Целые уравнения с параметром из вариантов ЕГЭ

Примеры

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2+2(a+2)x+(a+5)=0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

№2. Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2-6x+12+a^2-4a=0$ принимает наибольшее значение.

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(2x^2+x+3a^2+5)^2=12a^2(2x^2+x+5)$ имеет ровно один корень.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2+2x+2a)^2=5x^4+5(x+a)^2$ имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$.

№5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-ax\sqrt{3-2x-x^2}+a^2=0$ имеет хотя бы одно решение.

№6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^4+2x^3-8x^2+6ax-a^2=0$ имеет четыре различных корня.

№7. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^4-2x^3-4x^2+10x-5-2ax+6a-a^2=0$ имеет не менее трех корней.

№8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x+a-5)(x+a-4)(x+a-3)(x+a-2)=a^2-6a+8$ имеет четыре различных корня.

№9. При каких значениях a уравнения $(2x-1)a^2-(x^2-x+1)a-(x^3-4x^2+3)=0$ и $(5-3x)a^2+(5x^2-5x-2)a-(2x^3-8x^2+6)=0$ не имеют общего решения?

№10. Найти все значения a, при которых уравнение $((a-1)x^2+3x)^2-2((a-1)x^2+3x)+1-a^2=0$ имеет ровно два решения.

№11. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2-x+a^2+2)^2=4a^2(2x^2-x+2)$ имеет ровно три различных корня?

▪ *Решение (примеры)* Целые уравнения с параметром из вариантов ЕГЭ

№1. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2+2(a+2)x+(a+5)=0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.**

Решение:

Чтобы данное уравнение имело два корня, необходимо, чтобы оно было квадратным, т.е. $a\neq 0$.

Тогда найдем дискриминант квадратного уравнения: $\frac{D}{4}=(a+2)^2-a(a+5)=4-a$.

Исходя из условия, квадратное уравнение должно иметь два различных корня, что будет, если $4-a>0,\ \ a<4$.

Найдем корни: $x_{1,2}=\frac{-(a+2)\pm\sqrt{4-a}}{a}$. Расстояние между корнями больше 1, значит, $|x_1-x_2|>1$.

$$\left|\frac{-a-2+\sqrt{4-a}}{a}-\frac{-a-2-\sqrt{4-a}}{a}\right|>1$$

$$\left|\frac{2\sqrt{4-a}}{a}\right|>1,\quad \frac{4(4-a)}{a^2}>1,$$

$$\frac{a^2+4a-16}{a^2}<0,\quad \frac{\left(a-\left(-2+2\sqrt{5}\right)\right)\left(a-\left(-2-2\sqrt{5}\right)\right)}{a^2}<0$$

Учитывая, что $4>2\sqrt{5}-2$, получим $a\in\left(-2-2\sqrt{5};0\right)\cup\left(0;-2+2\sqrt{5}\right)$.

Ответ: $\left(-2-2\sqrt{5};0\right)\cup\left(0;-2+2\sqrt{5}\right)$.

№2. **Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2-6x+12+a^2-4a=0$ принимает наибольшее значение.**

Решение:

$$D/_4=9-\left(12+a^2-4a\right)=-a^2+4a-3$$

$$D/_4>0,\quad -a^2+4a-3>0,\quad a^2-4a+3<0,\quad (a-1)(a-3)<0,\quad 1<a<3$$

$$|x_1-x_2|\to\text{наибольшее},\quad |x_1-x_2|^2=(x_1-x_2)^2\to\text{наибольшее}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=6\\ x_1\cdot x_2=a^2-4a+12\end{cases}$$

$$(x_1+x_2)^2=36,\quad x_1^2+x_2^2=36-2x_1\cdot x_2$$

$$(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1\cdot x_2=36-4x_1\cdot x_2=36-4\left(a^2-4a+12\right)=-4a^2+16a-12$$

Квадратичная функция $f(a)=-4a^2+16a-12$, графиком которой является парабола с ветвями,

направленными вниз, принимает наибольшее значение в точке максимума $a_{\max}=-\frac{16}{2\cdot(-4)}=2\in(1;3)$.

Ответ: 2.

№3. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(2x^2+x+3a^2+5\right)^2=12a^2\left(2x^2+x+5\right)$ имеет ровно один корень.**

Решение:

Пусть $t=2x^2+x+5$, тогда уравнение примет вид

$$\left(t+3a^2\right)^2=12a^2\cdot t$$
$$t^2+6a^2\cdot t-12a^2\cdot t+9a^4=0$$
$$t^2-6a^2\cdot t+9a^4=0$$
$$\left(t-3a^2\right)^2=0;\quad t=3a^2$$

Вернемся к замене: $3a^2=2x^2+x+5;\quad 2x^2+x+5-3a^2=0$. Это квадратное уравнение имеет единственный корень только тогда, когда его дискриминант равен 0.

$$D=1-4\cdot2\cdot\left(5-3a^2\right)=24a^2-39,$$
$$24a^2-39=0,\quad a=\pm\sqrt{\frac{39}{24}}=\pm\sqrt{\frac{13}{8}}=\pm\frac{\sqrt{26}}{4}$$

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{26}}{4}$.

№4. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(x^2+2x+2a\right)^2=5x^4+5\left(x+a\right)^2$ имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$.**

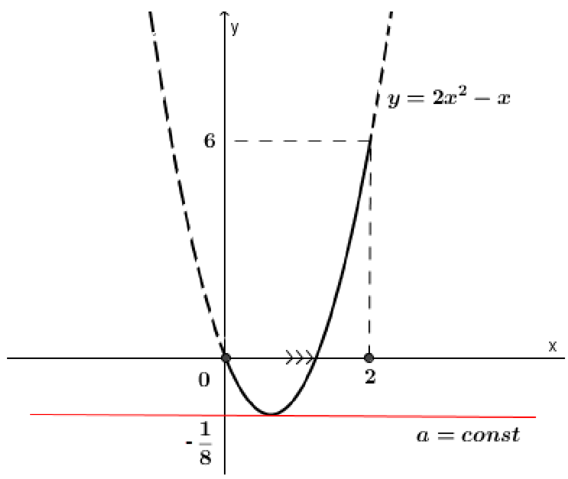
Решение:

$$\left(x^2+2\left(x+a\right)\right)^2=5x^4+5\left(x+a\right)^2$$
$$x^4+4\left(x+a\right)\cdot x^2+4\left(x+a\right)^2-5x^4-5\left(x+a\right)^2=0$$
$$4x^4-4\left(x+a\right)\cdot x^2+\left(x+a\right)^2=0$$
$$\left(2x^2-x-a\right)^2=0;\quad 2x^2-x-a=0;\quad a=2x^2-x$$
$$\begin{cases} y=a \\ y=2x^2-x \end{cases}\quad x\in[0;2]$$

Вершина параболы $y=2x^2-x$

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{4}=\frac{1}{4}$$
$$y_в=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$$

$$y(0)=0,\quad y(2)=6$$



Графики имеют единственную общую точку на отрезке $[0;2]$, а значит, и уравнение имеет единственное решение при $a=-\frac{1}{8}$ и $a\in(0;6]$

Ответ: $-\frac{1}{8};\ (0;6]$.

№5. **Найти все значения параметра** a **, при каждом из которых уравнение** $x^2 - ax\sqrt{3-2x-x^2} + a^2 = 0$ **имеет хотя бы одно решение.**

Решение:

Относительно параметра данное уравнение является квадратным. Найдем множество допустимых значений переменной x: $3-2x-x^2 \ge 0, \quad -3 \le x \le 1$.

$$a^2 - a\cdot x\sqrt{3-2x-x^2} + x^2 = 0$$

$$D = \left(x\sqrt{3-2x-x^2}\right) - 4\cdot x^2 = x^2\cdot\left(3-2x-x^2\right) - 4x^2 = -x^4 - 2x^3 - x^2$$

$$D = -x^2\left(x+1\right)^2$$

Квадратное уравнение имеет хотя бы одно решение, если его дискриминант неотрицателен.

$$D \ge 0, \quad -x^2\left(x+1\right)^2 \ge 0$$

$$x^2\left(x+1\right)^2 \le 0$$

$$x^2\left(x+1\right)^2 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = -1$$

Если $x = 0 \in \left[-3;1\right]$, то подставим это значение в исходное уравнение, получим $a = 0$. Значит, при $a = 0$ уравнение имеет корень $x = 0$.

Если $x = -1 \in \left[-3;1\right]$, то подставим это значение в исходное уравнение, получим

$$1 + a\sqrt{3+2-1} + a^2 = 0, \; a^2 + 2a + 1 = 0, \; \left(a+1\right)^2 = 0, \; a = -1 .$$

Значит, при $a = -1$ уравнение имеет корень $x = -1$.

Ответ: 0 и -1.

№6. **Найти все значения параметра** a **, при которых уравнение** $x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 6ax - a^2 = 0$ **имеет четыре различных корня.**

Решение:

Относительно параметра данное уравнение является квадратным. Найдем его корни.

$$a^2 - 6ax - x^4 - 2x^3 + 8x^2 = 0$$

$$D/4 = 9x^2 + x^4 + 2x^3 - 8x^2 = \left(x + x^2\right)^2$$

$$a_1 = 3x + x + x^2 = x^2 + 4x, \quad a_2 = 3x - x - x^2 = 2x - x^2$$

$$\left(a - x^2 - 4x\right)\left(a - 2x + x^2\right) = 0$$

$$\left(x^2 + 4x - a\right)\left(x^2 - 2x + a\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 4x - a = 0 \\ x^2 - 2x + a = 0 \end{array}\right.$$

Уравнение будет иметь четыре корня, если каждое уравнение из совокупности будет иметь по два различных корня и, при этом, они не совпадают между собой.

$$\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4 + a > 0 \\ 1 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -4 \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-4;1\right).$$

Исключим совпадения корней, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4x - a = 0 \\ x^2 - 2x + a = 0 \end{cases} \boxed{+}; \quad 2x^2 + 2x = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -3 \end{array}\right.$$

Значит, при $a \in \left(-4;-3\right) \cup \left(-3;0\right) \cup \left(0;1\right)$ уравнение будет иметь четыре различных корня.

Ответ: $\left(-4;-3\right) \cup \left(-3;0\right) \cup \left(0;1\right)$.

№7. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^4-2x^3-4x^2+10x-5-2ax+6a-a^2=0$ имеет не менее трех корней.

Решение:

Относительно параметра данное уравнение является квадратным. Найдем его корни.

$$x^4-2x^3-4x^2+10x-5-2ax+6a-a^2=0$$

$$a^2+2(x-3)\cdot a-\left(x^4-2x^3-4x^2+10x-5\right)=0$$

$$D/4=(x-3)^2+x^4-2x^3-4x^2+10x-5=x^4-2x^3-3x^2+4x+4=$$

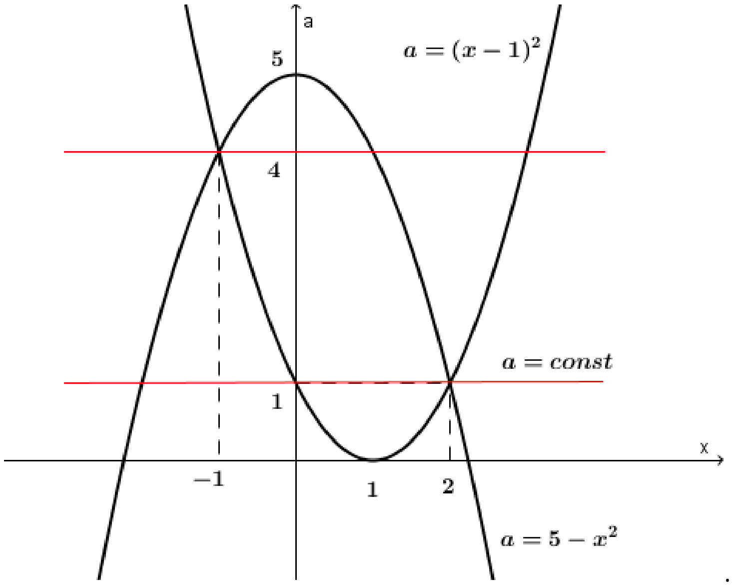
$$=x^3(x-2)-3x^2+6x-2x+4=x^3(x-2)-3x(x-2)-2(x-2)=$$

$$=(x-2)\left(x^3-3x-2\right)=(x-2)^2(x+1)^2$$

$$a_1=-(x-3)+(x-2)(x+1)=(x-1)^2,\quad a_2=-(x-3)-(x-2)(x+1)=5-x^2$$

$$\left[\begin{array}{l}a=(x-1)^2\\ a=5-x^2\end{array}\right.$$

В системе координат xOa уравнение задает совокупность двух парабол, имеющих общие точки $(-1;4)$ и $(2;1)$. Вершины парабол расположены в точках $(0;5)$ и $(1;0)$.



Уравнение имеет 3 корня и более при $0\le a\le 5$.

Ответ: $[0;5]$.

№8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x+a-5)(x+a-4)(x+a-3)(x+a-2)=a^2-6a+8$ имеет четыре различных корня.

Решение:

$$(x+a-5)\underbrace{(x+a-4)(x+a-3)}(x+a-2)=a^2-6a+8$$

$$(x^2+a^2+2ax-7x-7a+10)(x^2+a^2+2ax-7x-7a+12)=a^2-6a+8$$

$$t=x^2+a^2+2ax-7x-7a+12$$

$$(t-2)t=a^2-6a+8,\ \ t^2-2t-a^2+6a-8=0,\ \ D/4=(a-3)^2,\ \ t_1=a-2,\ \ t_2=4-a$$

Обратная замена.

$$(1)\ \ x^2+a^2+2ax-7x-7a+12=a-2 \quad \text{или} \quad (2)\ \ x^2+a^2+2ax-7x-7a+12=4-a$$

$$x^2+(2a-7)x+a^2-8a+14=0 \qquad\qquad x^2+(2a-7)x+a^2-6a+8=0$$

Уравнение будет иметь четыре корня, если каждое уравнение из совокупности будет иметь по два различных корня и, при этом, они не совпадают между собой.

$$\begin{cases} D_1>0 \\ D_2>0 \end{cases};\ \ \begin{cases} (2a-7)^2-4a^2+32a-56>0 \\ (2a-7)^2-4a^2+24a-32>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{7}{4} \\ a<\dfrac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(\frac{7}{4};\frac{17}{4}\right).$$

Исключим совпадения корней, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+(2a-7)x+a^2-8a+14=0 \\ x^2+(2a-7)x+a^2-6a+8=0 \end{cases}\boxed{-}$$

$$2a-6=0,\ \ a=3$$

Значит, при $a\in(1,75;3)\cup(3;4,25)$ уравнение будет иметь четыре различных корня.

Ответ: $(1,75;3)\cup(3;4,25)$.

№9. При каких значениях a уравнения $(2x-1)a^2-(x^2-x+1)a-(x^3-4x^2+3)=0$ и $(5-3x)a^2+(5x^2-5x-2)a-(2x^3-8x^2+6)=0$ не имеют общего решения?

Решение:

Предположим, что общие решения есть, тогда решим систему из данных уравнений.

$$\boxed{-}\begin{cases} (2x-1)a^2-(x^2-x+1)a-(x^3-4x^2+3)=0 \quad |\cdot 2 \\ (5-3x)a^2+(5x^2-5x-2)a-(2x^3-8x^2+6)=0 \end{cases}$$

$$a^2(7x-7)-a(7x^2-7x)=0$$

$$a(x-1)(x-a)=0,\qquad a=0 \qquad x=1 \qquad x=a$$

При $a=0$ получим уравнения $x^3-4x^2+3=0$ и $2x^3-8x^2+6=0$, которые имеют одинаковые корни.

При $x=1$ получим уравнения $a^2-a=0$ и $2a^2-2a=0$, тогда при $a=0$ и $a=1$ есть общее решение.

При $x=a$ получим уравнения $4a^2-a-3=0$ и $8a^2-2a-6=0$, которые имеют одинаковые корни $a=1$ и $a=-\dfrac{3}{4}$. Тогда при $a=-\dfrac{3}{4}$ и $a=1$ уравнения имеют общие решения.

Значит, исключая все значения a, при которые уравнения имеют общие корни, получим, что при $a\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{4};0\right)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$ уравнения общих решений не имеют.

Ответ: $a\neq-0,75;\ \ a\neq0;\ \ a\neq1$.

№10. Найти все значения a, при которых уравнение $\left((a-1)x^2+3x\right)^2-2\left((a-1)x^2+3x\right)+1-a^2=0$ имеет ровно два решения.

Решение:

Пусть $t=(a-1)x^2+3x$, тогда уравнение примет вид $t^2-2t+1-a^2=0$, его корни $t_1=a+1$ и $t=1-a$. Значит, решения исходного уравнения - это решения уравнений $(a-1)x^2+3x=a+1$ или $(a-1)x^2+3x=1-a$. Исследуем эти уравнения на количество корней.

$$\left[\begin{array}{l}(a-1)x^2+3x=a+1 \quad (1)\\(a-1)x^2+3x=1-a \quad (2)\end{array}\right.$$

1) При $a=1$ получим $\left[\begin{array}{l}3x=2\\3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\x=0\end{array}\right.$ - два решения, значит, $a=1$ подходит.

2) Найдем значения a, при которых корни уравнений (1) и (2) совпадают. Для этого решим систему из этих уравнений.

$\left\{\begin{array}{l}(a-1)x^2+3x=a+1\\(a-1)x^2+3x=1-a\end{array}\right. \boxed{-} \Rightarrow a=0$. Получим одинаковые уравнения вида $-x^2+3x-1=0$, которое имеет два решения.

3) Исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений **(1) или (2)** имеет два различных корня, а другое корней не имеет.

$$\left\{\begin{array}{l}D_1>0\\D_2<0\end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l}D_1<0\\D_2>0\end{array}\right..$$

Так как $D_1=9-4(a-1)(-a-1)=9+4\left(a^2-1\right)>0$ при любых a, $D_2=9-4(a-1)^2<0$.

$$\left(3-2(a-1)\right)\left(3+2(a-1)\right)<0$$

$$(2a-5)(2a+1)>0, \quad a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};\infty\right)$$

Итак, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a<-\dfrac{1}{2}, \quad a=0, \quad a=1, \quad a>\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right);\ 0;\ 1;\ \left(\dfrac{5}{2};\infty\right)$.

№11. При каких значениях параметра a уравнение $\left(x^2-x+a^2+2\right)^2=4a^2\left(2x^2-x+2\right)$ имеет ровно три различных корня?

Решение:

$$\left(x^2-x+2+a^2\right)^2-4a^2\left(x^2-x+2+x^2\right)=0$$

$$\left(x^2-x+2\right)^2+2a^2\left(x^2-x+2\right)+a^4-4a^2\left(x^2-x+2\right)-4a^2x^2=0$$

$$\left(x^2-x+2-a^2\right)^2=4a^2x^2$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2-x+2-a^2=2ax\\x^2-x+2-a^2=-2ax\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x(2a+1)+2-a^2=0 \quad (1)\\x^2-x(1-2a)+2-a^2=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

Исходное уравнение будет иметь три различных корня, если три решения будет иметь совокупность уравнений (1) и (2).

1) Исключим совпадение корней, решив систему уравнений (1) и (2).

$$\begin{cases} x^2 - x(2a+1) + 2 - a^2 = 0 \\ x^2 - x(1-2a) + 2 - a^2 = 0 \end{cases} \boxed{-}$$

$$x(1-2a) - x(2a+1) = 0$$

$$x \cdot (-4a) = 0$$

$$x = 0 \quad a = 0$$

При $a = 0$ получим одинаковые уравнения $x^2 - x + 2 = 0$, которое не имеет решений.
При $x = 0$ получим одинаковые уравнения $a^2 = 2$ и $a = \pm\sqrt{2}$. При таких значения a совокупность уравнений имеет три решения $x = 0$, $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$.

2) Одно из уравнений имеет единственное решение, а другое два различных.

(а) $\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 > 0 \end{cases}$ или (б) $\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 = 0 \end{cases}$, где $D_1 = 8a^2 + 4a - 7$ и $D_2 = 8a^2 - 4a - 7$.

(а) $$\begin{cases} 8a^2 + 4a - 7 = 0 \\ 8a^2 - 4a - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \\ a < \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad a > \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

(б) $$\begin{cases} 8a^2 + 4a - 7 > 0 \\ 8a^2 - 4a - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad a > -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} \\ a = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Итак, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при $a = \pm\sqrt{2}$, $a = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}$ и $a = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}, \ -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}, \ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}$.

▪ Тест Целые уравнения с параметром из вариантов ЕГЭ

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2-15x-14+a^2-10a=0$ принимает наибольшее значение.

№2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2+2(a+3)x+(a+4)=0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.

№3. Найдите наименьшее натуральное значение a, при котором расстояние между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $(x-a+4)(x^2-ax+4a-17)=0$ не меньше 9.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2+x+2a^2+1)^2=8a^2(x^2+x+1)$ имеет ровно один корень.

№5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2+x+a)^2=2x^4+2(x+a)^2$ имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$.

№6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-ax\sqrt{4-4x-x^2}+2a^2=0$ имеет хотя бы одно решение.

№7. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^4-4x^3-6x^2+4ax+6a-a^2=0$ имеет не менее трех корней.

№8. При каких значениях параметра a уравнение $(|x-2|-a-4)(a+6+x^2-4x)=0$ имеет ровно три различных корня?

№9. Найти все значения a, при которых уравнение $(ax^2-2x)^2+(a^2-a+2)(ax^2-2x)-a^2(a-2)=0$ имеет ровно два решения.

№10. Найти все значения a, при которых уравнение $\left(x+\dfrac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\dfrac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0$ имеет ровно четыре решения.

▪ *Ответы (тест)* Целые уравнения с параметром из вариантов ЕГЭ

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10
5	$(1-\sqrt{10};0)$; $(0;1+\sqrt{10})$	***17***	$\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$	$-\frac{1}{4}$; $(0;2]$	*0;* $-\sqrt{2}$	$[0;10]$	***-4 и -2***	-2; 0; $(1;\infty)$	$(-\infty;-2);(2;3)$; $\left(3;\frac{7}{2}\right);\left(\frac{11}{2};\infty\right)$

▪ *Решение (тест)* Целые уравнения с параметром из вариантов ЕГЭ

№1. **Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2-15x-14+a^2-10a=0$ принимает наибольшее значение.**

Решение:

$$D=225-4\left(a^2-10a-14\right)=4a^2+40+281,\quad D>0$$

$$|x_1-x_2|\to \text{наибольшее},\quad |x_1-x_2|^2=(x_1-x_2)^2\to \text{наибольшее}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=15 \\ x_1\cdot x_2=a^2-10a-14 \end{cases}$$

$$(x_1+x_2)^2=225,\quad x_1^2+x_2^2=225-2x_1\cdot x_2$$

$$(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1\cdot x_2=36-4x_1\cdot x_2=225-4\left(a^2-10a-14\right)=-4a^2+40a+281$$

Квадратичная функция $f(a)=-4a^2+40a+281$, графиком которой является парабола с ветвями, направленными вниз, принимает наибольшее значение в точке максимума $a_{\max}=-\dfrac{40}{2\cdot(-4)}=5$.

При $a=5$ дискриминант квадратного уравнения положителен.

Ответ: 5.

№2. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2+2(a+3)x+(a+4)=0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.**

Решение:

Чтобы данное уравнение имело два корня, необходимо, чтобы оно было квадратным, т.е. $a\neq 0$.

Тогда найдем дискриминант квадратного уравнения: $\dfrac{D}{4}=(a+3)^2-a(a+4)=2a+9$.

Исходя из условия, квадратное уравнение должно иметь два различных корня, что будет, если $2a+9>0,\ \ a>-4{,}5$.

Найдем корни: $x_{1,2}=\dfrac{-(a+3)\pm\sqrt{2a+9}}{a}$. Расстояние между корнями больше 2, значит, $|x_1-x_2|>2$.

$$\left|\frac{-a-3+\sqrt{2a+9}}{a}-\frac{-a-3-\sqrt{2a+9}}{a}\right|>2$$

$$\left|\frac{2\sqrt{2a+9}}{a}\right|>2,\quad \frac{4(2a+9)}{a^2}>4,$$

$$a^2-2a-9<0,\quad 1-\sqrt{10}<a<1+\sqrt{10}$$

Учитывая, что $1-\sqrt{10}>-4{,}5$ и $a\neq 0$, получим $a\in\left(1-\sqrt{10};0\right)\cup\left(0;1+\sqrt{10}\right)$.

Ответ: $a\in\left(1-\sqrt{10};0\right)\cup\left(0;1+\sqrt{10}\right)$.

№3. Найдите наименьшее натуральное значение a, при котором расстояние между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $(x-a+4)(x^2-ax+4a-17)=0$ не меньше 9.

Решение:

$$(x-a+4)(x^2-ax+4a-17)=0$$

$$x_1=a-4 \qquad x^2-ax+4a-17=0$$

$$D=a^2-4(4a-17)=a^2-16a+68>0 \text{ при всех } a.$$

$$x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-16a+68}}{2} \qquad x_3=\frac{a+\sqrt{a^2-16a+68}}{2}$$

$$x_2<x_3$$

1) Если $x_1<x_2<x_3$, то должно выполняться условие $x_3-x_1\ge 9$.

$$\frac{a+\sqrt{a^2-16a+68}}{2}-(a-4)\ge 9$$

$$\sqrt{a^2-16a+68}\ge a+10, \quad \uparrow^2 \quad (a\in\mathbb{N})$$

$$a^2-16a+68\ge a^2+20a+100$$

$$a\le -\frac{32}{36} \text{ нет натуральных значений}$$

2) Если $x_2<x_1<x_3$, то должно выполняться условие $x_3-x_2\ge 9$.

$$\frac{a+\sqrt{a^2-16a+68}}{2}-\frac{a-\sqrt{a^2-16a+68}}{2}\ge 9$$

$$\sqrt{a^2-16a+68}\ge 9$$

$$a^2-16a+68\ge 81$$

$$a^2-16a-13\ge 0, \quad \left(a-\left(8-\sqrt{77}\right)\right)\left(a-\left(8+\sqrt{77}\right)\right)\ge 0$$

$$a\in\left(-\infty;8-\sqrt{77}\right]\cup\left[8+\sqrt{77};\infty\right), \quad a\in\mathbb{N}, \quad a\in\{17;18;\ldots\}, \quad a_{наим}=17$$

3) Если $x_2<x_3<x_1$, то должно выполняться условие $x_1-x_2\ge 9$.

$$(a-4)-\frac{a-\sqrt{a^2-16a+68}}{2}\ge 9$$

$$\sqrt{a^2-16a+68}\ge 26-a,$$

$$а) \begin{cases} 0\le 26-a \\ a^2-16a+68\ge a^2-52a+676 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\le 26 \\ a\ge 16\frac{8}{9} \end{cases}; \quad a\in\left[16\frac{8}{9};26\right], \quad a\in\mathbb{N}, \quad a_{наим}=17$$

$б)$ Если $26-a<0$, $a>26$, то неравенство $\sqrt{a^2-16a+68}\ge 26-a$ верно.

$a\in\mathbb{N}$, $a_{наим}=27$

Получим, что наименьшее натуральное значение $a=17$.

Ответ: 17.

№4. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(x^2+x+2a^2+1\right)^2=8a^2\left(x^2+x+1\right)$ имеет ровно один корень.**

Решение:

Пусть $t=x^2+x+1$, тогда уравнение примет вид

$$\left(t+2a^2\right)^2=8a^2\cdot t$$
$$t^2+4a^2\cdot t-8a^2\cdot t+4a^4=0$$
$$t^2-4a^2\cdot t+4a^4=0$$
$$\left(t-2a^2\right)^2=0;\quad t=2a^2$$

Вернемся к замене: $2a^2=x^2+x+1;\quad x^2+x+1-2a^2=0$. Это квадратное уравнение имеет единственный корень только тогда, когда его дискриминант равен 0.

$$D=1-4\cdot\left(1-2a^2\right)=8a^2-3,$$
$$8a^2-3=0,\quad a=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}=\pm\sqrt{\frac{6}{16}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Ответ: $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

№5. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(x^2+x+a\right)^2=2x^4+2\left(x+a\right)^2$ имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$.**

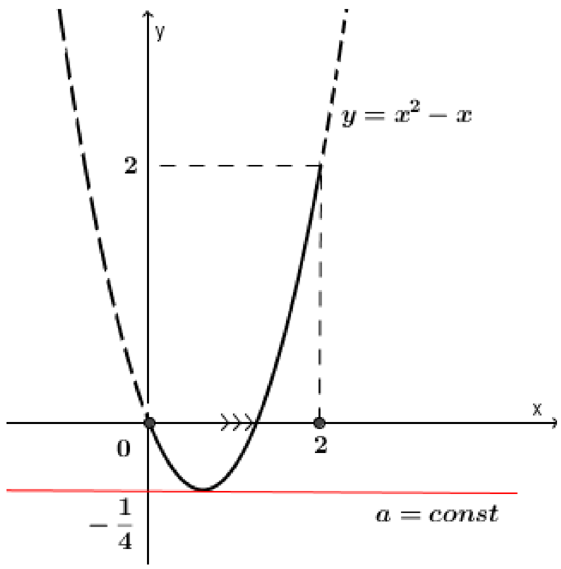
Решение:

$$\left(x^2+\left(x+a\right)\right)^2=2x^4+2\left(x+a\right)^2$$
$$x^4+2\left(x+a\right)\cdot x^2+\left(x+a\right)^2-2x^4-2\left(x+a\right)^2=0$$
$$x^4-2\left(x+a\right)\cdot x^2+\left(x+a\right)^2=0$$
$$\left(x^2-x-a\right)^2=0;\quad x^2-x-a=0;\quad a=x^2-x$$
$$\begin{cases} y=a \\ y=x^2-x \end{cases}\quad x\in[0;2]$$

Вершина параболы $y=x^2-x$

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$y_в=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$y(0)=0,\quad y(2)=2$$



Графики имеют единственную общую точку на отрезке $[0;2]$, а значит, и уравнение имеет единственное решение при $a=-\dfrac{1}{4}$ и $a\in(0;2]$

Ответ: $-\dfrac{1}{4};\ (0;2]$.

№6. **Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - ax\sqrt{4-4x-x^2} + 2a^2 = 0$ имеет хотя бы одно решение.**

Решение:

Левая часть уравнения имеет смысл при $4-4x-x^2 \ge 0$. Относительно параметра данное уравнение является квадратным.

$$2a^2 - ax\sqrt{4-4x-x^2} + x^2 = 0$$

$$D = \left(x\sqrt{4-4x-x^2}\right)^2 - 4\cdot 2x^2 = x^2\cdot\left(4-4x-x^2\right) - 8x^2 = -x^4 - 4x^3 - 4x^2$$

$$D = -x^2\left(x+2\right)^2$$

Квадратное уравнение имеет хотя бы одно решение, если его дискриминант неотрицателен.

$$D \ge 0, \quad -x^2\left(x+2\right)^2 \ge 0, \quad x^2\left(x+2\right)^2 \le 0$$

$$x^2\left(x+2\right)^2 = 0, \quad x = 0 \quad x = -2$$

Если $x = 0$, то подставим это значение в исходное уравнение, получим $a^2 = 0, \ a = 0$. Значит, при $a = 0$ уравнение имеет корень $x = 0$.

Если $x = -2$, то подставим это значение в исходное уравнение, получим

$$4 + 2a\sqrt{4+8-4} + 2a^2 = 0, \ a^2 + 2\sqrt{2}a + 2 = 0, \ \left(a+\sqrt{2}\right)^2 = 0, \ a = -\sqrt{2}.$$

Значит, при $a = -\sqrt{2}$ уравнение имеет корень $x = -2$.

Ответ: 0 и $-\sqrt{2}$.

№7. **Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4ax + 6a - a^2 = 0$ имеет не менее трех корней.**

Решение:

$$\underline{x^4}\underline{\underline{-4x^3}} - 6x^2 \underline{\underline{+4ax}} + 6a \underline{-a^2} = 0$$

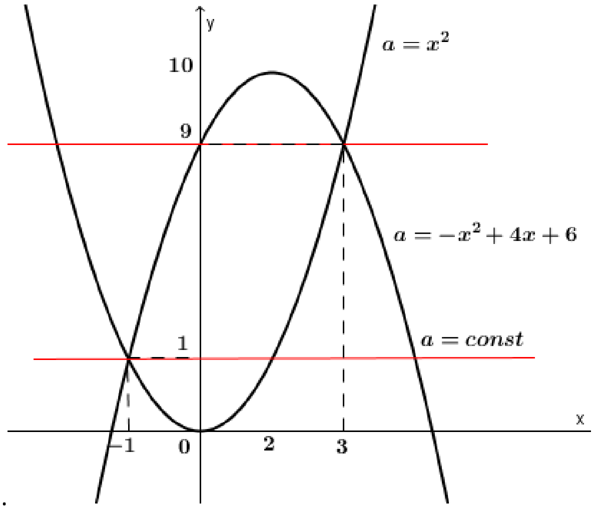
$$x^4 - a^2 - 4x\left(x^2 - a\right) - 6\left(x^2 - a\right) = 0$$

$$\left(x^2 - a\right)\left(x^2 + a\right) - 4x\left(x^2 - a\right) - 6\left(x^2 - a\right) = 0$$

$$\left(x^2 - a\right)\left(x^2 + a - 4x - 6\right) = 0$$

$$a = x^2 \qquad a = -x^2 + 4x + 6$$

В системе координат xOa уравнение задает совокупность двух парабол, имеющих общие точки $(-1;1)$ и $(3;9)$. Вершины парабол расположены в точках $(0;0)$ и $(2;10)$.



Уравнение имеет 3 корня и более при $0 \le a \le 10$.

Ответ: $[0;10]$.

№8. **При каких значениях параметра a уравнение $(|x-2|-a-4)(a+6+x^2-4x)=0$ имеет ровно три различных корня?**

Решение:

$$(|x-2|-a-4)(a+6+x^2-4x)=0$$

$$\left[\begin{aligned}&|x-2|-a-4=0\\&a+6+x^2-4x=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&|x-2|=a+4 \qquad (1)\\&(x-2)^2=-a-2 \quad (2)\end{aligned}\right.$$

Исходное уравнение будет иметь три различных корня, если три решения будет иметь совокупность уравнений (1) и (2).

1) Уравнение (1) имеет один корень, если $|x-2|=0$, т.е. при $a=-4$. Уравнение (2) при таком значении a принимает вид $(x-2)^2=2$ и оно имеет два решения. Значит, всего исходное уравнение будет иметь три корня.

2) Уравнение (2) имеет один корень, если $(x-2)^2=0$, т.е. при $a=-2$. Уравнение (1) при таком значении a принимает вид $|x-2|=2$ и оно имеет два решения. Значит, всего исходное уравнение будет иметь три корня.

3) У каждого из уравнений совокупности по два различных корня, но есть один совпадающий корень. Найдем значение a, при котором корни уравнений (1) и (2) совпадают, решив систему уравнений.

$$\begin{cases}|x-2|=a+4\\(x-2)^2=-a-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\ge -4\\(x-2)^2=(a+4)^2\\(x-2)^2=-a-2\end{cases}$$

$$a^2+8a+16=-a-2$$

$$a^2+9a+18=0,\quad a_1=-3,\quad a_2=-6$$

Учитывая, что $a\ge -4$, получим $a=-3$. Выполним проверку, подставив $a=-3$ в систему уравнений.

$$\begin{cases}|x-2|=1\\(x-2)^2=1\end{cases} \Leftrightarrow x=1,\quad x=3.$$

Получим, что исходное уравнение при $a=-3$ имеет только два корня.
Значит, при $a=-4$ и $a=-2$ уравнение имеет ровно три различных корня.

Ответ: -4 и -2.

№9. Найти все значения a, при которых уравнение
$\left(ax^2-2x\right)^2+\left(a^2-a+2\right)\left(ax^2-2x\right)-a^2\left(a-2\right)=0$ имеет ровно два решения.

Решение:

Пусть $t=ax^2-2x$, тогда уравнение примет вид $t^2+\left(a^2-a+2\right)t-a^2\left(a-2\right)=0$, его корни $t_1=a-2$ и $t=-a^2$.

Значит, решения исходного уравнения - это решения уравнений $ax^2-2x=a-2$ или $ax^2-2x=-a^2$.
Исследуем эти уравнения на количество корней.

$$\left[\begin{array}{ll} ax^2-2x=a-2 & (1) \\ ax^2-2x=-a^2 & (2) \end{array}\right.$$

1) При $a=0$ получим $\left[\begin{array}{l} -2x=-2 \\ -2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$ - два решения, значит, $a=0$ подходит.

2) Найдем значения a, при которых корни уравнений (1) и (2) совпадают. Для этого решим систему из этих уравнений.

$$\begin{cases} ax^2-2x=a-2 \\ ax^2-2x=-a^2 \end{cases} \boxed{-} \Rightarrow a^2+a-2=0,\ \ a=-2,\ \ a=1.$$

При $a=-2$ получим одинаковые уравнения вида $-2x^2-2x=-4$, которое имеет два различных решения.
При $a=1$ получим одинаковые уравнения вида $x^2-2x=-1$, которое имеет единственное решение.

3) Исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений (1) или (2) имеет два различных корня, а другое корней не имеет.

$$\left[\begin{array}{l} ax^2-2x=a-2 \\ ax^2-2x=-a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} ax^2-2x-a+2=0 & (1) \\ ax^2-2x+a^2=0 & (2) \end{array}\right.$$

$D_1/4=\left(a-1\right)^2>0$ при $a\neq1$, уравнение (1) имеет два различных корня $x_1=1$ и $x_2=\dfrac{2-a}{a}$.

$D_2/4=1-a^3$, уравнение (2) не имеет корней, если $1-a^3<0,\ \ a>1$.

4) Каждое из уравнений (1) и (2) имеет единственное решение и эти решения различны. $D_1=0$ и $D_2=0$ при $a=1$, при этом значении a установили ранее, что уравнение имеет единственное решение.

Итак, при $a=-2$, $a=0$ и $a>1$ исходное уравнение имеет ровно два решения.

Ответ: $-2;\ 0;\ \left(1;\infty\right)$.

№10. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0$$ **имеет ровно четыре решения.**

Решение:

Пусть $t=x+\dfrac{1}{x-a}$, тогда уравнение примет вид $t^2-(a+9)t+2a(9-a)=0$, его корни $t_1=2a$ и $t=9-a$.

Значит, решения исходного уравнения - это решения уравнений $x+\dfrac{1}{x-a}=2a$ или $x+\dfrac{1}{x-a}=9-a$.

Исследуем эти уравнения на количество корней.

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x-a}=2a \\ x+\dfrac{1}{x-a}=9-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x^2-3ax+2a^2+1=0 & (1) \\ x^2-9x+9a-a^2+1=0 & (2) \end{array}\right. \\ x\neq a \end{cases}$$

1) Подставим $x=a$ в уравнения совокупности, получим, что $1=0$ - неверно, значит, нет таких значений a, при которых $x=a$ является корнем уравнения.

2) Найдем значения a, при которых корни уравнений (1) и (2) совпадают. Для этого решим систему из этих уравнений.

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x-a}=2a \\ x+\dfrac{1}{x-a}=9-a \end{cases} \Rightarrow 2a=9-a,\ a=3.$$

При $a=3$ получим уравнение $x^2-9x+19=0$, оба корня которого не равны 3, т.е. выполняется $x\neq a$. Исходное уравнение имеет два различных решения.

3) Исходное уравнение имеет ровно четыре решения, если каждое из уравнений (1) и (2) имеет два различных корня $\begin{cases} D_1>0 \\ D_2>0 \end{cases}$.

Так как $D_1=a^2-4$, $D_2=4a^2-36a+79$, то

$$\begin{cases} a^2-4>0 \\ 4a^2-36a+79>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a+2)>0 \\ \left(a-\dfrac{11}{2}\right)\left(a-\dfrac{7}{2}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\infty;-2)\cup\left(2;\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{2};\infty\right).$$

Исключим из полученного промежутка значение $a=3$, тогда получим, что исходное уравнение имеет ровно четыре решения при $a\in(-\infty;-2)\cup(2;3)\cup\left(3;\dfrac{7}{2}\right)\cup\left(\dfrac{11}{2};\infty\right)$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(2;3)\cup\left(3;\dfrac{7}{2}\right)\cup\left(\dfrac{11}{2};\infty\right)$.