Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов

▪ ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $\dfrac{(x+4)^2}{x^2-9} \le 0$

№2. $\dfrac{25-x^2}{(x-4)^2} \ge 0$

№3. $\dfrac{x^3-3x^2-16x+48}{3-x} \ge 0$

№4. $\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+5} \le \dfrac{x^2-4x+3}{3x^2+5}$

№5. $\dfrac{\dfrac{1}{x-5}-1}{1-\dfrac{1}{x-8}} \ge 0$

№6. $1+\dfrac{2}{x} \le \dfrac{x^2+4x+4}{3x+2}$

№7. $\dfrac{1}{x+10} \le \dfrac{x}{x^2-2x+4} + \dfrac{8-17x}{(x+10)(x^2-2x+4)}$

№8. $\dfrac{3}{x^2+13x+40} \ge \dfrac{1}{x^2+15x+56}$

№9. $\dfrac{(5x-3)^2}{x-2} \ge \dfrac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}$

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $\dfrac{2x^2}{3x+7} \le 0$

№2. $\dfrac{(x+7)^2}{x^2-36} \le 0$

№3. $\dfrac{1}{2-x} < \dfrac{x^2-5}{x-2}$

№4. $\dfrac{x^3-3x^2-10x}{x^2-3x-10} \ge 0$

№5. $\dfrac{x^3-4x^2-25x+100}{4-x} \ge 0$

№6. $\dfrac{x^2-6x+8}{x-1} + \dfrac{x-4}{x^2-3x+2} \le 0$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $\dfrac{3x^2}{2x+5} \le 0$

№2. $\dfrac{16-x^2}{(x-3)^2} \ge 0$

№3. $\dfrac{2}{3-x} < \dfrac{x^2-11}{x-3}$

№4. $\dfrac{x^3-4x^2-12x}{x^2-4x-12} \le 0$

№5. $\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+7} \le \dfrac{x^2-3x+2}{4x^2+7}$

№6. $\dfrac{x^2-4x+3}{x-2} - \dfrac{x-3}{x^2-3x+2} \le 0$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{1-\dfrac{1}{x-7}} \ge 0$

№2. $\dfrac{5}{x-4} - \dfrac{16}{x^2-5x+4} \ge 1$

№3. $1+\dfrac{16}{x^2-7x+10} \le \dfrac{5}{2-x}$

№4. $1+\dfrac{6}{x} \le \dfrac{x^2+12x+36}{5x+2}$

№5. $\dfrac{4}{x^2-x+3} + \dfrac{2}{x-3} \le \dfrac{2x^2-2x-13}{(x-3)(x^2-x+3)}$

№6. $1+\dfrac{64}{x^2-9x+14} \le \dfrac{11}{2-x}$

Вариант 4

Решите неравенства:

№1.	$\frac{x^2-8x+13}{x-6}\le\frac{x-1}{2}$	№2.	$\frac{x^2+14x-3}{x+5}\le 2$
№3.	$\frac{x^2-x-14}{x-4}+\frac{x^2-8x+3}{x-8}\le 2x+3$	№4.	$\frac{1}{5x-12}+\frac{2x^2-6x+1}{x-3}\ge 2x$
№5.	$\frac{3}{x^2-30x+216}\ge\frac{1}{x^2-34x+288}$	№6.	$\frac{(5x-2)^2}{x-3}\ge\frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2}$

- ***Ответы (тест)*** Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	$\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right)$; $\{0\}$	$\{-7\};(-6;6)$	$(-2;2);(2;\infty)$	$[0;5);(5;\infty)$	$[-5;4);(4;5]$	$(-\infty;1);(2;4]$
Вар.2	$(-\infty;-2,5)$; $\{0\}$	$[-4;3);(3;4]$	$(-3;3);(3;\infty)$	$(-\infty;-2);(-2;0]$	$\{0\};[1;2]$	$(-\infty;0]$; $(1;2)$; $(2;3]$
Вар.3	$(1;2];(7;8)$	$(1;4);\{5\}$	$\{1\};(2;5)$	$[-6;-2]$; $\left(-\frac{2}{5};0\right)$; $[1;\infty)$	$\left[-\frac{7}{4};3\right)$	$\{-1\};(2;7)$
Вар.4	$(-\infty;4];[5;6)$	$(-\infty;-13]$; $(-5;1]$	$(-\infty;-4]$; $(4;8)$	$\left(\frac{12}{5};2,5\right]$; $(3;\infty)$	$(-\infty;12)$; $(16;18)$; $(18;\infty)$	$\{0,4\};(3;8)$; $[9;\infty)$

✓ *Алгоритм решения неравенств методом интервалов*

- **Подготовительный этап.**

  Приведем неравенство к виду $f(x) \vee 0$.

  Выражение $f(x)$ назовем функцией. По-возможности, в этом выражении разложите на множители числитель и знаменатель.

  Знак $\vee$ обозначает любой из знаков неравенства: $\le$ $\ge$ $<$ $>$.

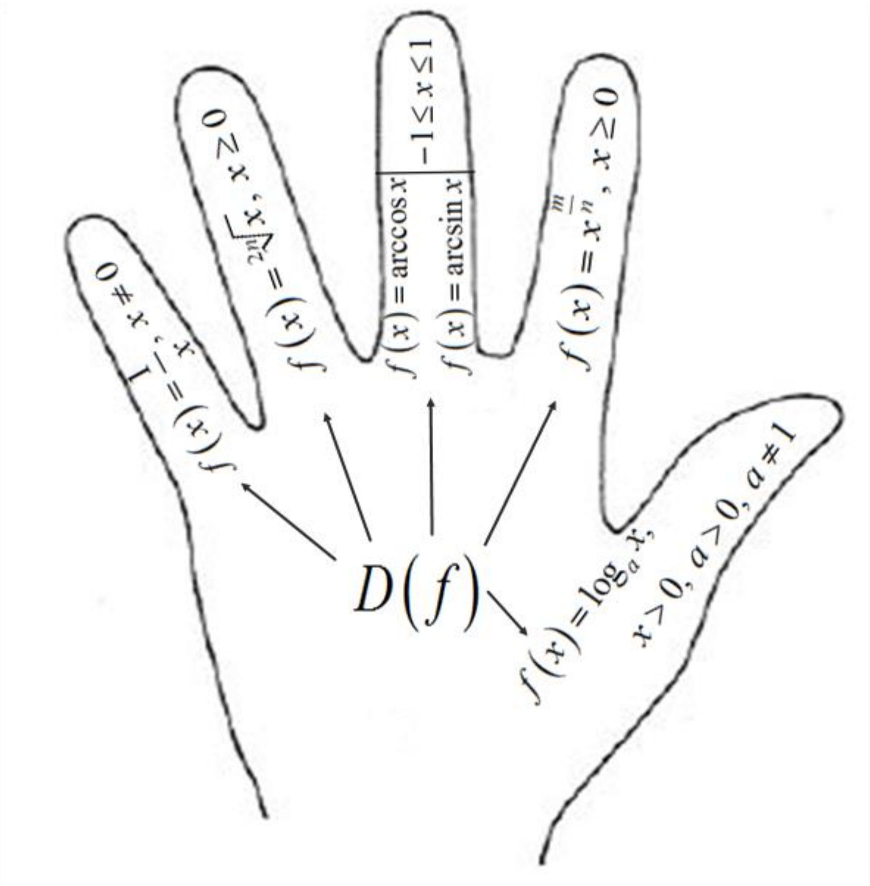
- **Алгоритм.**

  1. **Найти область определения функции:** $D(f)$.
  2. **Найти нули функции:** $f(x)=0$.
  3. **На области определения ($D(f)$) расставить нули функции ($f(x)=0$) и определить знак функции на промежутках, в каждом из которых функция сохраняет постоянный знак. Отметить нужные промежутки из условия $f(x) \vee 0$ и записать ответ.**

✓ *Вопросы, возникающие при выполнении некоторых пунктов алгоритма.*

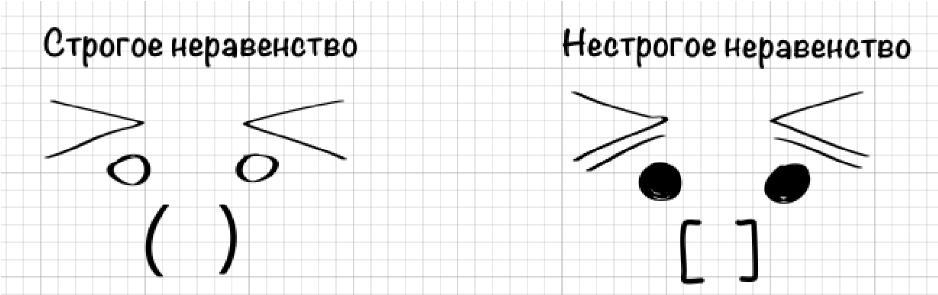
1. **Найти область определения функции:** $D(f)$.

   Область определения функции - это множество допустимых значений переменной, входящей в выражение $f(x)$, при которых это выражение имеет смысл. Ограничений для переменной, входящей в выражение не так много – их всего пять и можно запомнить, разместив на пальцах ладони.



3. Если в разложенном на множители выражении $f(x)$ содержится множитель в четной степени $(x-a)^{2n}$, то функция знак не меняет, проходя через нуль этого множителя. Будем называть этот нуль или точку – двойная. Знание этого факта намного упрощает решение некоторых видов неравенств.

Запомнить соответствие: знак неравенства – точка на координатной прямой – скобка в промежутке, поможет следующая пиктограмма.



Чаще возникают сложности при решении нестрогих неравенств, т.к. отдельно стоящие точки, которые обращают в нуль выражение $f(x)$ можно пропустить при записи ответа. Нестрогое неравенство – это совокупность двух условий : равенства нулю и строгое сравнение с нулем. Запомним, что

$$f(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)<0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \qquad f(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$$

	Скобка	*Союз*	*Операции над множествами решений*
Система условий	{	*“И”*	*Общие решения* $\bigcap$ *- пересечение*
Совокупность условий	[	*“ИЛИ”*	*Все решения* $\bigcup$ *- объединение*