# Целые алгебраические уравнения или неравенства

## Примеры

№1. При температуре $0^\circ C$ рельс имеет длину $l_0 = 18$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} ({}^\circ C)^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, $t^\circ$ – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 8,1 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

---

№2. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время $t$ падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где $h$ – расстояние в метрах, $t$ – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

---

№3. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}6 + 13t - 5t^2$, где $h$ – высота в метрах, $t$ – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров?

---

№4. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100}\text{м}^{-1}$, $b = \frac{7}{10}$ – постоянные параметры, $x$ (м) – смещение камня по горизонтали, $y$ (м) – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

---

№5. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где $t$ – время в минутах, $T_0 = 1350$ К, $a = -7{,}5$ К/мин$^2$, $b = 105$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1650 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

---

№6. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где $P$ – мощность излучения звезды (в Ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 \cdot K^4}$ – постоянная, $S$ – площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а $T$ – температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{228} \cdot 10^{20}$ м$^2$, а мощность её излучения равна $1{,}5625 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

№7. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где $l$ – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м$^3$ – плотность воды, а $g$ – ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ дайте в метрах.

---

№8. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4{,}2$ – постоянная, $r$ – радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м$^3$ – плотность воды, а $g$ – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 42000 Н? Ответ дайте в метрах.

---

№9. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объем производства $q$ (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль будет равна 300000 руб.

---

№10. Зависимость объема спроса $q$ (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены $p$ (тыс. руб. за ед.) задается формулой $q = 170 - 10p$. Выручка предприятия $r$ (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену $p$, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 700 тыс. руб. Ответ дайте в тыс. руб. за ед.

---

№11. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8$ кг и радиуса $R = 5$ см, и двух боковых с массами $M = 2$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $кг \cdot см^2$, задается формулой $I = \dfrac{(m + 2M)R^2}{2} + M\left(2Rh + h^2\right)$. При каком максимальном значении $h$ момент инерции катушки не превышает предельного значения $1900\ кг \cdot см^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

---

№12. Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\dfrac{v^2}{L} - g\right)$, где $m$ – масса воды в килограммах, $v$ – скорость движения ведерка в м/с, $L$ – длина веревки в метрах, $g$ – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 м/с^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ дайте в м/с.

№13. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t)=H_0-\sqrt{2gH_0}kt+\frac{g}{2}k^2t^2$, где $t-$ время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0=20$ м - начальная высота столба воды, $k=\frac{1}{50}-$ отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а $g-$ ускорение свободного падения (считайте $g=10 м/с^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

---

№14. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t)=at^2+bt+H_0$, где $H_0=2$ м - начальный уровень воды, $a=\frac{1}{50}$ м/мин$^2$ и $b=-\frac{2}{5}$ м/мин $-$ постоянные, $t-$ время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.

---

№15. Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\frac{\beta t^2}{2}$, где $t-$ время в минутах, $\omega=40^\circ$ / мин $-$ начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=4^\circ$ / мин$^2$ $-$ угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки $\varphi$ достигнет $3000^\circ$. Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ дайте в минутах.

---

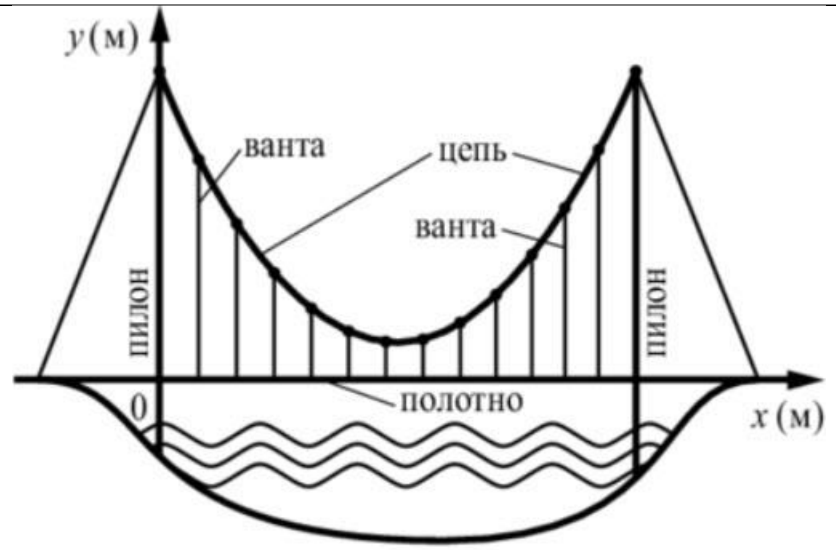
№16. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0=58$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a=16$ км/ч$^2$. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S=v_0t+\frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 48 км от города. Ответ дайте в минутах.

---

№17. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0=24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a=3$ м/с$^2$. За $t$ секунд после начала торможения он прошел путь $S=v_0t-\frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

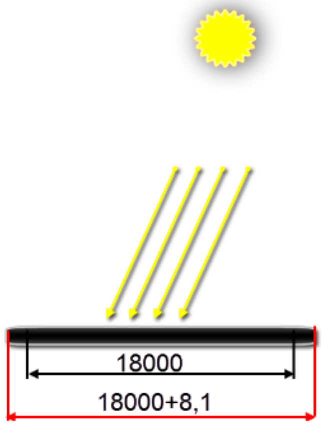
---

№18. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называют вантами. введем систему координат: ось $Oy$ направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось $Ox$ направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задается формулой $y=0,001x^2-0,29x+25$, где $x$ и $y$ измеряются в метрах. найдите длину ванты, расположенной в 10 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.




## ▪ *Решение (примеры)* Целые алгебраические уравнения или неравенства

**№1.** **При температуре $0^{\circ}C$ рельс имеет длину $l_0 = 18$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l\left(t^{\circ}\right) = l_0\left(1+\alpha\cdot t^{\circ}\right)$, где $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}\left({}^{\circ}C\right)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t^{\circ}$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 8,1 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.**




$18\cdot 10^3\left(1+1{,}2\cdot 10^{-5}\cdot t\right)$

*Решение:*

$18\ м = 18\cdot 10^3\ мм$

$$18\cdot 10^3 + 8{,}1 = 18\cdot 10^3\left(1+1{,}2\cdot 10^{-5}\cdot t\right)$$

$$18\cdot 10^3 + 8{,}1 = 18\cdot 10^3 + 18\cdot 10^3\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5}\cdot t$$

$$8{,}1 = 18\cdot 10^3\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5}\cdot t$$

$$t = \frac{8{,}1}{18\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}2}$$

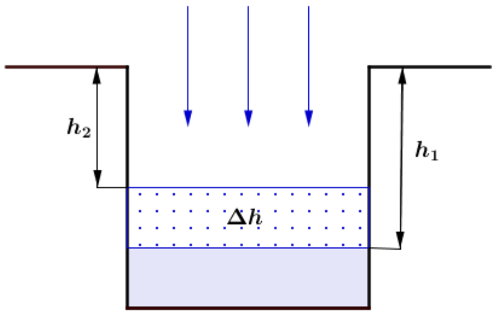
$$t = \frac{81\cdot 10^2}{18\cdot 12}$$

$$t = 37{,}5^{\circ}$$

***Ответ: 37,5.***

*В июне 2013 года произошла железнодорожная катастрофа. Основной версией причины схода вагонов поезда N 140 Новосибирск - Адлер могла стать деформация рельсов из-за высоких температур, которые тогда были на Кубани.*

**№2.** **После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время *t* падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где $h$ – расстояние в метрах, $t$ – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.**




*Решение:*

$t_1 = 0,6 \quad h_1 = 5 \cdot 0,6^2$

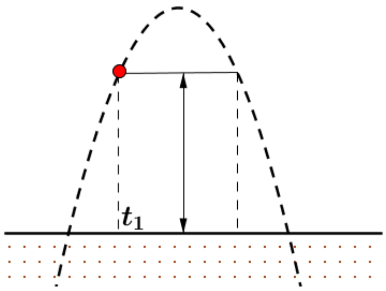
$t_2 = 0,6 - 0,2 = 0,4 \quad h_2 = 5 \cdot 0,4^2$

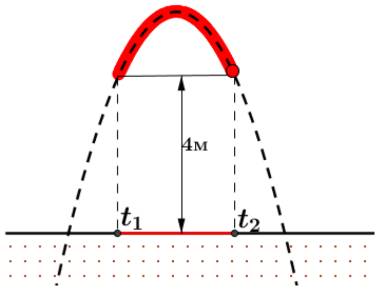
$\Delta h = h_1 - h_2 = 5 \cdot 0,6^2 - 5 \cdot 0,4^2 = 5 \cdot \left(0,6^2 - 0,4^2\right) = 5 \cdot 0,2 = 1$

***Ответ: 1.***

---

**№3.** **Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 13t - 5t^2$, где *h* — высота в метрах, $t$ – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров?**




*Решение:*

$h(t) \geq 4$

$1,6 + 13t - 5t^2 \geq 4$

$5t^2 - 13t + 2,4 \leq 0$

$(t - 2,4)(t - 0,2) \leq 0$

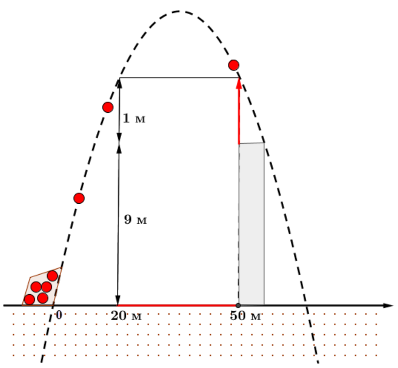
$0,2 \leq t \leq 2,4$

$\Delta t = t_2 - t_1 = 2,4 - 0,2 = 2,2$

***Ответ: 2,2.***

---

**№4.** **Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\dfrac{1}{100}\,м^{-1}$, $b = \dfrac{7}{10}$ – постоянные параметры, $x$ (м) — смещение камня по горизонтали, $y$ (м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?**




*Решение:*

$y(x) \geq 9 + 1$

$-\dfrac{1}{100}x^2 + \dfrac{7}{10}x \geq 10 \quad \left| \cdot 100 \right.$

$-x^2 + 70x - 1000 \geq 0$

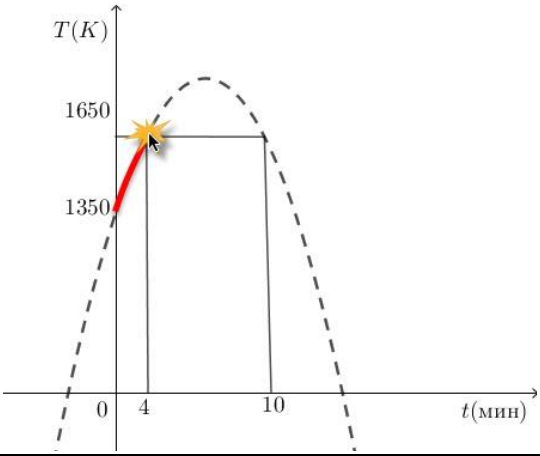
$x^2 - 70x + 1000 \leq 0$

$20 \leq x \leq 50, \quad x_{наиб} = 50$

***Ответ: 50.***

---

**№5.** **Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где $t$ – время в минутах, $T_0 = 1350$ К, $a = -7,5$ К/мин $^2$, $b = 105$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1650 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.**




*Решение:*

$$1650 = 1350 + 105t - 7,5t^2$$

$$7,5t^2 - 105t + 300 = 0$$

$$t^2 - 14t + 40 = 0$$

$$t_1 = 4 \qquad t_2 = 10$$

Нагревательный элемент некоторого прибора достигает температуры 1650 К за 4 мин, дальнейшее нагревание может привести к его поломке. Поэтому наибольшее время, через которое надо прибор отключить после начала работы, равно 4 мин.

***Ответ: 4.***

---

**№6. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где $P -$ мощность излучения звезды (в Ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \dfrac{Bm}{м^2 \cdot K^4}$ — постоянная, $S -$ площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а $T -$ температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\dfrac{1}{228} \cdot 10^{20}$ м², а мощность её излучения равна $1,5625 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.**

*Решение:*

$$1,5625 \cdot 10^{25} = 5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{228} \cdot 10^{20} \cdot T^4$$

$$T^4 = \frac{15625 \cdot 10^{21} \cdot 228}{5,7 \cdot 10^{12}}$$

$$T^4 = \frac{15625 \cdot 10^{21} \cdot 228}{57 \cdot 10^{11}}$$

$$T^4 = 15625 \cdot 10^{10} \cdot 4$$

$$T^4 = 5^4 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^{10}$$

$$T^4 = 5^4 \cdot 10^{12}$$

$$T = 5 \cdot 10^3 = 5000$$

***Ответ: 5000.***

---

**№7. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где $l -$ длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м$^3$ — плотность воды, а $g -$ ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ дайте в метрах.**

*Решение:*

$$F_A \le 78400$$

$$\rho g l^3 \le 78400$$

$$1000 \cdot 9,8 \cdot l^3 \le 78400$$

$$l^3 \le 8$$

$$l \le 2, \quad l_{наиб} = 2$$

***Ответ: 2.***

**№8.** **На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha\rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ – постоянная, $r$ – радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м$^3$ – плотность воды, а $g$ – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 42000 Н? Ответ дайте в метрах.**

*Решение:*

$$F_A \le 42000$$
$$\alpha\rho g r^3 \le 42000$$
$$4,2\cdot 1000\cdot 10\cdot r^3 \le 42000$$
$$r^3 \le 1$$
$$r \le 1, \quad r_{наиб} = 1$$

***Ответ:1.***

---

**№9.** **Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p-v) - f$. Определите месячный объем производства $q$ (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль будет равна 300000 руб.**

*Решение:*

$p = 500$, $v = 300$, $f = 700000$, $q = ?$

$$\pi(q) = q(p-v) - f$$
$$300000 = q(500-300) - 700000$$
$$1000000 = 200q$$
$$q = 5000$$

***Ответ: 5000.***

---

**№10.** **Зависимость объема спроса $q$ (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены $p$ (тыс. руб. за ед.) задается формулой $q = 170 - 10p$. Выручка предприятия $r$ (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q\cdot p$. Определите наибольшую цену $p$, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 700 тыс. руб. Ответ дайте в тыс. руб. за ед.**

*Решение:*

$r(p) = q\cdot p$, $q = 170 - 10p$, $r(p) \ge 700$

$$(170-10p)p \ge 700$$
$$-10p^2 + 170p - 700 \ge 0$$
$$p^2 - 17p + 70 \le 0$$
$$(p-7)(p-10) \le 0$$
$$7 \le p \le 10$$

Наибольшее значение $p = 10$ тыс.руб. за ед.

***Ответ: 10.***

**№11. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой $m=8$ кг и радиуса $R=5$ см, и двух боковых с массами $M=2$ кг и с радиусами $R+h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $кг\cdot см^2$, задается формулой $I=\dfrac{(m+2M)R^2}{2}+M\left(2Rh+h^2\right)$. При каком максимальном значении $h$ момент инерции катушки не превышает предельного значения $1900\ кг\cdot см^2$? Ответ выразите в сантиметрах.**

*Решение:*

$$1900\ge\frac{(8+2\cdot2)\cdot5^2}{2}+2\left(2\cdot5h+h^2\right)$$

$$h^2+10h-875\le0\quad \frac{D}{4}=25+875=900$$

$$h=-5\pm30,\quad h_1=25,\quad h_2=-35$$

$$-35\le h\le25,\quad h_{наиб}=25$$

***Ответ: 25.***

---

**№12. Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P=m\left(\dfrac{v^2}{L}-g\right)$, где $m-$ масса воды в килограммах, $v-$скорость движения ведерка в м/с, $L-$длина веревки в метрах, $g-$ускорение свободного падения (считайте $g=10м/c^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ дайте в м/с.**

*Решение:*

$P\ge0,\ m\left(\dfrac{v^2}{L}-g\right)\ge0$ и т.к. $m>0$, то $\dfrac{v^2}{L}-g\ge0,\quad \dfrac{v^2}{0{,}4}-10\ge0,\quad v^2\ge4,\quad v\ge2\quad (v>0)$

Наименьшее значение $v=2$. ***Ответ: 2.***

---

**№13. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t)=H_0-\sqrt{2gH_0}kt+\dfrac{g}{2}k^2t^2$, где $t-$ время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0=20$м - начальная высота столба воды, $k=\dfrac{1}{50}-$ отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а $g-$ускорение свободного падения (считайте $g=10м/c^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?**

*Решение:*

После открытия крана через время $t$ остается четверть первоначального объема $H_1(t)=\dfrac{H_0}{4}$.

$$\frac{H_0}{4}=H_0-\sqrt{2gH_0}kt+\frac{g}{2}k^2t^2$$

$$\frac{20}{4}=20-\sqrt{2\cdot10\cdot20}\cdot\frac{1}{50}\cdot t+\frac{10}{2}\cdot\frac{1}{2500}\cdot t^2$$

$$t^2-200t+7500=0\quad t_1=50\quad t_2=100$$

По условию задачи $t-$ время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, значит, по смыслу подходит только $t=50$сек. ***Ответ: 50.***

**№14. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t)=at^2+bt+H_0$, где $H_0=2$ м - начальный уровень воды, $a=\dfrac{1}{50}$ м/мин$^2$, и $b=-\dfrac{2}{5}$ м/мин – постоянные, $t$ – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.**

*Решение:*

Поскольку вся вода из бака вытекла, то высота столба воды стала равной 0, т.е. $H(t)=0$.

$$\frac{1}{50}t^2-\frac{2}{5}t+2=0$$

$$t^2-20t+100=0,\quad (t-10)^2=0,\quad t=10$$

***Ответ: 10.***

---

**№15. Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\dfrac{\beta t^2}{2}$, где $t$ – время в минутах, $\omega=40^\circ$ / мин – начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=4^\circ$ / мин$^2$ – угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки $\varphi$ достигнет $3000^\circ$. Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ дайте в минутах.**

*Решение:*

$$\varphi\le 3000$$

$$\omega t+\frac{\beta t^2}{2}\le 3000$$

$$40^\circ t+\frac{4^\circ\cdot t^2}{2}-3000\le 0$$

$$t^2+20t-1500\le 0$$

$$-50\le t\le 30,\quad t\ge 0,\quad t=30$$

***Ответ: 30.***

---

**№16. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0=58$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a=16$ км/ч$^2$. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S=v_0t+\dfrac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 48 км от города. Ответ дайте в минутах.**

*Решение:*

$$S\le 48$$

$$v_0t+\frac{at^2}{2}\le 48$$

$$58t+\frac{16t^2}{2}-48\le 0$$

$$4t^2+29t-24\le 0$$

$$t\ge 0,\quad 0\le t\le\frac{3}{4}\quad t=\frac{3}{4}\text{ часа}=45\text{ мин}$$

***Ответ: 45.***

**№17.** **Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с$^2$. За $t$ секунд после начала торможения он прошел путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах**

*Решение:*

$$90 = 24t - \frac{3t^2}{2}$$

$$t^2 - 16t + 60 = 0$$

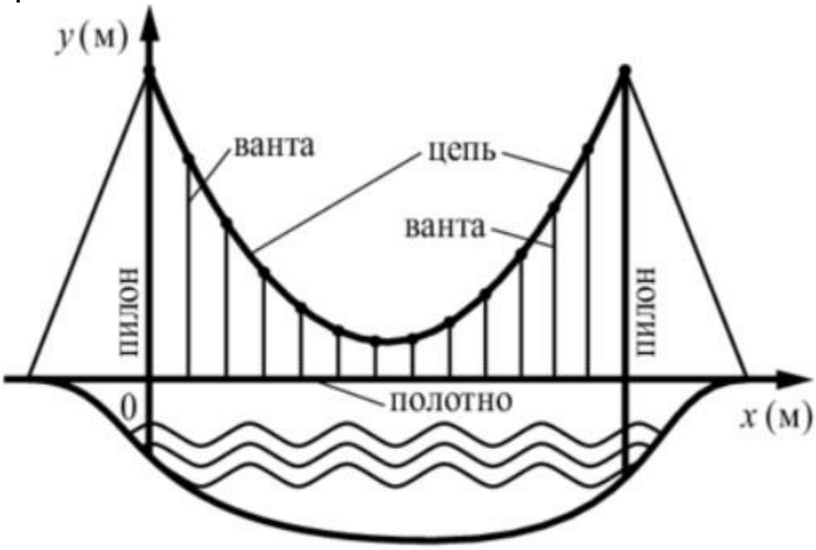
$$t_1 = 6 \qquad t_2 = 10$$

Время торможения по смыслу задачи $t = 6$.

***Ответ: 6***

---

**№18.** **На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называют вантами. введем систему координат: ось $Oy$ направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось $Ox$ направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задается формулой $y = 0,001x^2 - 0,29x + 25$, где $x$ и $y$ измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 10 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.**




*Решение:*

$$y = 0,001 \cdot 10^2 - 0,29 \cdot 10 + 25 = 0,1 - 2,9 + 25 = 22,2$$

***Ответ: 22,2.***

▪ **Тест** Целые алгебраические уравнения или неравенства

№1. При температуре $0^\circ C$ рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l\left(t^\circ\right) = l_0\left(1+\alpha\cdot t^\circ\right)$, где $\alpha = 1{,}2\cdot10^{-5}\left({}^\circ C\right)^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, $t^\circ$ – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

---

№2. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время $t$ падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где $h-$ расстояние в метрах, $t-$ время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,7 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,3 с? Ответ выразите в метрах.

---

№3. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}2 + 10t - 5t^2$, где $h$ – высота в метрах, $t$ – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?

---

№4. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\dfrac{1}{60}\,м^{-1}$, $b = \dfrac{7}{6}$ – постоянные параметры, $x$ (м) – смещение камня по горизонтали, $y$ (м) – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

---

№5. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где $t$ – время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -12{,}5$ К/мин$^2$, $b = 175$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1750 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

---

№6. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где $P-$ мощность излучения звезды (в Ваттах), $\sigma = 5{,}7\cdot10^{-8}\,\dfrac{Вт}{м^2\cdot K^4}$ – постоянная, $S-$ площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а $T$ – температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\dfrac{1}{2}\cdot10^{18}$ м$^2$, а мощность её излучения равна $2{,}85\cdot10^{26}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

---

№7. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где $l$ – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м$^3$ – плотность воды, а $g$ – ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 5017,6 Н? Ответ дайте в метрах.

№8. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha\rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ — постоянная, $r$ — радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м$^3$ — плотность воды, а $g$ — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336000 Н? Ответ дайте в метрах.

---

№9. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 500000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p-v) - f$. Определите месячный объем производства $q$ (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль будет равна 300000 руб.

---

№10. Зависимость объема спроса $q$ (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены $p$ (тыс. руб. за ед.) задается формулой $q = 110 - 5p$. Выручка предприятия $r$ (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену $p$, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ дайте в тыс. руб. за ед.

---

№11. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 4$ кг и радиуса $R = 10$ см, и двух боковых с массами $M = 2$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $кг \cdot см^2$, задается формулой $I = \frac{(m+2M)R^2}{2} + M\left(2Rh + h^2\right)$. При каком максимальном значении $h$ момент инерции катушки не превышает предельного значения $1000\ кг \cdot см^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

---

№12. Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где $m$ — масса воды в килограммах, $v$ — скорость движения ведерка в м/с, $L$ — длина веревки в метрах, $g$ — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 м/с^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 72,9 см? Ответ дайте в м/с.

---

№13. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где $t$ — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5$ м - начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{500}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а $g$ — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 м/с^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

№14. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t)=at^2+bt+H_0$, где $H_0=4{,}5$ м - начальный уровень воды, $a=\frac{1}{200}$ м/мин$^2$, и $b=-\frac{3}{10}$ м/мин — постоянные, $t$ — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.

---

№15. Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\frac{\beta t^2}{2}$, где $t$ — время в минутах, $\omega=30^\circ$ / мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=3^\circ$ / мин$^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки $\varphi$ достигнет $1200^\circ$. Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ дайте в минутах.

---

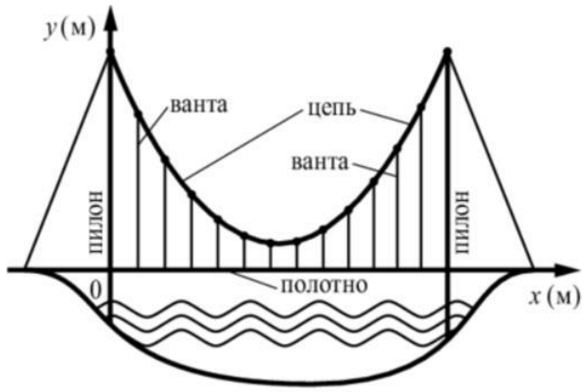
№16. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0=40$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a=64$ км/ч$^2$. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S=v_0t+\frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 48 км от города. Ответ дайте в минутах.

---

№17. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0=15$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a=2$ м/с$^2$. За $t$ секунд после начала торможения он прошел путь $S=v_0t-\frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 36 метров. Ответ дайте в секундах.

---

№18. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называют вантами. введем систему координат: ось $Oy$ направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось $Ox$ направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задается формулой $y=0{,}0011x^2-0{,}32x+26$, где $x$ и $y$ измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 20 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



- ***Ответы (тест)*** Целые алгебраические уравнения или неравенства

| №1 | №2 | №3 | №4 | №5 | №6 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***37,5*** | ***1,65*** | ***1,6*** | ***60*** | ***2*** | ***10000*** |

| №7 | №8 | №9 | №10 | №11 | №12 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***0,8*** | ***2*** | ***4000*** | ***12*** | ***10*** | ***27*** |

| №13 | №14 | №15 | №16 | №17 | №18 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***250*** | ***30*** | ***20*** | ***45*** | ***3*** | ***20,04*** |