Тема: Рациональные уравнения

Профиль

- ЕГЭ Профиль/ ***Задание 18***

1. Системы линейных уравнений с параметром

2. Аналитические приемы решения систем уравнений с параметром

3. Геометрические приемы решения систем уравнений с параметром

1. Системы линейных уравнений с параметром

▪ *Примеры*

№1. При каком значении a система $\begin{cases} (a-2)x-2y=3 \\ 2x-(a+1)y=a+3 \end{cases}$ не имеет решений?

№2. При каком значении a система $\begin{cases} (a-3)x+4y=5 \\ 2x+(a+4)y=a+6 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№3. Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases} 2x+y=a \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $y^2<2x+3$.

№4. Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases} ax+y=1 \\ 3x-y=a \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x<y$.

№5. Для системы уравнений $\begin{cases} 2x-3y=2a^2-6a+2 \\ 3x+2y=3a^2+4a+3 \end{cases}$ определите, при каком значении параметра a сумма $x+y$ принимает наименьшее значение.

№6. При каких значениях a решение системы $\begin{cases} (a-2)x+2(a^2-2a)y=3a^2+16 \\ (a^2-2a)x-4(a-2)y=a^3+12a \end{cases}$ удовлетворяет условию $x-8y\le 0$?

№7. При каких значениях a и b система уравнений $\begin{cases} a^2x-by=a^2+2b \\ 4bx-b^2y=4-3b \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№8. Найдите все значения параметра p, при которых найдется не менее двух различных значений параметра q таких, что система $\begin{cases} (p-4)x+(p^2-7p+12)y=q^2-6q+5 \\ (p-1)x+8y=4pq \end{cases}$, имеет бесконечное множество решений.

▪ *Тест* 1. Системы линейных уравнений с параметром

№1. Определить значение параметра p, при котором система $\begin{cases} -8x+4y=-1 \\ 9x+py=3 \end{cases}$ не имеет решений.

№2. Определить значение параметра p, при котором система $\begin{cases} -3x-3y=-5 \\ 7x+py=7 \end{cases}$ не имеет решений.

№3. При каком значении a система $\begin{cases} (a-1)x-3y=2 \\ 2x+(a-8)y=a+2 \end{cases}$ не имеет решений?

№4. При каком значении a система $\begin{cases} (a+3)x+5y=1 \\ -2x+(a+14)y=a+6 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№5. Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases} x+y=a \\ 2x-y=3 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $y^2<x$.

№6. Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases} ax+ay=2 \\ x+2y=a \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x<y+4$.

№7. При каких значениях p и q система уравнений $\begin{cases} px+qy=3p+5 \\ qx+4py=6q-5p \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№8. При каких значениях a и b система уравнений $\begin{cases} b^2x+ay=2b^2+8a \\ ax+a^2y=2,25-5a \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

№9. При каких значениях a решение системы $\begin{cases} (a-1)x-(a^2-a)y=9-2a^2 \\ (a^2-a)x+3(a-1)y=a^3+18a \end{cases}$ удовлетворяет условию $x+2y\ge 0$?

- ***Ответы (тест)*** 1. Системы линейных уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9
-4,5	***7***	***7***	***-4***	$\left(0,\dfrac{15}{4}\right)$	$(-3,0)$; $(1,\infty)$	$p=10,\ q=20$; $p=\dfrac{10}{11},\ q=-\dfrac{20}{11}$	$\left(-\dfrac{9}{8};1\right);\left(-\dfrac{9}{8};-1\right)$; $\left(\dfrac{1}{4};1\right);\left(\dfrac{1}{4};-1\right)$	$\{-3\}$; $(1;\infty)$

2. Аналитические приемы решения систем уравнений с параметром

Примеры

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+5=2(2x+y) \\ a^2+ax+2ay=5 \end{cases}$ имеет решение.

№2. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x+y+z=2x^2+3y^2 \\ -x+2y+3z=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x-2a+2)^2+(y+a-2)^2=a+\dfrac{5}{2} \\ x+y=1-a \end{cases}$ имеет единственное решение.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a(x^2+y^2)-ax+(a-3)y+1=0 \\ xy-1=y-x \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№5. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2 \\ y^2=x^2 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№6. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4+y^2=a^2 \\ x^2+y=|a+1| \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№7. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+3-y=\left|y-2+\dfrac{3}{x}\right| \\ 2y(y-4)+3x(ax+4)=xy(2a+3) \end{cases}$ имеет больше трех решений.

№8. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-1 \\ x=(a+2)y^2+2ay+a-1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x \end{cases}$ имеет единственную пару решений.

№10. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

№11. Найти все значения параметра α из интервала $(0;\pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)\sin\alpha+8\sin^2\alpha=2\sin\alpha-1 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\sin\alpha+4\sin^2\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

▪ *Тест* 2. Аналитические приемы решения систем уравнений с параметром

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2+10=2(x+3y) \\ a^2+2ax+ay=-6 \end{cases}$ имеет решение.

№2. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x+y+2z=4x^2+y^2 \\ 2x+y+3z=-a \end{cases}$ имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x-a+3)^2+(y+a-2)^2=a+\dfrac{7}{2} \\ x-y=a-1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (a+1)(x^2+y^2)+(a-1)x+(a+1)y+2=0 \\ xy-1=x-y \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№5. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4+y^2=a^2-1 \\ x^2-y=|a-1| \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№6. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}=\left|y+\dfrac{2}{x}-3\right| \\ 2y(y+2)+3x(ax-2)=xy(2a+3) \end{cases}$ имеет больше трех решений.

№7. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=(a+2)x^2-(2a+1)x+a-3 \\ x=(a+2)y^2-(2a+1)y+a-3 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№8. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3x^2+3y^2+10xy=0 \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

№9. При каких значениях параметра а система уравнений $\begin{cases} a(x^4+1)=y+1-|x| \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

▪ ***Ответы (тест)*** 2. Аналитические приемы решения систем уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9
$-3;\ -2$	$-\dfrac{5}{96}$	*1 и 9*	$(-3;-1)$	$(-\infty;-3)$	$\left(-\dfrac{25}{16};-1,5\right);(-1,5;0);\left(0;\dfrac{19}{6}\right);\left(\dfrac{19}{6};\infty\right)$	$-\dfrac{7}{3};-2$	$-\dfrac{1}{5};\ \dfrac{1}{5}$	*2*

3. Геометрические приемы решения систем уравнений с параметром

▪ *Примеры*

№1. Найти наименьшее расстояние от точки $A(-4;4)$ до окружности $x^2+y^2-2x+16y+56=0$.

№2. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2+(y-a)^2=4 \\ y=3-|x| \end{cases}$ имеет ровно два решения?

№3. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} (x-a)^2+y^2=4 \\ |y|=x \end{cases}$ имеет ровно два решения?

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x-4)^2+(y-6)^2=25 \\ y=|x-a|+1 \end{cases}$ имеет ровно три решения.

№5. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} 4x+3y=13 \\ x^2+y^2=a^2 \\ 1\le x\le 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x-3a+1)^2+(y+2a)^2=a-1 \\ 4x+3y=a+1 \end{cases}$ имеет более одного решения.

№7. Найти все значения параметра, при которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

№8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x-1)(x+2)\le 0 \\ 8x^2+8y^2-16a(x-y)+15a^2-48y-50a+72=0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№9. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \dfrac{(x+|y|-2)(x^2+4x+y^2+2)}{x-2}=0 \\ y=\sqrt{a-5}\cdot x \end{cases}$ имеет ровно два различных решения?

№10. Найти все значения параметра, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a \end{cases}$ имеет единственное решение?

№11. Найти все значения параметра, при которых система $\begin{cases} x^2+8x+y^2+8y+23=0 \\ x^2-2a(x+y)+y^2+a^2=0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

№12. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=4 \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№13. Найти все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-2a(x+y)=-2a^2+a \\ x^2+y^2+4a(x-y)=-8a^2+9a \end{cases}$ имеет единственное решение?

№14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2+2(2y-x)a=1+2a-4a^2 \\ x^2+y^2+4(x-y)a=4+4a-7a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№15. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+2x+y^2+4y=4|2x-y| \\ x+2y=a \end{cases}$ имеет более двух решений.

№16. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x-2y-2=|x^2+y^2-1| \\ y=a(x-1) \end{cases}$ имеет более двух решений.

№17. При каких значениях a система $\begin{cases} x\left(3x^2+\dfrac{3y^2}{2}-\dfrac{y}{2}-3\right)=|x|\left(\dfrac{3y^2}{2}+\dfrac{y}{2}\right) \\ y=x+2a \end{cases}$ имеет ровно три различных решения? Найдите все возможные значения a.

№18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{x^2}{y^2}-2a\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\right)+a^2-2=0 \\ x^2+y^2-2a(x+y)=0 \end{cases}$$

не имеет решений.

№19. При каком значении a радиус окружности, вписанную в фигуру, заданную уравнением $3|x-2|=a-|y|$, равен $\sqrt{10}$?

№20. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2|xy-3y-4x+12|=a^2+2a-z-30 \\ 3a^2-a-z-32=0 \\ z-x^2-y^2+6x+8y=0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

№21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} 3|x-2a|+2|y-a|=6 \\ xy-x-2y+2=0 \end{cases}$

имеет ровно три различных решения.

№22. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{x^2}{y^2}-4a\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+4a^2+2=0 \\ |x+y-3|+|x-y|=1 \end{cases}$$

имеет два решения.

№23. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay-ax+2)(y-x+3a)=0 \\ |xy|=a \end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

▪ Тест 3. Геометрические приемы решения систем уравнений с параметром

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ |y-a|-x=5 \end{cases}$ имеет четыре решения.

№2. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 8x-15y=36 \\ x^2+y^2=a^2 \\ -4\le y\le 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x+2a)^2+(y+3a+1)^2=a+1 \\ 3x-4y=a-1 \end{cases}$$

имеет более одного решения.

№4. Найти все значения параметра, при которых система уравнений $\begin{cases} 3x^2+3y^2=10xy \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

№5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y+1)\le 0 \\ 3x^2+3y^2-6a(x+y)+5a^2-6x+4a+3=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№6. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(|y|-x-2)(x^2-4x+y^2+2)}{x+2}=0 \\ y=\sqrt{a-3}\cdot x \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения?

№7. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-2a+3)^2+(y-a)^2=2,25 \\ (x+3)^2+(y-a)^2=a^2+2a+1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№8. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-4)^2+(y-3)^2=4 \\ (x+1)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(2y-x)a=1-2a-4a^2 \\ x^2+y^2-4(x-y)a=4-4a-7a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

№10. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=4|2x-y-10| \\ x+2y=a \end{cases}$ имеет более двух решений.

№11. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y^2-x-2=|x^2-x-2| \\ x-y=a \end{cases}$ имеет более двух решений.

№12. При каких значениях a система $\begin{cases} 3x\left(2x^2+y^2-\dfrac{y}{2}-1\right)=|3x|\left(y^2+\dfrac{y}{2}\right) \\ y=x+a \end{cases}$ имеет ровно три различных решения? Найдите все возможные значения a.

№13. При каком значении a, радиус окружности, вписанной в фигуру, заданную уравнением $|x|+2|y-1|=a$, равен $2\sqrt{5}$?

№14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} |x-a|+2|y-a|=5 \\ xy-x-y+1=0 \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

№15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (ay+ax+4)(y+x+3a)=0 \\ |xy|=a \end{cases}$ имеет ровно шесть решений.

▪ *Ответы (тест)* 3. Геометрические приемы решения систем уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
$\left(5-4\sqrt{2};-5+4\sqrt{2}\right)$	$\dfrac{36}{17}$; $\left(5;4\sqrt{10}\right]$	$(-1;0)$	$\pm 0,2$	*0 и 1*	$3;\ [4;\infty)$	$\dfrac{1}{6}$ *и 2,5*	$3\sqrt{2}-2;$ $\sqrt{34}+2$

№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15
$(-\infty;-1);$ $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{5}\right);$ $\left(\dfrac{3}{7};\infty\right)$	$-5\sqrt{5}<a\le -5;$ $5\le a<5\sqrt{5}$	$\left(1-\sqrt{10};-2\right);$ 0	$\left(-\dfrac{9}{8};-1\right);$ $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right];$ $\{1\}$	*10*	$-1,5;$ $-\dfrac{2}{3};$ $\dfrac{8}{3};$ $3,5$	$\left(0;\dfrac{4}{9}\right);$ $\left(\sqrt[3]{4};\infty\right)$

✓ Линейное уравнение

Линейное уравнение вида $ax = b$, где x - переменная, a и b - параметры, имеет:

- Единственное решение $x = \dfrac{b}{a}$, если $\begin{cases} a \neq 0 \\ b - \text{любое число} \end{cases}$.
- Пустое множество решений, если $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ и уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$.
- Бесконечное множество решений, если $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ и уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$.

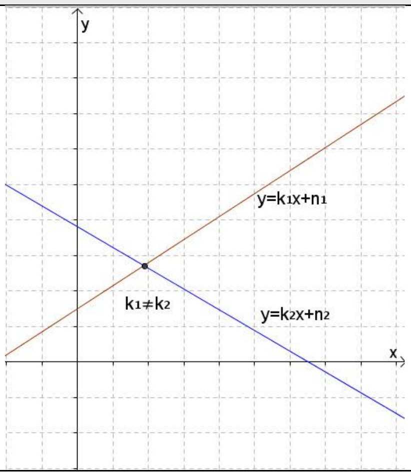
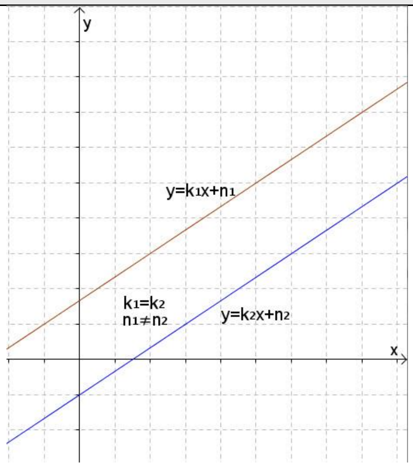
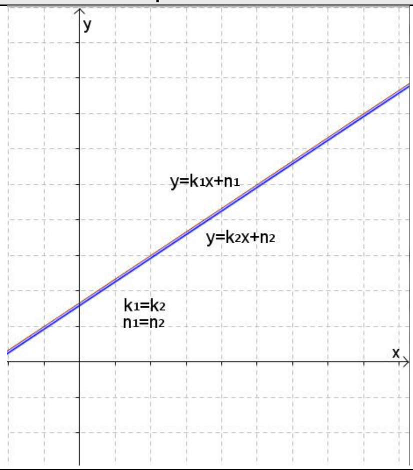
✓ Система линейных уравнений

Система линейных уравнений вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ имеет:

- Единственную пару решений $(x; y)$, если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.
- Пустое множество решений, если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.
- Бесконечное множество решений, если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Геометрическая интерпретация

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая.
Тогда система линейных уравнений имеет:

Единственную пару решений	Пустое множество решений	Бесконечное множество решений
		

✓ *Уравнение окружности* $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $(x_0; y_0)$ – координаты центра, R – радиус.

✓ *Расстояние между точками* $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.