

## Дробно-рациональные алгебраические уравнения или неравенства

## Примеры

- №1. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием  $f = 45$  см. Расстояние  $d_1$  от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 50 до 70 см, а расстояние  $d_2$  от линзы до экрана – в пределах от 160 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$ . Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.
- 
- №2. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна  $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ , где  $\varepsilon$  – ЭДС источника (в вольтах),  $r = 3$  Ом – его внутреннее сопротивление,  $R$  – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 5% от силы тока короткого замыкания  $I_{КЗ} = \frac{\varepsilon}{r}$ ? (Ответ выразите в омах.)
- 
- №3. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле  $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$ , где  $\omega$  – частота вынуждающей силы (в  $c^{-1}$ ),  $A_0$  – постоянный параметр,  $\omega_p = 210c^{-1}$  – резонансная частота. Найдите максимальную частоту  $\omega$ , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину  $A_0$  не более чем на 12,5%. Ответ выразите в  $c^{-1}$ .
- 
- №4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой  $f_0 = 267$  Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону  $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$  (Гц), где  $c$  – скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее, чем на 3 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а  $c = 315$  м/с. Ответ дайте в м/с.
- 
- №5. Сила тока в цепи  $I$  (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома:  $I = \frac{U}{R}$ , где  $U$  – напряжение в вольтах,  $R$  – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.
- 
- №6. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет  $R_1 = 45$  Ом. Параллельно с ним в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление  $R_2$  этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  их общее сопротивление задается формулой  $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ , а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Ответ дайте в омах.

- №7. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$ , где  $T_1$  – температура нагревателя (в кельвинах),  $T_2$  – температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя  $T_1$  КПД этого двигателя будет 50%, если температура холодильника  $T_2 = 275$  К? Ответ дайте в кельвинах.

- №8. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой  $m_в$  (в килограммах) от температуры  $t_1$  до температуры  $t_2$  (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы  $m_{др}$  кг. Он определяется формулой  $\eta = \frac{c_в m_в (t_2 - t_1)}{q_{др} m_{др}} \cdot 100\%$ , где  $c_в = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К) - теплоемкость воды,  $q_{др} = 8,3 \cdot 10^6$  Дж/кг - удельная теплота сгорания дров. Определите массу дров, которые понадобятся сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть  $m = 83$  кг воды от  $10^\circ\text{C}$  до кипения, если известно, что КПД кормозапарника равен 21%. Ответ дайте в килограммах

- №9. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу  $m = 1560$  тонн представляют собой две пустотелые балки длиной  $l = 20$  м и шириной  $s$  метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой  $p = \frac{mg}{2ls}$ , где  $m$  – масса экскаватора (в тоннах),  $l$  – длина балок в метрах,  $g$  – ускорение свободного падения (считайте  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление  $p$  не должно превышать 130 кПа. Ответ дайте в метрах.

- №10. К источнику с ЭДС  $\varepsilon = 180$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом, хотя бы подключить нагрузку с сопротивлением  $R$  Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, дается формулой  $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$ . При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 170 В? Ответ дайте в Омах.

- №11. При сближении источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала  $f_0 = 150$  Гц и определяется следующим выражением:  $f = f_0 \cdot \frac{c + u}{c - v}$  (Гц), где  $c$  – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а  $u = 7$  м/с и  $v = 5$  м/с - скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости  $c$  (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике  $f$  будет не менее 155 Гц?

- №12. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 198 МГц. Скорость погружения батискафа  $v$  вычисляется по формуле  $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$ , где  $c = 1500$  м/с - скорость звука в воде,  $f_0$  – частота испускаемых импульсов,  $f$  – частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите частоту отраженного сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 15 м/с. Ответ выразите в МГц.

- №13. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление  $P$  (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле  $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$ , где  $m = 1200$  кг - общая масса навеса и колонны,  $D$  – диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, а  $\pi = 3$ , определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400000 Па. Ответ дайте в метрах.

- №14. Автомобиль, масса которого равна  $m = 2000$  кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение  $t$  секунд остается неизменным, и проходит за это время путь  $S = 300$  метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно  $F = \frac{2mS}{t^2}$ . Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила  $F$ , приложенная к автомобилю, не меньше 3000 Н. Ответ дайте в секундах.
- 

- №15. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$  и объективности  $Tr$  публикаций. Каждый отдельный показатель - целое число от -3 до 3. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вдвое, а объективность - вчетверо дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{2In + Op + 4Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число  $A$ , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 10.

---

- №16. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$ , объективности  $Tr$  публикаций, а также качества  $Q$  сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от -2 до 2. Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций - вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число  $A$ , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 9.

---

- №17. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$ , объективности  $Tr$  публикаций, а также качества  $Q$  сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от 0 до 4. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вчетверо, а информативность публикаций - впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

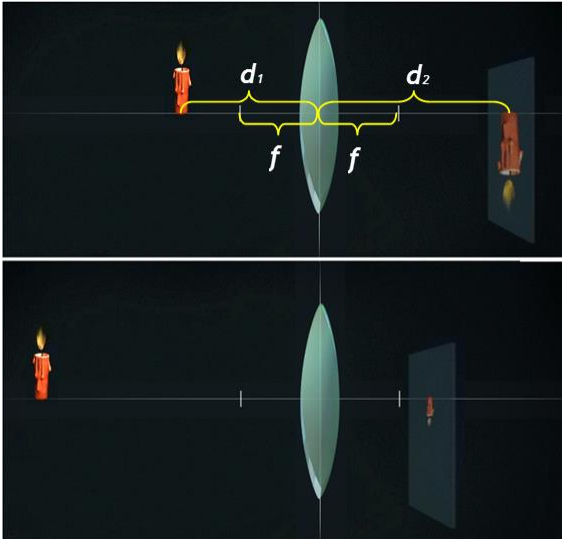
$$R = \frac{5In + Op + 4Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число  $A$ , при котором это условие будет выполняться.

Решение (примеры) 2. Рациональные алгебраические уравнения или неравенства

- №1. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием  $f = 45$  см. Расстояние  $d_1$  от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 50 до 70 см, а расстояние  $d_2$  от линзы до экрана – в пределах от 160 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$ . Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

Решение:



Надо найти наименьшее значение  $d_1$  - расстояние от линзы до лампочки.

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_2}$$

$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{45} - \frac{1}{d_2}$ . При наименьшем значении  $d_1$  дробь  $\frac{1}{d_1}$

будет принимать наибольшее значение. Выражение  $\frac{1}{45} - \frac{1}{d_2}$  будет принимать наибольшее значение, если

дробь  $\frac{1}{d_2}$  принимает наименьшее значение, а это

достигается при наибольшем значении  $d_2 = 180$ .

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{45} - \frac{1}{180} = \frac{4-1}{180} = \frac{3}{180} = \frac{1}{60}, \quad d_1 = 60 \in (50; 70).$$

Ответ: 60.

- №2. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна  $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ , где  $\varepsilon$  – ЭДС источника (в вольтах),  $r = 3$  Ом – его внутреннее сопротивление,  $R$  – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 5% от силы тока короткого замыкания  $I_{КЗ} = \frac{\varepsilon}{r}$ ? (Ответ выразите в омах.)

Решение:

$$I \leq 0,05 \cdot I_{КЗ}, \quad \frac{\varepsilon}{R+r} \leq 0,05 \cdot \frac{\varepsilon}{r}, \quad \frac{1}{R+3} \leq \frac{1}{60}, \quad (R+3 > 0) \quad R \geq 57, \quad R_{\text{наим}} = 57.$$

Ответ: 57.

- №3. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле  $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$ , где  $\omega$  – частота вынуждающей силы (в  $c^{-1}$ ),  $A_0$  – постоянный параметр,  $\omega_p = 210 c^{-1}$  – резонансная частота. Найдите максимальную частоту  $\omega$ , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину  $A_0$  не более чем на 12,5%. Ответ выразите в  $c^{-1}$ .

Решение:

$$A \leq A_0 + 0,125A_0, \quad A \leq 1,125A_0 = 1\frac{1}{8}A_0 = \frac{9}{8}A_0. \text{ Т.к. } \omega \text{ меньше, чем } \omega_p, \text{ то } |\omega_p^2 - \omega^2| = \omega_p^2 - \omega^2 > 0.$$

$$\frac{A_0 \omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \leq \frac{9}{8}A_0, \quad 8\omega_p^2 \leq 9(\omega_p^2 - \omega^2), \quad \omega \leq \frac{\omega_p}{3} = \frac{210}{3} = 70, \quad \omega_{\text{наиб}} = 70$$

Ответ: 70.

- №4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой  $f_0 = 267$  Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону  $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$  (Гц), где  $c$  – скорость

звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее, чем на 3 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а  $c = 315$  м/с. Ответ дайте в м/с.

Решение:

$$\begin{aligned} f(v) - f_0 &\geq 3 \\ \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 &\geq 3 \\ \frac{267}{1 - \frac{v}{315}} - 267 &\geq 3 \\ \frac{267 \cdot 315 - 270 \cdot 315 + 270v}{315 - v} &\geq 0 \quad (315 - v > 0) \\ 270v &\geq 3 \cdot 315, \quad v \geq 3,5 \quad v_{\text{наим}} = 3,5 \end{aligned}$$

Ответ: 3,5.

- №5. Сила тока в цепи  $I$  (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома:  $I = \frac{U}{R}$ , где  $U$  – напряжение в вольтах,  $R$  – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

Решение:

$$I \leq 4, \quad \frac{220}{R} \leq 4, \quad (R > 0) \quad R \geq 55, \quad R_{\text{наим}} = 55.$$

Ответ: 55.

- №6. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет  $R_1 = 45$  Ом. Параллельно с ним в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление  $R_2$  этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  их общее сопротивление задается формулой  $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ , а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Ответ дайте в омах.

Решение:

$$\begin{aligned} R_{\text{общ}} &\geq 20 \\ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} &\geq 20 \\ \frac{45 R_2}{45 + R_2} &\geq 20 \quad (45 + R_2 > 0) \\ 45 R_2 &\geq 900 + 20 R_2 \\ R_2 &\geq 36, \quad R_{2 \text{ наим}} = 36 \end{aligned}$$

Ответ: 36.

№7. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% , \text{ где } T_1 - \text{ температура нагревателя (в кельвинах), } T_2 - \text{ температура}$$

холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя  $T_1$  КПД этого двигателя будет 50%, если температура холодильника  $T_2 = 275$  К? Ответ дайте в кельвинах.

Решение:

$$50\% = \frac{T_1 - 275}{T_1} \cdot 100\%$$

$$T_1 = (T_1 - 275) \cdot 2, \quad T_1 = 550$$

Ответ: 550.

№8. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой  $m_в$  (в килограммах) от температуры  $t_1$  до температуры  $t_2$  (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров

массы  $m_{др}$  кг. Он определяется формулой  $\eta = \frac{c_в m_в (t_2 - t_1)}{q_{др} m_{др}} \cdot 100\%$  , где  $c_в = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·

К) - теплоемкость воды,  $q_{др} = 8,3 \cdot 10^6$  Дж/кг - удельная теплота сгорания дров. Определите массу дров, которые понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть  $m = 83$  кг воды от  $10^\circ\text{C}$  до кипения, если известно, что КПД кормозапарника равен 21%. Ответ дайте в килограммах

Решение:

$$21\% = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 83 \cdot (100^\circ - 10^\circ)}{8,3 \cdot 10^6 \cdot m_{др}} \cdot 100\%$$

$$21 = \frac{42 \cdot 10^2 \cdot 83 \cdot 90}{83 \cdot 10^5 \cdot m_{др}} \cdot 10^2$$

$$m_{др} = 18$$

Ответ: 18.

№9. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу  $m = 1560$  тонн представляют собой две пустотелые балки длиной  $l = 20$  м и шириной  $s$  метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой  $p = \frac{mg}{2ls}$  , где  $m$  – масса экскаватора (в тоннах),  $l$  – длина балок в метрах,  $g$  – ускорение свободного падения (считайте  $g = 10\text{м/с}^2$  ). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление  $p$  не должно превышать 130 кПа. Ответ дайте в метрах.

Решение:

$$p \leq 130, \quad \frac{mg}{2ls} \leq 130, \quad \frac{1560 \cdot 10}{2 \cdot 20 \cdot s} \leq 130, \quad \frac{3}{s} \leq 1 \text{ и т.к. } s > 0, \text{ то } s \geq 3.$$

Наименьшее значение  $s = 3$  м.

Ответ: 3.

№10. К источнику с ЭДС  $\varepsilon = 180$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением  $R$  Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, дается формулой  $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$  . При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 170 В? Ответ дайте в Омах.

Решение:

$$U \geq 170, \quad \frac{\varepsilon R}{R + r} \geq 170, \quad \frac{180R}{R + 1} \geq 170, \quad \frac{18R}{R + 1} \geq 17 \text{ и т.к. } R + 1 > 0, \text{ то } 18R \geq 17(R + 1), \quad R \geq 17$$

Наименьшее значение  $R = 17$  .

Ответ: 17.

№11. При сближении источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала  $f_0 = 150$  Гц и определяется следующим

выражением:  $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$  (Гц), где  $c$  – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а  $u = 7$  м/с и  $v = 5$  м/с – скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости  $c$  (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике  $f$  будет не менее 155 Гц?

Решение:

$$f \geq 155, \quad f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v} \geq 155, \quad 150 \cdot \frac{c+7}{c-5} \geq 155, \quad 30 \cdot \frac{c+7}{c-5} \geq 31 \text{ и т.к. } c-5 > 0, \text{ то}$$

$$30(c+7) \geq 31(c-5), \quad c \leq 365.$$

Наибольшее значение  $c = 365$ .

Ответ: 365.

№12. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 198 МГц. Скорость погружения батискафа  $v$  вычисляется по формуле  $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$ , где  $c = 1500$  м/с – скорость звука в воде,  $f_0$  – частота испускаемых импульсов,  $f$  – частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите частоту отраженного сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 15 м/с. Ответ выразите в МГц.

Решение:

$$15 = 1500 \cdot \frac{f - 198}{f + 198}, \quad 1 = 100 \cdot \frac{f - 198}{f + 198}, \quad f + 198 = 100f - 19800, \quad 99f = 19998, \quad f = 202.$$

Ответ: 202.

№13. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление  $P$  (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле  $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$ , где  $m = 1200$  кг – общая масса навеса и колонны,  $D$  – диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, а  $\pi = 3$ , определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400000 Па. Ответ дайте в метрах.

Решение:

$$P \leq 400000, \quad \frac{4mg}{\pi D^2} \leq 400000, \quad \frac{4 \cdot 1200 \cdot 10}{3 \cdot D^2} \leq 400000 \text{ и т.к. } D^2 > 0, \text{ то } D \geq 0,2.$$

Наименьшее значение  $D = 0,2$  м.

Ответ: 0,2.

№14. Автомобиль, масса которого равна  $m = 2000$  кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение  $t$  секунд остается неизменным, и проходит за это время путь  $S = 300$  метров.

Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно  $F = \frac{2mS}{t^2}$ .

Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила  $F$ , приложенная к автомобилю, не меньше 3000 Н. Ответ дайте в секундах.

Решение:

$$F \geq 3000, \quad \frac{2 \cdot 2000 \cdot 300}{t^2} \geq 3000 \text{ и т.к. } t^2 > 0, \text{ то } t^2 \leq 400, \quad t \leq 20.$$

Наибольшее значение  $t = 20$ .

Ответ: 20.

- №15. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$  и объективности  $Tr$  публикаций. Каждый отдельный показатель - целое число от -3 до 3. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вдвое, а объективность - вчетверо дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{2In + Op + 4Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число  $A$ , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 10.

Решение:

При максимальных показателях  $In = Op = Tr = 3$ .

$$10 = \frac{2 \cdot 3 + 3 + 4 \cdot 3}{A}, \quad 10A = 21, \quad A = 2,1$$

Ответ: 2,1.

- №16. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$ , объективности  $Tr$  публикаций, а также качества  $Q$  сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от -2 до 2. Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций - вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число  $A$ , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 9.

Решение:

$$9 = \frac{4 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 2 + 2}{A}, \quad A = 0,5$$

Ответ: 0,5.

- №17. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$ , объективности  $Tr$  публикаций, а также качества  $Q$  сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от 0 до 4. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вчетверо, а информативность публикаций - впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{5In + Op + 4Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число  $A$ , при котором это условие будет выполняться.

Решение:

По условию  $R = In = Op = Q = Tr$ , тогда получим уравнение  $R = \frac{5R + R + 4R + R}{A}$ ,  $A = 11$

Ответ: 11.



▪ **Тест** Рациональные алгебраические уравнения или неравенства

№1. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием  $f = 30$  см. Расстояние  $d_1$  от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние  $d_2$  от линзы до экрана – в пределах от 180 до 210 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$ . Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

№2. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна  $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ , где  $\varepsilon$  – ЭДС источника (в вольтах),  $r = 2$  Ом – его внутреннее сопротивление,  $R$  – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 40% от силы тока короткого замыкания  $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$ ? (Ответ выразите в омах.)

№3. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле  $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$ , где  $\omega$  – частота вынуждающей силы (в  $c^{-1}$ ),  $A_0$  – постоянный параметр,  $\omega_p = 360c^{-1}$  – резонансная частота. Найдите максимальную частоту  $\omega$ , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину  $A_0$  не более чем на одну пятнадцатую. Ответ выразите в  $c^{-1}$ .

№4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой  $f_0 = 250$  Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону  $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$  (Гц), где  $c$  – скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее, чем на 2 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а  $c = 315$  м/с. Ответ дайте в м/с.

№5. Сила тока в цепи  $I$  (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома:  $I = \frac{U}{R}$ , где  $U$  – напряжение в вольтах,  $R$  – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 25 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

№6. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет  $R_1 = 72$  Ом. Параллельно с ним в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление  $R_2$  этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  их общее сопротивление задается формулой  $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ , а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 8 Ом. Ответ дайте в омах.

№7. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T} \cdot 100\%$ , где  $T_1$  – температура нагревателя (в кельвинах),  $T_2$  – температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя  $T_1$  КПД этого двигателя будет 75%, если температура холодильника  $T_2 = 280$  К? Ответ дайте в кельвинах.

№8. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой  $m_e$  (в килограммах) от температуры  $t_1$  до температуры  $t_2$  (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы  $m_{op}$  кг. Он определяется формулой  $\eta = \frac{c_e m_e (t_2 - t_1)}{q_{op} m_{op}} \cdot 100\%$ , где  $c_e = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К) – теплоемкость воды,  $q_{op} = 8,3 \cdot 10^6$  Дж/кг – удельная теплота сгорания дров. Определите массу дров, которые понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть  $m = 249$  кг воды от  $10^\circ\text{C}$  до кипения, если известно, что КПД кормозапарника равен 24%. Ответ дайте в килограммах.

№9. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу  $m = 2550$  тонн представляют собой две пустотелые балки длиной  $l = 17$  м и шириной  $s$  метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой  $p = \frac{mg}{2ls}$ , где  $m$  – масса экскаватора (в тоннах),  $l$  – длина балок в метрах,  $g$  – ускорение свободного падения (считайте  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление  $p$  не должно превышать 300кПа. Ответ дайте в метрах.

№10. К источнику с ЭДС  $\varepsilon = 55$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,5$  Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением  $R$  Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, дается формулой  $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$ . При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 50 В? Ответ дайте в Омах.

№11. При сближении источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала  $f_0 = 160$  Гц и определяется следующим выражением:

$$f = f_0 \cdot \frac{c + u}{c - v} \text{ (Гц)}, \text{ где } c \text{ – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а } u = 8 \text{ м/с и}$$

$v = 16$  м/с – скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости  $c$  (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике  $f$  будет не менее 170 Гц?

№12. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 187 МГц. Скорость погружения батискафа  $v$  вычисляется по формуле

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}, \text{ где } c = 1500 \text{ м/с} \text{ – скорость звука в воде, } f_0 \text{ – частота испускаемых импульсов,}$$

$f$  – частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите частоту отраженного сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 4 м/с. Ответ выразите в МГц.

№13. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление  $P$  (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле  $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$ , где  $m = 600$  кг - общая масса навеса и колонны,  $D$  – диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, а  $\pi = 3$ , определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 800000 Па. Ответ дайте в метрах.

№14. Автомобиль, масса которого равна  $m = 1300$  кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение  $t$  секунд остается неизменным, и проходит за это время путь  $S = 400$  метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно  $F = \frac{2mS}{t^2}$ . Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила  $F$ , приложенная к автомобилю, не меньше 2600 Н. Ответ дайте в секундах.

№15. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$  и объективности  $Tr$  публикаций. Каждый отдельный показатель - целое число от -3 до 3. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вчетверо, а объективность - втрое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число  $A$ , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 60.

№16. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$ , объективности  $Tr$  публикаций, а также качества  $Q$  сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от -2 до 2. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вчетверо, а информативность публикаций - вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{2In + Op + 4Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число  $A$ , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 2.

№17. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$ , объективности  $Tr$  публикаций, а также качества  $Q$  сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от -2 до 2. Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций - вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число  $A$ , при котором это условие будет выполняться.

**▪ Ответы (тест)**      Рациональные алгебраические уравнения или неравенства

№1	№2	№3	№4	№5	№6
<b>35</b>	<b>3</b>	<b>90</b>	<b>2,5</b>	<b>8,8</b>	<b>9</b>

№7	№8	№9	№10	№11	№12
<b>1120</b>	<b>47,25</b>	<b>2,5</b>	<b>10</b>	<b>400</b>	<b>188</b>

№13	№14	№15	№16	№17
<b>0,1</b>	<b>20</b>	<b>0,4</b>	<b>8</b>	<b>9</b>