Аналитические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром

▪ *Примеры*

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+5=2(2x+y) \\ a^2+ax+2ay=5 \end{cases}$ имеет решение.

№2. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x+y+z=2x^2+3y^2 \\ -x+2y+3z=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x-2a+2)^2+(y+a-2)^2=a+\dfrac{5}{2} \\ x+y=1-a \end{cases}$ имеет единственное решение.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a(x^2+y^2)-ax+(a-3)y+1=0 \\ xy-1=y-x \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№5. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2 \\ y^2=x^2 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№6. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4+y^2=a^2 \\ x^2+y=|a+1| \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№7. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+3-y=\left|y-2+\dfrac{3}{x}\right| \\ 2y(y-4)+3x(ax+4)=xy(2a+3) \end{cases}$ имеет больше трех решений.

№8. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-1 \\ x=(a+2)y^2+2ay+a-1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x \end{cases}$ имеет единственную пару решений.

№10. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

№11. Найти все значения параметра α из интервала $(0;\pi)$, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)\sin\alpha+8\sin^2\alpha=2\sin\alpha-1 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\sin\alpha+4\sin^2\alpha \end{cases}$ имеет единственное решение.

▪ *Решение (примеры)* Аналитические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2+5=2(2x+y) \\ a^2+ax+2ay=5 \end{cases}$ имеет решение.

Решение:

Преобразуем первое уравнение системы:

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=0,\quad (x-2)^2+(y-1)^2=0.$$

Данное уравнение имеет только одно решение $x=2,\ y=1$. Подставим данные значения во второе уравнение системы: $a^2+4a-5=0;\ \ a=-5,\ \ a=1$.

Ответ: $-5;\ 1$.

№2. **Найдите все значения** a **, при каждом из которых система** $\begin{cases} x+y+z=2x^2+3y^2 \\ -x+2y+3z=a \end{cases}$ **имеет единственное решение.**

Решение:

Исключим из системы уравнений переменную z.

$$\begin{cases} x+y+z=2x^2+3y^2 & \Big|\cdot(-3) \\ -x+2y+3z=a \end{cases}, \quad +\begin{cases} -3x-3y-3z=-6x^2-9y^2 \\ -x+2y+3z=a \end{cases}$$

$$-4x-y=-6x^2-9y^2+a$$

Получившееся уравнение с двумя переменными рассмотрим как квадратное относительно x.

$$6x^2-4x+9y^2-y-a=0$$

$$\frac{D}{4}=4-6\left(9y^2-y-a\right)=-54y^2+6y+6a+4$$

Оно будет иметь единственное решение (оно значение x), если $D=0$,

$$-54y^2+6y+6a+4=0,\ \ 27y^2-3y-3a-2=0\,.$$

Получили квадратное уравнение относительно переменной y, которое будет иметь единственное решение при $D=0$, $D=9-4\cdot27\cdot(-3a-2)=324a+225$, $324a+225=0,\ \ a=-\dfrac{25}{36}$.

Поскольку все три переменные входят в уравнение системы $-x+2y+3z=a$ линейно, то при найденном значении a имеем единственные значения x и y, следовательно, и значение z будет также единственно.

Ответ: -25/36.

№3. **Найдите все значения** a **, при каждом из которых система** $\begin{cases} (x-2a+2)^2+(y+a-2)^2=a+\dfrac{5}{2} \\ x+y=1-a \end{cases}$ **имеет единственное решение.**

Решение:

Выразим из второго уравнения $y=1-a-x$ и подставим его в первое:

$$x^2-2(2a-2)x+(2a-2)^2+(-x-a+1+a-2)^2=a+\frac{5}{2}$$

$$x^2-4ax+4x+4a^2-8a+4+x^2+2x+1=a+\frac{5}{2}$$

$$2x^2-2x(2a-3)+4a^2-9a+2,5=0$$

Поскольку y однозначно выражается через x, каждому корню этого уравнения будет соответствовать единственное решение исходной системы. Значит, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда дискриминант равен нулю:

$$D/4=(2a-3)^2-2\left(4a^2-9a+2,5\right)=-4a^2+6a+4=-2\left(2a^2-3a-2\right)$$

$$2a^2-3a-2=0;\ \ a=-0,5\ \ a=2$$

Ответ: -0,5 и 2.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

№4. $\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)-ax+(a-3)y+1=0 \\ xy-1=y-x \end{cases}$ **имеет ровно четыре различных решения.**

Решение:

$$\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)-ax+(a-3)y+1=0 & (1) \\ xy-1=y-x & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (2) из системы.

$$xy-1=y-x,\ \ xy-y-1+x=0,\ \ y(x-1)+(x-1)=0,\ \ (x-1)(y+1)=0;\quad x=1\quad y=-1.$$

Тогда исходная система представляет собой совокупность двух систем

а) $\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)-ax+(a-3)y+1=0 \\ x=1 \end{cases}$ или б) $\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)-ax+(a-3)y+1=0 \\ y=-1 \end{cases}$.

Исходная система будет иметь ровно четыре различных решения, если каждая система из совокупности (а) и (б) имеет ровно два различных решения, и при этом решения систем (1) и (2) не совпадают.

а) $\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)-ax+(a-3)y+1=0 \\ x=1 \end{cases}$, $\begin{cases} a\left(1+y^2\right)-a+(a-3)y+1=0 & (*) \\ x=1 \end{cases}$

$(*)\quad a\left(1+y^2\right)-a+(a-3)y+1=0,\ \ ay^2+(a-3)y+1=0$

Если $a=0$, то получим линейное уравнение $-3y+1=0$, которое имеет единственное решение $y=\dfrac{1}{3}$.

Занчит, при $a=0$ система уравнений (а) имеет одно решение $\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Если $a\neq 0$, то квадратное уравнение $ay^2+(a-3)y+1=0$ имеет два корня при $D>0$, тогда и система (а) тоже имеет два решения.

$$(a-3)^2-4a>0,\ \ (a-1)(a-9)>0,\ \ \left[\begin{array}{l} a<1 \\ a>9 \end{array}\right..$$

б) $\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)-ax+(a-3)y+1=0 \\ y=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} a\left(x^2+1\right)-ax-(a-3)+1=0 & (**) \\ y=1 \end{cases}$

$(**)\quad a\left(x^2+1\right)-ax-(a-3)+1=0,\ \ ax^2-ax+4=0$

Если $a=0$, то получим неверное числовое равенство.

Если $a\neq 0$, то квадратное уравнение $ax^2-ax+4=0$ имеет два корня при $D>0$, тогда и система (б) тоже имеет два решения.

$$a^2-4\cdot 4\cdot a>0,\ \ a^2-16a>0,\ \ a(a-16)>0,\ \ \left[\begin{array}{l} a>16 \\ a<0 \end{array}\right..$$

Исключим совпадение решений систем (а) и (б).

Если $x=1$ и $y=-1$, то подставим эти значения в уравнения $ay^2+(a-3)y+1=0$ и $ax^2-ax+4=0$, то получим неверное числовое раченство. Значит, совпадения решений нет.

Исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения при

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<1 \\ a>9 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a<0 \\ a>16 \end{array}\right. \end{cases},\quad \left[\begin{array}{l} a<0 \\ a>16 \end{array}\right.$$

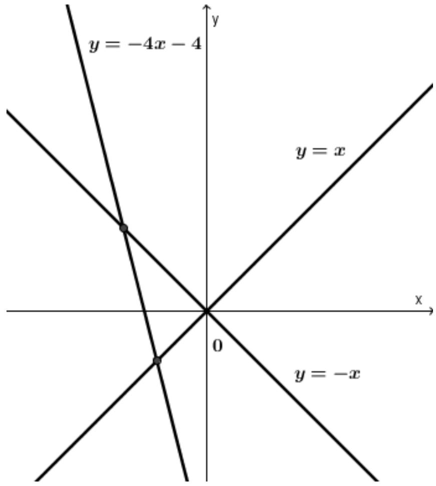
Ответ: $(-\infty;0);(16;\infty)$.

№5. **Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений** $\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2 \\ y^2=x^2 \end{cases}$ **имеет ровно четыре различных решения.**

Решение:

$$\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2 \\ |y|=|x| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2 \\ y=x \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2 \\ y=-x \end{cases} & (2) \end{array} \right.$$

Если $a=-2$, то система $\begin{cases} y=-4x-4 \\ \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array} \right. \end{cases}$ имеет только два решения (см. рисунок).



Если $a \neq -2$, то исследуем количество решений каждой системы из совокупности.
Исходная система будет иметь ровно четыре различных решения, если каждая система из совокупности (1) и (2) имеет ровно два различных решения, и при решения систем (1) и (2) не совпадают.
Квадратные уравнения в ситемах имеют по два различных решения, если их дискриминант положителен.

(1) $\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2 \\ y=x \end{cases}$

$(a+2)x^2+2ax+a-2=x$

$(a+2)x^2+(2a-1)x+a-2=0$

$D=(2a-1)^2-4\cdot(a+2)(a-2)=17-4a$

$D>0,\ \ 17-4a>0,\ \ a<\frac{17}{4}$

(2) $\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2 \\ y=-x \end{cases}$

$(a+2)x^2+2ax+a-2=-x,$

$(a+2)x^2+(2a+1)x+a-2=0$

$D=(2a+1)^2-4(a+2)(a-2)=17+4a,$

$D>0,\ \ 17+4a>0,\ \ a>-\frac{17}{4}$

Исключим совпадение решений системы (1) и (2). Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} (a+2)x^2+(2a-1)x+a-2=0 \\ (a+2)x^2+(2a+1)x+a-2=0 \end{cases},\quad (2a-1)x-(2a+1)x=0,\ \ x(2a-1-2a-1)=0,\ \ x=0.$$

Подставив в исходную систему $x=0$, получим $y=0$ и $a=2$.

Итак, при $a\in\left(-\frac{17}{4};-2\right);(-2;2);\left(2;\frac{17}{4}\right)$ система имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $a\in\left(-\frac{17}{4};-2\right);(-2;2);\left(2;\frac{17}{4}\right)$.

№6. **Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4+y^2=a^2 \\ x^2+y=|a+1| \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.**

Решение:
Исходная система равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases} x^4+\left(|a+1|-x^2\right)^2=a^2 \\ y=|a+1|-x^2 \end{cases};\quad \begin{cases} 2x^4-2|a+1|x^2+2a+1=0 \\ y=|a+1|-x^2 \end{cases}$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда биквадратное уравнение

$$2x^4-2|a+1|x^2+2a+1=0$$

имеет ровно четыре различных корня. Это выполняется, когда квадратное уравнение $\left(t=x^2\right)$

$$2t^2-2|a+1|t+2a+1=0$$

имеет ровно два положительных корня.
Чтобы полученное квадратное уравнение имело два корня, его дискриминант должен быть положительным:

$$4(a+1)^2-8(2a+1)>0,\ \ a^2-2a-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<1-\sqrt{2} \\ a>1+\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Чтобы корни полученного квадратного уравнения были положительны, необходимо выполнение следующих условий

$$\begin{cases} t_1>0 \\ t_2>0 \end{cases};\quad \begin{cases} t_1+t_2>0 \\ t_1\cdot t_2>0 \end{cases};\quad \begin{cases} |a+1|>0 \\ \dfrac{2a+1}{2}>0 \end{cases};\quad \begin{cases} a\neq -1 \\ a>-0,5 \end{cases};\quad a>-0,5\ .$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при
$a\in\left(-0,5;1-\sqrt{2}\right);\left(1+\sqrt{2};\infty\right)$.

Ответ: $\left(-0,5;1-\sqrt{2}\right);\left(1+\sqrt{2};\infty\right)$.

№7. **Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений**
$\begin{cases} \dfrac{5}{x}+3-y=\left|y-2+\dfrac{3}{x}\right| \\ 2y(y-4)+3x(ax+4)=xy(2a+3) \end{cases}$ **имеет больше трех решений.**

Решение:
Преобразуем второе уравнение системы $2y(y-4)+3x(ax+4)=xy(2a+3)$.

$$2y^2-8y+3ax^2+12x-2axy-3xy=0$$

$$ax(3x-2y)+4(3x-2y)-y(3x-2y)=0$$

$$(3x-2y)(ax+4-y)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x-2y=0 \\ ax+4-y=0 \end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3x}{2} \\ y=ax+4 \end{array}\right.$$

Получим совокупность двух систем: (1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+3-y=\left|y-2+\dfrac{3}{x}\right| \\ y=\dfrac{3x}{2} \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+3-y=\left|y-2+\dfrac{3}{x}\right| \\ y=ax+4 \end{cases}$.

В системе (1) подставим второе уравнение в первое и решим его.

$$\frac{5}{x}+3-\frac{3}{2}x=\left|\frac{3}{2}x-2+\frac{3}{x}\right|,\quad \frac{10+6x-3x^2}{2x}=\left|\frac{3x^2-4x+6}{2x}\right|$$

$$\begin{cases}\dfrac{10+6x-3x^2}{2x}\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{10+6x-3x^2}{2x}=\dfrac{3x^2-4x+6}{2x}\\ \dfrac{10+6x-3x^2}{2x}=-\dfrac{3x^2-4x+6}{2x}\end{array}\right.\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{3x^2-6x-10}{x}\le 0\\ \left[\begin{array}{l}6x^2-10x-4=0\\ 2x=-16\end{array}\right.\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{3x^2-6x-10}{x}\le 0\\ x=2,\ \ x=-\dfrac{1}{3},\ \ x=-8\end{cases}$$

Проверкой установмим, что $x=-\frac{1}{3}$ не удовлетворяет неравенству из системы, поэтому решением являются только $x=-8$ и $x=2$. Тогда решением системы (1) являются пары чисел $(-8;-12)$ и $(2;3)$. Значит, исходная система при любых значениях a имеет два решения.

Исключим совпадение решений системы (1) и (2).

Если $x=-8$ и $y=-12$, то $y=ax+4,\ \ -12=a\cdot(-8)+4,\ \ a=2$.

Если $x=2$ и $y=3$, то $y=ax+4,\ 3=a\cdot 2+4,\ \ a=-\frac{1}{2}$.

Рассмотрим систему (2).

$$\begin{cases}\dfrac{5}{x}+3-y=\left|y-2+\dfrac{3}{x}\right|;\\ y=ax+4\end{cases}\quad (\text{а})\ \begin{cases}\dfrac{5}{x}+3-y\ge 0\\ \dfrac{5}{x}+3-y=y-2+\dfrac{3}{x}\\ y=ax+4\end{cases}\ \text{или}\ (\text{б})\ \begin{cases}\dfrac{5}{x}+3-y\ge 0\\ \dfrac{5}{x}+3-y=-y+2-\dfrac{3}{x}\\ y=ax+4\end{cases}$$

Случай (а): $$\begin{cases}\dfrac{5}{x}+3-y\ge 0\\ \dfrac{5}{x}+3-y=y-2+\dfrac{3}{x},\\ y=ax+4\end{cases}\ \begin{cases}y\le\dfrac{5}{x}+3\\ y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2},\\ y=ax+4\end{cases}\ \begin{cases}y\le\dfrac{5}{x}+3\\ ax+4=\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2},\\ y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2}\end{cases}\ \begin{cases}y\le\dfrac{5}{x}+3\\ 2ax^2+3x-2=0\\ y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Исследуем второе уравнение системы $2ax^2+3x-2=0$ на количество корней.

Если $a=0$, то $x=\frac{2}{3},\ y=4$ (неравенство из системы верно). Всего исходная система будет иметь три решения.

Если $a\ne 0$, то уравнение $2ax^2+3x-2=0$ - квадратное и оно имеет два различных корня при $D>0$.

$D=9-4\cdot 2a\cdot(-2)=9+16a,\ \ 9+16a>0,\ \ a>-\frac{9}{16}$. Тогда исходная система уравнений имеет четыре решения.

Случай (б): $$\begin{cases}\dfrac{5}{x}+3-y\ge 0\\ \dfrac{5}{x}+3-y=-y+2-\dfrac{3}{x},\\ y=ax+4\end{cases}\ x=-8.$$ Совпадение решения с решением системы (1).

Исходная система имеет больше трех решений при $a>-\frac{9}{16},\ \ a\ne-\frac{1}{2},\ \ a\ne 0,\ \ a\ne 2$. Получим, что

$a\in\left(-\frac{9}{16};-\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{1}{2};0\right);(0;2);(2;\infty)$.

Ответ: $\left(-\frac{9}{16};-\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{1}{2};0\right);(0;2);(2;\infty)$.

№8. **Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-1 \\ x=(a+2)y^2+2ay+a-1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.**

Решение:
Система не изменится, если поменять x и y местами. Следовательно, система имеет единственное решение, только если $x=y$. Получаем уравнение: $x=(a+2)x^2+2ax+a-1$, $(a+2)x^2+2ax+a-1=0$. Это уравнение должно иметь единственный корень.
Если $a=-2$, получим линейное уравнение $5x+3=0$, которое имеет единственное решение $x=-0,6$. Решением системы является пара $(-0,6;-0,6)$.
Если $a\neq-2$, то дискриминант должен равняться нулю:

$$(2a-1)^2-4(a+2)(a-1)=0$$

$$-8a+9=0,\quad a=\frac{9}{8}$$

При $a=\frac{9}{8}$ получаем $\frac{25}{8}x^2+\frac{10}{8}x+\frac{1}{8}=0$, откуда $x=-0,3$. Тогда решением системы является пара $(-0,2;-0,2)$.
Покажем, что в этих случаях нет иных решений, где $x\neq y$. Вычтем второе уравнение системы из первого и разделим полученное уравнение почленно на $x-y\neq0$:

$$-1=(a+2)(x+y)+2a.$$

При $a=-2$ получается, неверное числовое равенство - решений нет.
При $a=\frac{9}{8}$ получаем $y=-\frac{26}{25}-x$. Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$-\frac{26}{25}-x=\frac{25}{8}x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{8}$, $25x^2+26x+\frac{233}{25}=0$ - корней нет.

Ответ: $-2;\ \frac{9}{8}$.

№9. **При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x \end{cases}$ имеет единственную пару решений.**

Решение:
Заметим, что при замене в уравнениях переменных x на y, система не изменится. Значит, если $(x_0;y_0)-$ решение, то и $(y_0;x_0)$. Система будет иметь единственное решение при $x=y$. Заменим x на y в уравнении системы, получим квадратное уравнение $x^2-(2a+1)x+a^2-3-x=0$, которое имеет единственное решение, если $D=0$.

$$x^2-x(2a+2)+a^2-3=0$$

$$D/4=(a+1)^2-(a^2-3)=a^2+2a+1-a^2+3=2a+4$$

$$D=0,\quad 2a+4=0,\ a=-2$$

При $a=-2$ получим $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$, $x=-1$. Тогда система имеет решение $(-1;-1)$.
Покажем, что в этом случае нет иных решений, где $x\neq y$.

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x \end{cases}$$

$$x^2-y^2-(2a+1)(x-y)=y-x$$

$$(x-y)(x+y)-(2a+1)(x-y)+(x-y)=0$$

$$(x-y)(x+y-2a-1+1)=0$$

$$x\neq y \quad y=-x+2a$$

При $a=-2$ получаем $y=-x-4$. Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$x^2-(2\cdot(-2)+1)x+(-2)^2-3=-x-4,\ \ x^2+4x+5=0$$ - корней нет.

Ответ: -2.

№10. **Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений** $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}$ **имеет ровно два решения.**

Решение:

Рассмотрим первое уравнение из системы $2x^2+2y^2=5xy$ как квадратное относительно x. Найдем его корни.

$$2x^2-5y\cdot x+2y^2=0,\ \ D=25y^2-4\cdot2\cdot2y^2=9y^2$$

$$x=\frac{5y\pm3y}{4},\ \ x_1=2y,\ \ x_2=\frac{y}{2}$$

Получим совокупность двух систем

$$\begin{cases} x=2y \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=2x \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}.$$

Заметим, что вторая система в совокупности получается из первой заменой x на y, а y на x. Значит, если первая система имеет решение $(x_0;y_0)$, то решением второй будет пара $(y_0;x_0)$. Следовательно, исходная система уравнений имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда система

$\begin{cases} x=2y \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

$$\begin{cases} x=2y \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases},\ \ \begin{cases} x=2y \\ (2y-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases},\ \ \begin{cases} x=2y \\ 5y^2-6ay-5a^4+2a^2=0 \end{cases}.$$

Система имеет ровно одно решение, если второе уравнение системы имеет единственное решение, это выполнится, если $D=0$, $\frac{D}{4}=9a^2-5\cdot\left(-5a^4+2a^2\right)=25a^4-a^2=a^2(5a-1)(5a+1)$

$$a^2(5a-1)(5a+1)=0;\quad a=0,\ \ a=\frac{1}{5},\ \ a=-\frac{1}{5}$$

При $a=0$ получаем, что последняя система имеет $(0;0)$, что не подходит, поскольку оно единственно.

При $a=\frac{1}{5}$ получаем, что последняя система имеет решение $\left(\frac{6}{25};\frac{3}{25}\right)$, а значит, исходная система имеет ровно два решения.

При $a=-\frac{1}{5}$ получаем, что последняя система имеет решение $\left(-\frac{6}{25};-\frac{3}{25}\right)$, а значит, исходная система имеет ровно два решения.

Ответ: $a=\frac{1}{5};\ \ a=-\frac{1}{5}$.

№11. **Найти все значения параметра α из интервала $(0;\pi)$, при каждом из которых система**

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)\sin\alpha+8\sin^2\alpha=2\sin\alpha-1 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\sin\alpha+4\sin^2\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

Пусть $a=\sin\alpha$, тогда система примет вид $\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)a+8a^2=2a-1 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2a+4a^2 \end{cases}$.

Заметим, что при замене переменной x на y система уравнений не меняет свой вид, значит она симметрична относительно входящих в нее переменных. Тогда, если пара $(x;y)$ является решением, то $(y;x)$ тоже решение. Следовательно, единственное решение может иметь вид $(x;x)$, где $x\neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} x^2+x^2-4a(x+x)+8a^2=2a-1 \\ \dfrac{x}{x}+\dfrac{x}{x}=2a+4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-8ax+8a^2-2a+1=0 \\ a=\dfrac{1}{2},\quad a=-1 \end{cases}.$$

При $a=-1$ первое уравнение системы примет вид $2x^2+8x+11=0$ и оно не имеет решений.

При $a=\dfrac{1}{2}$ первое уравнение системы примет вид $x^2-2x+1=0,\quad x=1$. Проверкой, подставив в систему $a=\dfrac{1}{2}$, установим, что пара решений $(1;1)$ действительно является единственной.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(x+y)+2=0 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2 \end{cases},\quad \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=0 \\ (x-y)^2=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Вернемся к замене $a=\sin\alpha$ и решим уравнение $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ при $\alpha\in(0;\pi)$. Получим, что $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ и $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$ *и* $\dfrac{5\pi}{6}$.

▪ *Тест* Аналитические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2+10=2(x+3y) \\ a^2+2ax+ay=-6 \end{cases}$ имеет решение.

№2. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x+y+2z=4x^2+y^2 \\ 2x+y+3z=-a \end{cases}$ имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x-a+3)^2+(y+a-2)^2=a+\dfrac{7}{2} \\ x-y=a-1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (a+1)(x^2+y^2)+(a-1)x+(a+1)y+2=0 \\ xy-1=x-y \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№5. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4+y^2=a^2-1 \\ x^2-y=|a-1| \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№6. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}=\left|y+\dfrac{2}{x}-3\right| \\ 2y(y+2)+3x(ax-2)=xy(2a+3) \end{cases}$ имеет больше трех решений.

№7. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=(a+2)x^2-(2a+1)x+a-3 \\ x=(a+2)y^2-(2a+1)y+a-3 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№8. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3x^2+3y^2+10xy=0 \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

№9. При каких значениях параметра а система уравнений $\begin{cases} a(x^4+1)=y+1-|x| \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

▪ *Ответы (тест)* Аналитические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9
$-3;\ -2$	$-\dfrac{5}{96}$	*1 и 9*	$(-3;-1)$	$(-\infty;-3)$	$\left(-\dfrac{25}{16};-1,5\right);(-1,5;0);$ $\left(0;\dfrac{19}{6}\right);\left(\dfrac{19}{6};\infty\right)$	$-\dfrac{7}{3};-2$	$-\dfrac{1}{5};\ \dfrac{1}{5}$	2

▪ *Решение (тест)* Аналитические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром

№1. **Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2+10=2(x+3y) \\ a^2+2ax+ay=-6 \end{cases}$ имеет решение.**

Решение:
Преобразуем первое уравнение системы:

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9=0,\quad (x-1)^2+(y-3)^2=0.$$

Данное уравнение имеет только одно решение $x=1,\ y=3$. Подставим данные значения во второе уравнение системы: $a^2+5a+6=0;\ \ a=-3,\ \ a=-2$.

Ответ: $-3;\ \ -2$.

№2. **Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x+y+2z=4x^2+y^2 \\ 2x+y+3z=-a \end{cases}$ имеет единственное решение.**

Решение:
Выразим переменную z их каждого уравнения системы и решим получившееся квадратное уравнение относительно переменной x.

$$\begin{cases} z=\dfrac{4x^2+y^2-x-y}{2} \\ z=\dfrac{a-2x-y}{3} \end{cases},\quad \frac{4x^2+y^2-x-y}{2}=\frac{a-2x-y}{3}$$

$$12x^2+x+3y^2-y-2a=0$$

$$D=1-4\cdot12\cdot\left(3y^2-y-2a\right)=-144y^2+48y+96a+1$$

Единственное решение квадратного уравнения при $D=0$.

$$-144y^2+48y+96a+1=0$$

$$D/4=24^2-(-144)\cdot(96a+1)=24^2+12^2+12^2\cdot96a=12^2\cdot(4+1+96a)=12^2\cdot(5+96a)$$

$$D=0,\quad 5+96a=0,\quad a=-\frac{5}{96}$$

Поскольку все три переменные входят в уравнение системы $2x+y+3z=a$ линейно, то при найденном значении a имеем единственные значения x и y, следовательно, и значение z будет также единственно.

Ответ: $-5/96$.

№3. **Найдите все значения** a **, при каждом из которых система** $\begin{cases}(x-a+3)^2+(y+a-2)^2=a+\dfrac{7}{2}\\ x-y=a-1\end{cases}$ **имеет единственное решение.**

Решение:

Выразим из второго уравнения $y=x-a+1$ и подставим его в первое:

$$x^2+2(-a+3)x+(-a+3)^2+(x-a+1+a-2)^2=a+\frac{7}{2}$$
$$x^2-2ax+6x+a^2-6a+9+x^2-2x+1=a+3,5$$
$$2x^2-2x(a-2)+a^2-7a+6,5=0$$

Поскольку y однозначно выражается через x, каждому корню этого уравнения будет соответствовать единственное решение исходной системы. Значит, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда дискриминант равен нулю:

$$D/4=(a-2)^2-2(a^2-7a+6,5)=-a^2+10a-9$$
$$-a^2+10a-9=0;\quad a^2-10a+9=0;\quad a=1\ \ a=9$$

Ответ: 1 и 9.

Найдите все значения a **, при каждом из которых система уравнений**

№4. $\begin{cases}(a+1)(x^2+y^2)+(a-1)x+(a+1)y+2=0\\ xy-1=x-y\end{cases}$ **имеет ровно четыре различных решения.**

Решение:

$$\begin{cases}(a+1)(x^2+y^2)+(a-1)x+(a+1)y+2=0 & (1)\\ xy-1=x-y & (2)\end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (2) из системы.

$$xy-1=x-y,\quad xy+y-1-x=0,\quad y(x+1)-(x+1)=0,\quad (x+1)(y-1)=0;\quad x=-1\quad y=1.$$

Тогда исходная система представляет собой совокупность двух систем

а) $\begin{cases}(a+1)(x^2+y^2)+(a-1)x+(a+1)y+2=0\\ x=-1\end{cases}$ или б) $\begin{cases}(a+1)(x^2+y^2)+(a-1)x+(a+1)y+2=0\\ y=1\end{cases}$.

Исходная система будет иметь ровно четыре различных решения, если каждая система из совокупности (а) и (б) имеет ровно два различных решения, и при этом решения систем (1) и (2) не совпадают.

а) $\begin{cases}(a+1)(x^2+y^2)+(a-1)x+(a+1)y+2=0\\ x=-1\end{cases}$, $\begin{cases}(a+1)(1+y^2)+(a-1)\cdot(-1)+(a+1)y+2=0 & (*)\\ x=-1\end{cases}$

$$(*)\quad (a+1)(1+y^2)+(a-1)\cdot(-1)+(a+1)y+2=0,\quad (a+1)y^2+(a+1)y+4=0$$

Если $a=-1$, то получим неверное числовое равенство.

Если $a\neq-1$, то квадратное уравнение $(a+1)y^2+(a+1)y+4=0$ имеет два корня при $D>0$, тогда и система (а) тоже имеет два решения.

$$(a+1)^2-16(a+1)>0,\quad (a+1)(a-15)>0,\quad \left[\begin{array}{l}a<-1\\ a>15\end{array}\right..$$

б) $\begin{cases}(a+1)(x^2+y^2)+(a-1)x+(a+1)y+2=0\\ y=1\end{cases}$, $\begin{cases}(a+1)(x^2+1)+(a-1)x+(a+1)+2=0 & (**)\\ y=1\end{cases}$

$$(**)\quad (a+1)(x^2+1)+(a-1)x+(a+1)+2=0,\quad (a+1)x^2+(a-1)x+2a+4=0$$

Если $a=-1$, то получим $-2x+2=0,\ \ x=1\ \ y=1-$ одно решение.

Если $a \neq -1$, то квадратное уравнение $(a+1)x^2+(a-1)x+2a+4=0$ имеет два корня при $D>0$, тогда и система (б) тоже имеет два решения.

$$(a-1)^2-4(2a+4)(a+1)>0, \quad -7a^2-26a-15>0, \quad (a+3)\left(a+\frac{5}{7}\right)<0, \quad -3<a<-\frac{5}{7}.$$

Исключим совпадение решений систем (а) и (б).

Если $x=-1$ и $y=1$, то подставим эти значения в уравнения $(a+1)y^2+(a+1)y+4=0$ и $(a+1)x^2+(a-1)x+2a+4=0$, получим $a=-3$.

Исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения при

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a>15 \end{array}\right. \\ -3<a<-\dfrac{5}{7}, \\ a \neq -3 \end{cases} \quad -3<a<-1$$

Ответ: $(-3;-1)$.

№5. **Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4+y^2=a^2-1 \\ x^2-y=|a-1| \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.**

Решение:

Исходная система равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases} x^4+y^2=a^2-1 \\ x^2-|a-1|=y \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^4-2|a-1|x^2-2a+2=0 \\ y=x^2-|a-1| \end{cases}$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда биквадратное уравнение

$$2x^4-2|a-1|x^2-2a+2=0$$

имеет ровно четыре различных корня. Это выполняется, когда квадратное уравнение $(t=x^2)$

$$2t^2-2|a-1|t-2a+2=0$$

имеет ровно два положительных корня.

Чтобы полученное квадратное уравнение имело два корня, его дискриминант должен быть положительным:

$$4(a-1)^2-8(-2a+2)>0, \quad a^2+2a-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-3 \\ a>1 \end{array}\right..$$

Чтобы корни полученного квадратного уравнения были положительны, необходимо выполнение следующих условий

$$\begin{cases} t_1>0 \\ t_2>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} t_1+t_2>0 \\ t_1 \cdot t_2>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} |a-1|>0 \\ \dfrac{-2a+2}{2}>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a \neq 1 \\ a<1 \end{cases}; \quad a<1.$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-3 \\ a>1 \end{array}\right. \\ a<1 \end{cases}, \quad a<-3.$

Ответ: $(-\infty;-3)$.

№6. **Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений**

$$\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}=\left|y+\dfrac{2}{x}-3\right| \\ 2y(y+2)+3x(ax-2)=xy(2a+3) \end{cases}$$ **имеет больше трех решений.**

Решение:

Преобразуем второе уравнение системы $2y(y+2)+3x(ax-2)=xy(2a+3)$.

$$2y^2+4y+3ax^2-6x-2axy-3xy=0$$

$$(2y-3x)(y-ax+2)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2y-3x=0 \\ y-ax+2=0 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3x}{2} \\ y=ax-2 \end{array}\right.$$

Получим совокупность двух систем: (1) $\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}=\left|y+\dfrac{2}{x}-3\right| \\ y=\dfrac{3x}{2} \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}=\left|y+\dfrac{2}{x}-3\right| \\ y=ax-2 \end{cases}$.

В системе (1) подставим второе уравнение в первое и решим его.

$$\frac{3}{2}x+2-\frac{4}{x}=\left|\frac{3}{2}x-\frac{2}{x}-3\right|, \quad \frac{3x^2+4x-8}{2x}=\left|\frac{3x^2-6x+4}{2x}\right|$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2+4x-8}{2x}\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3x^2+4x-8=3x^2-6x+4 \\ 3x^2+4x-8=-3x^2+6x-4 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{3x^2+4x-8}{x}\ge 0 \\ x=\dfrac{6}{5}, \quad x=1, \quad x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Проверкой установмим, что $x=1$ не удовлетворяет неравенству из системы, поэтому решением являются только $x=\dfrac{6}{5}$ и $x=-\dfrac{2}{3}$. Тогда решением системы (1) являются пары чисел $\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{9}{5}\right)$ и $\left(-\dfrac{2}{3};-1\right)$. Значит, исходная система при любых значениях a имеет два решения.

Исключим совпадение решений системы (1) и (2).

Если $x=\dfrac{6}{5}$ и $y=\dfrac{9}{5}$, то $y=ax-2, \ \dfrac{9}{5}=a\cdot\dfrac{6}{5}-2, \ a=\dfrac{19}{6}$.

Если $x=-\dfrac{2}{3}$ и $y=-1$, то $y=ax-2, \ -1=a\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)-2, \ a=-1{,}5$.

Рассмотрим систему (2).

$$\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}=\left|y+\dfrac{2}{x}-3\right| \\ y=ax-2 \end{cases}; \ \text{(а)} \begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}\ge 0 \\ y+2-\dfrac{4}{x}=y+\dfrac{2}{x}-3 \\ y=ax-2 \end{cases} \text{ или (б) } \begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}\ge 0 \\ y+2-\dfrac{4}{x}=-y-\dfrac{2}{x}+3 \\ y=ax-2 \end{cases}$$

Случай (а): $\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}\ge 0 \\ y+2-\dfrac{4}{x}=y+\dfrac{2}{x}-3, \\ y=ax-2 \end{cases}$ $\begin{cases} y\le\dfrac{5}{x}+3 \\ x=\dfrac{6}{5} \\ y=ax+4 \end{cases}$. Совпадение решения с решением системы (1).

Случай (б): $\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}\ge 0 \\ y+2-\dfrac{4}{x}=-y-\dfrac{2}{x}+3, \\ y=ax-2 \end{cases}$ $\begin{cases} y\ge \dfrac{4}{x}-2 \\ y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}, \\ y=ax-2 \end{cases}$ $\begin{cases} y\ge \dfrac{4}{x}-2 \\ y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}=ax-2 \end{cases}$, $\begin{cases} y\ge \dfrac{4}{x}-2 \\ y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2} \\ 2ax^2-5x-2=0 \end{cases}$

Исследуем второе уравнение системы $2ax^2-5x-2=0$ на количество корней.

Если $a=0$, то $x=-\dfrac{2}{5}$, $y=-2$ (неравенство из системы верно). Всего исходная система будет иметь три решения.

Если $a\ne 0$, то уравнение $2ax^2-5x-2=0$ квадратное и оно имеет два различных корня при $D>0$.

$D=25-4\cdot 2a\cdot(-2)=25+16a,\quad 25+16a>0,\quad a>-\dfrac{25}{16}$. Тогда исходная система уравнений имеет четыре решения.

Исходная система имеет больше трех решений при $a>-\dfrac{25}{16},\quad a\ne -1,5,\quad a\ne 0,\quad a\ne \dfrac{19}{6}$.

Получим, что $a\in\left(-\dfrac{25}{16};-1,5\right);(-1,5;0);\left(0;\dfrac{19}{6}\right);\left(\dfrac{19}{6};\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\dfrac{25}{16};-1,5\right);(-1,5;0);\left(0;\dfrac{19}{6}\right);\left(\dfrac{19}{6};\infty\right)$.

№7. **Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений** $\begin{cases} y=(a+2)x^2-(2a+1)x+a-3 \\ x=(a+2)y^2-(2a+1)y+a-3 \end{cases}$ **имеет ровно одно решение.**

Решение:

Система не изменится, если поменять x и y местами. Следовательно, система имеет единственное решение, только если $x=y$. Получаем уравнение: $x=(a+2)x^2-(2a+1)x+a-3$,

$(a+2)x^2-(2a+2)x+a-3=0$.

Это уравнение должно иметь единственный корень.

Если $a=-2$, получим линейное уравнение $2x-5=0$, которое имеет единственное решение $x=2,5$.

Решением системы является пара $(2,5;2,5)$.

Если $a\ne -2$, то дискриминант должен равняться нулю:

$$(2a+2)^2-4(a+2)(a-3)=0;\quad 3a+7=0,\quad a=-\frac{7}{3}$$

При $a=-\dfrac{7}{3}$ получаем $x^2-8x+16=0$, откуда $x=4$. Тогда решением системы является пара $(4;4)$.

Покажем, что в этих случаях нет иных решений, где $x\ne y$. Вычтем второе уравнение системы из первого и разделим полученное уравнение почленно на $x-y\ne 0$:

$$-1=(a+2)(x+y)-(2a+1).$$

При $a=-2$ получается, неверное числовое равенство - решений нет.

При $a=-\dfrac{7}{3}$ получаем $y=14-x$. Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$14-x=-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-\frac{16}{3},\quad x^2-14x+58=0$$ - корней нет.

Ответ: $-\dfrac{7}{3};-2$.

№8. **Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений** $\begin{cases} 3x^2+3y^2+10xy=0 \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases}$ **имеет ровно два решения.**

Решение:

Рассмотрим первое уравнение из системы $3x^2+3y^2+10xy=0$ как квадратное относительно x. Найдем его корни.

$$3x^2-10y\cdot x+3y^2=0,\quad D/4=25y^2-3\cdot 3y^2=16y^2$$

$$x=\frac{5y\pm 4y}{3},\quad x_1=3y,\quad x_2=\frac{y}{3}$$

Получим совокупность двух систем

$$\begin{cases} x=3y \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=3x \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases}.$$

Заметим, что вторая система в совокупности получается из первой заменой x на y, а y на x. Значит, если первая система имеет решение $(x_0;y_0)$, то решением второй будет пара $(y_0;x_0)$. Следовательно, исходная система уравнений имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда система $\begin{cases} x=3y \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

$$\begin{cases} x=3y \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases},\quad \begin{cases} x=3y \\ (3y-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases},\quad \begin{cases} x=3y \\ 5y^2-4ay-5a^4+a^2=0 \end{cases}.$$

Система имеет ровно одно решение, если второе уравнение системы имеет единственное решение, это выполнится, если $D=0$, $\frac{D}{4}=4a^2-5\cdot\left(-5a^4+a^2\right)=25a^4-a^2=a^2(5a-1)(5a+1)$

$$a^2(5a-1)(5a+1)=0$$

$$a=0,\quad a=\frac{1}{5},\quad a=-\frac{1}{5}$$

При $a=0$ получаем, что последняя система имеет $(0;0)$, что не подходит, поскольку оно единственно.

При $a=\frac{1}{5}$ получаем, что последняя система имеет решение $\left(\frac{6}{25};\frac{2}{25}\right)$, а значит, исходная система имеет ровно два решения.

При $a=-\frac{1}{5}$ получаем, что последняя система имеет решение $\left(-\frac{6}{25};-\frac{2}{25}\right)$, а значит, исходная система имеет ровно два решения.

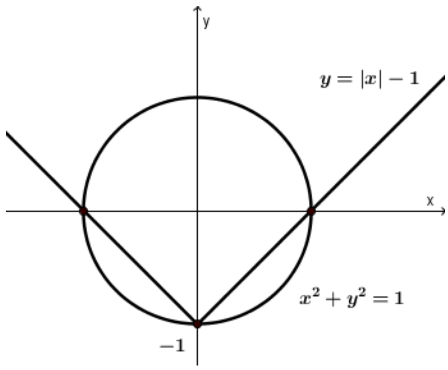
Ответ: $a=-\frac{1}{5};\ a=\frac{1}{5}$.

№9. **При каких значениях параметра а система уравнений** $\begin{cases} a\left(x^4+1\right)=y+1-|x| \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ **имеет единственное решение?**

Решение:

Система четна относительно переменной x, поэтому, если $\left(x_0;y_0\right)$ – решение системы, то $\left(-x_0;y_o\right)$ тоже является решением. Поэтому условие $x=0$ – необходимое для существования единственного решения, но не является достаточным. Система может иметь несколько решений вида $\left(0;y_0\right)$ или вообще решений не иметь.

Пусть $x=0$, тогда $\begin{cases} a=y+1 \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 1 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right. \end{cases}.$



Если $a=0$, то получим $\begin{cases} y+1-|x|=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=|x|-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$. Изобразив графики уравнений в системе координат, видим, что они имеют три точки пересечения. Значит, при $a=0$ система уравнений имеет три решения.

Если $a=2$, то получим $\begin{cases} 2x^4+|x|=y-1 \; (1) \\ x^2+y^2=1 \; (2) \end{cases}.$

$(1)\;\; 2x^4+|x|\geq 0,\ \text{тогда}\ y-1\geq 0,\quad y\geq 1$

$(2)\;\; x^2+y^2=1\ \text{и}\ y\leq 1$. Поэтому в сиситеме $y=1$, тогда $x^2+1=1,\ \ x=0$. Проверкой убеждаемся, что пара $(0;1)$ является решение и в силу ограниченности переменной y $\left(y\geq 1\ \text{и}\ y\leq 1\right)$ оно единственное.

Ответ: 2.