

## Дробно-рациональные уравнения

## ■ Примеры

Решите уравнения:

№1. Найдите корень уравнения  $\frac{x-46}{x+2} = -2$ .

---

№2. Найдите корень уравнения  $x = \frac{-7x-8}{x-16}$ .

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

---

№3. Найдите корень уравнения  $\frac{9}{x^2-16} = 1$ .

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

---

№4. Найдите корень уравнения  $\frac{7x}{2x^2-15} = 1$ .

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

---

№5. Найдите корень уравнения  $\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7}$ .

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

---

№6. Найдите корень уравнения  $\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$ .

---

№7. Найдите корень уравнения  $\frac{1}{7x-5} = 4$ .

---

№8. Найдите корень уравнения  $\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$ .

№1.

$$\frac{x-46}{x+2} = -2$$

ОДЗ:  $x \neq -2$

$$x - 46 = -2(x + 2)$$

$$x - 46 = -2x - 4$$

$$3x = 42$$

$$x = 14 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 14

№2.

$$x = \frac{-7x-8}{x-16}$$

ОДЗ:  $x \neq 16$

$$x(x-16) = -7x-8$$

$$x^2 - 16x + 7x + 8 = 0$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 9 = 1 + 8$$

$$x_1 \cdot x_2 = 8 = 1 \cdot 8$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 8$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

$x = 1$  меньший корень

Ответ: 1

№3.

$$\frac{9}{x^2-16} = 1.$$

$$\frac{9}{x^2-16} = 1 \quad | \cdot (x^2-16)$$

$$9 = x^2 - 16$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x-5)(x+5) = 0$$

$$x = 5 \text{ или } x = -5$$

Проверка:

$$x = 5, \quad \frac{9}{5^2-16} = 1, \quad \frac{9}{9} = 1 \text{ верно}$$

$$x = -5, \quad \frac{9}{(-5)^2-16} = 1, \quad \frac{9}{9} = 1 \text{ верно}$$

Меньший корень:  $-5$

Ответ: -5

№4.

$$\frac{7x}{2x^2-15} = 1$$

$$\frac{7x}{2x^2-15} = 1 \quad | \cdot (2x^2-15)$$

$$7x = 2x^2 - 15$$

$$2x^2 - 7x - 15 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \begin{cases} 5 \\ -1,5 \end{cases}$$

Проверка:

$$x = 5; \quad 2x^2 - 15 = 2 \cdot 5^2 - 15 \neq 0$$

$$x = -1,5; \quad 2x^2 - 15 = 2 \cdot (-1,5)^2 - 15 \neq 0$$

Большой корень: 5

Ответ: 5

№5.

$$\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7}$$

$$\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7} \quad | \cdot (7x-2)(6x-7)$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{2}{7}, \quad x \neq \frac{7}{6}$$

$$(x-8)(6x-7) = (x-8)(7x-2)$$

$$(x-8)(6x-7) - (x-8)(7x-2) = 0$$

$$(x-8)(6x-7-(7x-2)) = 0$$

$$x-8=0 \quad \text{или} \quad 6x-7-7x+2=0$$

$$x=8 \quad \quad \quad -x-5=0$$

$$x=-5$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Большой корень: 8

**Ответ: 8**

№6.

$$\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ОДЗ: } 9x-7 \neq 0$$

$$x \neq \frac{7}{9}$$

$$9x-7=2$$

$$9x=9$$

$$x=1$$

**Ответ: 1**

№7.

$$\frac{1}{7x-5} = 4.$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{7x-5} = \frac{4}{1}$$

$$4(7x-5) = 1$$

$$28x-20 = 1$$

$$28x = 21$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$x = 0,75$$

**Ответ: 0,75**

№8.

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$$

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$$

$$3x-4 = 4x-11$$

$$11-4 = 4x-3x$$

$$x = 7$$

Проверка:

$$\frac{1}{3 \cdot 7 - 4} = \frac{1}{4 \cdot 7 - 11}$$

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{17}, \quad \text{верно}$$

**Ответ: 7**

## Вариант 1

Решите уравнения:

№1. 
$$\frac{x-105}{x+3} = -5$$

№2. 
$$x = \frac{-4x-18}{x-13}$$

№3. 
$$\frac{5}{x^2-20} = 1$$

№4. 
$$\frac{14x}{x^2+13} = 1$$

№5. 
$$\frac{x+8}{6x-5} = \frac{x+8}{4x-11}$$

№6. 
$$\frac{1}{10x+7} = \frac{1}{12}$$

№7. 
$$\frac{1}{10x-4} = 10$$

№8. 
$$\frac{1}{7x+13} = \frac{1}{4x-5}$$

## Вариант 2

Решите уравнения:

№1. 
$$\frac{x+71}{x+1} = -4$$

№2. 
$$x = \frac{-3x+48}{x-1}$$

№3. 
$$\frac{8}{x^2+4} = 1$$

№4. 
$$\frac{6x}{x^2-16} = 1$$

№5. 
$$\frac{x-5}{6x+5} = \frac{x-5}{5x-8}$$

№6. 
$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{11}$$

№7. 
$$\frac{1}{10x-4} = 10$$

№8. 
$$\frac{1}{4x-3} = \frac{1}{9x-11}$$

▪ **Ответы (тест)** Дробно-рациональные уравнения

|       | №1  | №2     | №3 | №4     | №5      | №6  | №7    | №8  |
|-------|-----|--------|----|--------|---------|-----|-------|-----|
| Вар.1 | 15  | 3 и 6  | ±5 | 1 и 13 | -8 и -3 | 0,5 | 0,41  | -6  |
| Вар.2 | -15 | -8 и 6 | ±2 | -2 и 8 | -13 и 5 | 5   | -1,45 | 1,6 |

▪ **Решение (тест)** Дробно-рациональные уравнения

Вариант 1

№1.

$$\frac{x-105}{x+3} = -5$$

$$x-105 = -5(x+3), x \neq -3$$

$$x-105 = -5x-15$$

$$x+5x = 105-15$$

$$6x = 90 \quad \underline{x = 15} \in \text{ОДЗ}$$

№3.

$$\frac{5}{x^2-20} = 1$$

$$5 = x^2 - 20$$

$$x^2 = 25$$

$$\underline{x = \pm 5}$$

Проверка:  $\begin{cases} x=5, \frac{5}{5^2-20} = 1, 1=1 \\ x=-5, \frac{5}{(-5)^2-20} = 1, 1=1 \end{cases}$

№5.

$$\frac{x+8}{6x-5} = \frac{x+8}{4x-11}$$

$$(x+8)(4x-11) = (x+8)(6x-5)$$

$$(x+8)(4x-11-(6x-5)) = 0$$

$$x+8=0 \quad \text{или} \quad 4x-11-6x+5=0$$

$$x = -8 \in \text{ОДЗ} \quad \text{или} \quad -2x-6=0$$

$$\underline{x = -3} \in \text{ОДЗ}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6x-5 \neq 0 \\ 4x-11 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{5}{6} \\ x \neq \frac{11}{4} \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{-8; -3\}$$

№2.

$$x = \frac{-4x-18}{x-13}$$

$$x(x-13) = -4x-18, x \neq 13$$

$$x^2 - 13x + 4x + 18 = 0$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$\underline{x_1 = 3} \quad \underline{x_2 = 6} \in \text{ОДЗ}$$

№4.

$$\frac{14x}{x^2+13} = 1$$

$$14x = x^2 + 13, x^2 + 13 \neq 0 \text{ при } \forall x$$

$$x^2 - 14x + 13 = 0$$

$$\underline{x_1 = 1} \quad \underline{x_2 = 13}$$

№6.

$$\frac{1}{10x+7} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{10x+7} = \frac{1}{12}; 10x+7 \neq 0, x \neq -0,7$$

$$10x+7 = 12$$

$$10x = 5$$

$$\underline{x = 0,5} \in \text{ОДЗ}$$

№7.

$$\frac{1}{10x-4} = 10$$

$$\frac{1}{10x-4} = \frac{10}{1}; 10x-4 \neq 0, x \neq 0,4$$

$$10(10x-4) = 1$$

$$100x - 40 = 1$$

$$100x = 41$$

$$\underline{x = 0,41} \in \text{ОДЗ}$$

№8.

$$\frac{1}{7x+13} = \frac{1}{4x-5}$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq -\frac{13}{7}, x \neq \frac{5}{4}$$

$$7x+13 = 4x-5$$

$$3x = -18$$

$$\underline{x = -6} \in \text{ОДЗ}$$

## Вариант 2

№1.

$$\frac{x+71}{x+1} = -4$$

$$x+71 = -4(x+1), x \neq -1$$

$$x+71 = -4x-4$$

$$x+4x = -71-4$$

$$5x = -75 \quad \underline{x = -15} \in \text{ОДЗ}$$

№2.

$$x = \frac{-3x+48}{x-1}$$

$$x(x-1) = -3x+48, x \neq 1$$

$$x^2 - x + 3x - 48 = 0$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\underline{x_1 = 6} \quad \underline{x_2 = -8} \in \text{ОДЗ}$$

№3.

$$\frac{8}{x^2+4} = 1$$

$$8 = x^2 + 4, x^2 + 4 \neq 0 \text{ при } \forall x$$

$$x^2 = 4$$

$$\underline{x = \pm 2} \in \text{ОДЗ}$$

№4.

$$\frac{6x}{x^2-16} = 1$$

$$6x = x^2 - 16; x \neq 4, x \neq -4$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$\underline{x_1 = 8} \quad \underline{x_2 = -2} \in \text{ОДЗ}$$

№5.

$$\frac{x-5}{6x+5} = \frac{x-5}{5x-8}$$

$$(x-5)(5x-8) = (x-5)(6x+5); x \neq \frac{8}{5}, x \neq -\frac{5}{6}$$

$$(x-5)(5x-8-6x-5) = 0$$

$$\underline{x = 5} \in \text{ОДЗ} \quad \text{или} \quad -x-13 = 0$$

$$\underline{x = -13} \in \text{ОДЗ}$$

№6.

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{11}$$

$$11 = 3x-4, x \neq \frac{4}{3}$$

$$3x = 15$$

$$\underline{x = 5} \in \text{ОДЗ}$$

№7.

$$\frac{1}{4x+6} = 5$$
$$\frac{1}{4x+6} = \frac{5}{1}, x \neq -1,5$$
$$5(4x+6) = 1$$
$$20x + 30 = 1$$
$$20x = -29$$
$$\underline{x = -1,45} \in \text{ОДЗ}$$

№8.

$$\frac{1}{4x-3} = \frac{1}{9x-11}$$
$$4x-3 = 9x-11; x \neq \frac{3}{4}, x \neq \frac{11}{9}$$
$$11-3 = 9x-4x$$
$$8 = 5x$$
$$\underline{x = 1,6} \in \text{ОДЗ}$$

[Справочные материалы](#)

## Дробно-рациональные уравнения

- ✓ Если одна часть уравнения - целое выражение, а другая - дробно-рациональное или обе части - дробно-рациональные выражения, то такое уравнение называют **дробно-рациональным уравнением**.
- ✓ Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:
  1. Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;
  2. Решить получившееся целое уравнение;
  3. Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей
- ✓ Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.  
ОДЗ - область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.
- ✓ Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$