексей должен продать ценную бумагу и положить вырученные деньги в банк в начале 2009 года, чтобы через 15 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей.

Ответ: 2009.

	На руках		Коэффициент	В банке	
	Начало года	Конец года		Начало года	Конец года
2001	11	$11 + 4 = 15$	$\frac{15}{11} \approx 1,36 > 1,1$	11	$11 \cdot 1,1$
2002	15	$15 + 4 = 19$	$\frac{19}{15} \approx 1,26 > 1,1$	15	$15 \cdot 1,1$

№3. Сергей хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года этот пакет стоил 160 000 рублей. В середине каждого месяца, начиная с января, Сергей откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму. В конце каждого месяца пакет дорожает, но не более чем на 25%. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Сергею каждый месяц, чтобы через некоторое время накопленных денег хватило на покупку желаемого пакета акций?

Решение:

Месяц	Стоимость пакета на начало месяца	Откладывает деньги в начале месяца	Стоимость пакета на конец месяца
1	$S$	$1 \cdot X$	$1,25^1 \cdot S$
2	$1,25^1 \cdot S$	$X + X = 2X$	$1,25^2 \cdot S$
3	$1,25^2 \cdot S$	$3X$	$1,25^3 \cdot S$
...	...	...	...
n	$1,25^{n-1} \cdot S$	$n \cdot X$	$1,25^n \cdot S$

Сергей сможет купить пакет акций, если накопленная сумма будет не меньше стоимости пакета акций

$$n \cdot X \geq 1,25^{n-1} \cdot S$$

$$X \geq \frac{1,25^{n-1} \cdot S}{n}$$

Пусть  $a_n = \frac{1,25^{n-1} \cdot S}{n}$  это сумма, которую откладывает Сергей ежемесячно. тогда для приобретения пакета акций необходимо и достаточно, чтобы  $a_{n+1} \geq a_n$ .

$$\frac{1,25^n \cdot S}{n+1} \geq \frac{1,25^{n-1} \cdot S}{n}; \quad 1,25n \geq n+1; \quad n \geq 4; \quad n = 4.$$

$$a_4 = \frac{1,25^3 \cdot 160\,000}{4} = \frac{5^3}{4^3} \cdot 40\,000 = 78125, \quad a_3 = \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 160\,000}{3} \approx 83\,333,3 > a_4,$$

$$a_5 = \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^4 \cdot 160\,000}{5} = \frac{125}{16} \cdot 100\,000 = 78125 = a_4.$$

Ответ: 78 125.

№4. Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года  $t$  становится равной  $t^2$  тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго — 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

Решение:

В конце года  $t$  стоимость акций становится равной  $t^2$  тыс.руб., а в конце  $(t+1)$  года -  $(t+1)^2$  тыс.рублей, где  $t \in \mathbb{N}$ . Если Пенсионный фонд продает акции и кладет вырученные деньги в банк, то коэффициент наращивания на вложенную сумму равен  $1 + \frac{25}{100} = 1,25$  и в банке он постоянен.

Выясним, как изменяется коэффициент доходности акций, если они находятся в Пенсионном фонде.

$k = \frac{(t+1)^2}{t^2}$  (при положительных значениях  $x$  функция  $k(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$  — монотонно убывает).

Перекладывать деньги в банк после продажи акций имеет смысл, когда коэффициент их доходности станет меньше банковского коэффициента наращивания

$$\frac{(t+1)^2}{t^2} < 1,25; \quad t^2 - 8t - 4 > 0; \quad t > 4 + \sqrt{20}; \quad t_{\text{наим}} = 9.$$

Значит, в конце девятого года нужно продать акции и положить деньги в банк, чтобы прибыль была максимальной.

Ответ: 9.

№5. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тыс. руб. в конце года  $t$  ( $t = 1; 2; \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в  $1+r$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

Решение:

В конце года  $t$  стоимость ценных бумаг становится равной  $t^2$  тыс.руб., а в конце  $(t+1)$  года -  $(t+1)^2$  тыс.рублей, где  $t \in \mathbb{N}$ .

Если Пенсионный фонд продает ценные бумаги и кладет вырученные деньги в банк, то коэффициент наращивания на вложенную сумму равен  $1+r$  и в банке он постоянен.

Выясним, как изменяется коэффициент доходности ценных бумаг, если они находятся в Пенсионном фонде.

$k = \frac{(t+1)^2}{t^2}$ . При увеличении  $t$  значение коэффициента уменьшается  $k = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2$  (при положительных

значениях  $x$  функция  $k(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$  — монотонно убывает).

Год $t$	Стоимость $t^2$		Коэффициент доходности	Коэффициент наращивания
	Начало года	конец года		
20		$20^2$		
21	$20^2$	$21^2$	$k_{21} = \frac{21^2}{20^2}$	$k_{21} > (r+1)$
22	$21^2$	$22^2$	$k_{22} = \frac{22^2}{21^2}$	$k_{22} < (r+1)$

На 21 год коэффициент доходности ценных бумаг будет еще больше коэффициента наращивания, а вот на 22 году он становится уже меньше банковского коэффициента  $1+r$ .

$$k_{22} < r + 1 < k_{21}$$

$$\frac{22^2}{21^2} < r + 1 < \frac{21^2}{20^2}$$

$$\frac{484}{441} < r + 1 < \frac{441}{400}$$

$$\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$$

$$\text{Ответ: } \frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}.$$

## Тест Ценные бумаги

№1. Алексей приобрел ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 8%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

№2. Александр хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Александра не было денег на покупку акций, а пакет стоил 100 000 рублей. В середине каждого месяца Александр откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 30%. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Александру каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

№3. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тыс. рублей в конце года  $t$  ( $t=1; 2; \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 20%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

№4. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тыс. руб. в конце года  $t$  ( $t=1; 2; \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в  $1+r$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце девятого года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

■ **Ответы (тест)**      Ценные бумаги

№1	№2	№3	№4
6	54 925	11	$\frac{19}{81} < r < \frac{17}{64}$

■ **Решение (тест)**      Ценные бумаги

№1. Алексей приобрел ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 8%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

*Решение:*

Последовательность чисел, выражающая стоимость ценной бумаги, является арифметической прогрессией, где  $a_1 = 8$ ,  $d = 1$  и  $a_i = a_1 + d(i-1) = 8 + 1(i-1) = 7 + i$ , где  $i \in \mathbb{N}$ . Если Алексей продает ценную бумагу

и кладет вырученные деньги в банк, то коэффициент наращивания на вложенную сумму равен  $1 + \frac{8}{100} = 1,08$

и в банке он постоянен.

Выясним, как изменяется коэффициент доходности ценной бумаги, если она находится на руках у Алексея.

$k = \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{7 + (i+1)}{7 + i} = \frac{8 + i}{7 + i}$ . Заметим, что функция, выражающая коэффициент доходности

$k(x) = 1 + \frac{3}{4x + 7}$ , является убывающей при всех  $x \in \mathbb{Z}_+$ . Перекладывать деньги в банк после продажи

ценной бумаги имеет смысл, когда коэффициент ее доходности станет меньше банковского коэффициента наращивания

$$\frac{8+i}{7+i} < 1,08; \quad 1 + \frac{1}{7+i} < 1,08; \quad \frac{1}{7+i} < \frac{2}{25}; \quad \frac{i-5,5}{i+7} > 0; \quad i > 5,5; \quad i_{\text{наим}} = 6.$$

Значит, Алексей должен продать ценную бумагу и положить вырученные деньги в банк в течении 6-го года, чтобы через 25 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей.

*Ответ:* 6.

№2. Александр хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Александра не было денег на покупку акций, а пакет стоил 100 000 рублей. В середине каждого месяца Александр откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 30%. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Александру каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

*Решение:*

Пусть Александр откладывает в середине каждого месяца  $x$  рублей. К середине  $n$ -го месяца у Александра скопится  $nx$  рублей, а акции будут стоить не более  $100\,000 \cdot 1,3^{n-1}$  рублей. Для того чтобы Александр смог купить пакет акций в этом месяце, необходимо и достаточно откладывать сумму большую либо равную наименьшему из чисел  $a_n$ . Сравним два последовательных таких числа. Для этого вычислим

их отношение:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1,3 \cdot n}{n+1} = \frac{13n}{10n+10}$ . Отсюда получаем, что при  $n < 4$  выполнено  $a_{n+1} \leq a_n$ , а при

$n \geq 4$  выполнено  $a_{n+1} \geq a_n$ .

Значит, наименьшим из чисел  $a_n$  будет число  $a_4 = \frac{100\,000 \cdot 1,3^3}{4} = 54\,925$ . Поэтому наименьшая сумма,

которую нужно откладывать Александру, равна 54 925 рублей.

*Ответ:* 54 925.

№3. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тыс. рублей в конце года  $t$  ( $t=1; 2; \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 20%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

Решение:

В конце года  $t$  стоимость акций становится равной  $t^2$  тыс.руб., а в конце  $(t+1)$  года -  $(t+1)^2$  тыс.рублей, где  $t \in \mathbb{N}$ . Если Пенсионный фонд продает акции и кладет вырученные деньги в банк, то коэффициент наращивания на вложенную сумму равен  $1 + \frac{20}{100} = 1,2$  и в банке он постоянен.

Выясним, как изменяется коэффициент доходности акций, если они находятся в Пенсионном фонде.

$$k = \frac{(t+1)^2}{t^2} \quad (\text{при положительных значениях } x \text{ функция } k(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \text{ — монотонно убывает}).$$

Перекладывать деньги в банк после продажи акций имеет смысл, когда коэффициент их доходности станет меньше банковского коэффициента наращивания

$$\frac{(t+1)^2}{t^2} < 1,2; \quad t^2 - 10t - 5 > 0; \quad t > 5 + \sqrt{30}; \quad t_{\text{наим}} = 11.$$

Значит, в конце одиннадцатого года нужно продать акции и положить деньги в банк, чтобы прибыль была максимальной.

Ответ: 11.

№4. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тыс. руб. в конце года  $t$  ( $t=1; 2; \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в  $1+r$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце девятого года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

Решение:

В конце года  $t$  стоимость ценных бумаг становится равной  $t^2$  тыс.руб., а в конце  $(t+1)$  года -  $(t+1)^2$  тыс.рублей, где  $t \in \mathbb{N}$ .

Если Пенсионный фонд продает ценные бумаги и кладет вырученные деньги в банк, то коэффициент наращивания на вложенную сумму равен  $1+r$  и в банке он постоянен.

Выясним, как изменяется коэффициент доходности ценных бумаг, если они находятся в Пенсионном фонде.

$$k = \frac{(t+1)^2}{t^2}. \quad \text{При увеличении } t \text{ значение коэффициента уменьшается } k = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 \quad (\text{при положительных}$$

значениях  $x$  функция  $k(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$  — монотонно убывает).

Год $t$	Стоимость $t^2$		Коэффициент доходности	Коэффициент наращивания
	Начало года	конец года		
8		$8^2$		
9	$8^2$	$9^2$	$k_9 = \frac{9^2}{8^2}$	$k_9 > (r+1)$
10	$9^2$	$10^2$	$k_{10} = \frac{10^2}{9^2}$	$k_{10} < (r+1)$

На 9 год коэффициент доходности ценных бумаг будет еще больше коэффициента наращивания, а вот на 10 году он становится уже меньше банковского коэффициента  $1+r$ .

$$k_{10} < r+1 < k_9$$

$$\frac{10^2}{9^2} < r+1 < \frac{9^2}{8^2}$$

$$\frac{100}{81} < r+1 < \frac{81}{64}$$

$$\frac{19}{81} < r < \frac{17}{64}$$

$$\text{Ответ: } \frac{19}{81} < r < \frac{17}{64}.$$