Тема: Применение производной

ЕГЭ Профиль
Задание 17

Применение производной при решении задач с параметром

1. Рациональные функции

2. Тригонометрические функции

3. Показательная и логарифмическая функции

Содержание сборника:

1. Рациональные функции

▪ *Примеры*

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^3+4x^2-ax+6=0$ имеет единственный корень на отрезке $[-2;2]$.

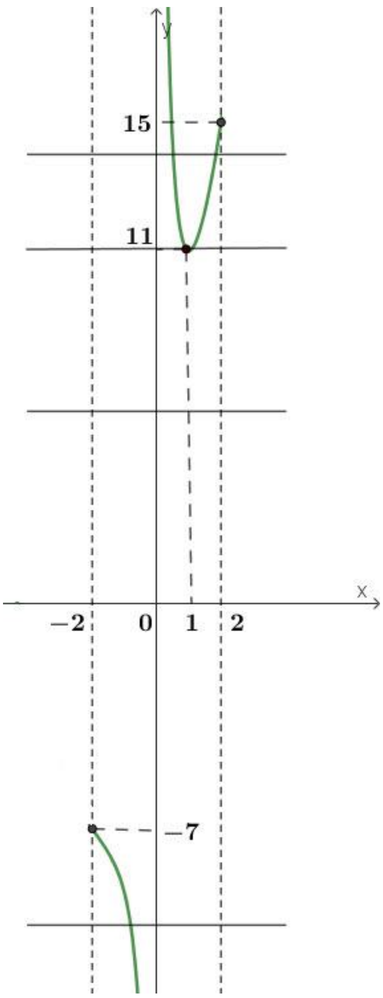
№2. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $x^3+2x^2-x\log_2(b-1)+4=0$ имеет единственное решение на отрезке $[-1;2]$.

№3. Найти все значения параметра $a\in[-2;3]$, при которых неравенство $ax^2+2(1-a)x+a-3<0$ выполняется для любых $x\in[-4;1]$.

№4. Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[1;5]$ удовлетворяют неравенству $3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0$.

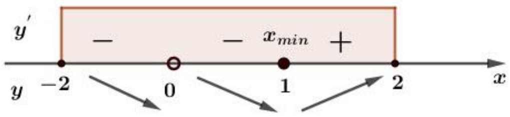
▪ *Решение (примеры)* 1. Рациональные функции

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^3+4x^2-ax+6=0$ имеет единственный корень на отрезке $[-2;2]$.



Решение:
Число $x=0$ не является корнем уравнения ни при каком значении a. Поэтому уравнение равносильно уравнению $a=x^2+4x+\dfrac{6}{x}$. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+4x+\dfrac{6}{x}$ и исследуем ее поведение на отрезке $[-2;2]$. Функция определена при всех $x\neq 0$. Найдем производную:

$$f'(x)=\left(x^2+4x+\frac{6}{x}\right)'=2x+4-\frac{6}{x^2}=\frac{2(x-1)(x^2+3x+3)}{x^2}.$$



$f'(x)=0,\ \ x=1$

$$f(-2)=-7,\ \ f(2)=15,\ \ f(1)=11.$$

Построим график функции $y=f(x)$.

Если $a\le -7$ график функции $y=f(x)$ и прямая $y=a$ имеют единственную общую точку при $-2\le x<0$;
если $-7<a<11$ общих точек нет; если $a=11$ единственная общая точка $(1;11)$; если $11<a\le 15$ две различные точки при $0<x\le 2$; если $a>15$ одна общая точки при $0<x\le 2$.

Ответ: $a\le -7,\ a=11,\ a>15$.

№2. **Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $x^3+2x^2-x\log_2(b-1)+4=0$ имеет единственное решение на отрезке $[-1;2]$.**

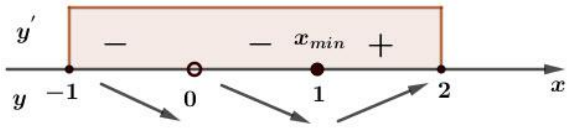
Решение:

Пусть $\log_2(b-1)=a$. Рассмотрим уравнение $x^3+2x^2-ax+4=0$.

Число $x=0$ не является корнем уравнения ни при каком значении a. Поэтому уравнение равносильно уравнению

$a=x^2+2x+\dfrac{4}{x}$. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+2x+\dfrac{4}{x}$ и исследуем ее поведение на отрезке $[-1;2]$. Функция определена при всех $x\neq 0$. Найдем производную:

$$f'(x)=\left(x^2+2x+\frac{4}{x}\right)'=2x+2-\frac{4}{x^2}=\frac{2(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}{x^2}.$$



$f'(x)=0,\ \ x=1$

$$f(-1)=-5,\ \ f(2)=10,\ \ f(1)=7.$$

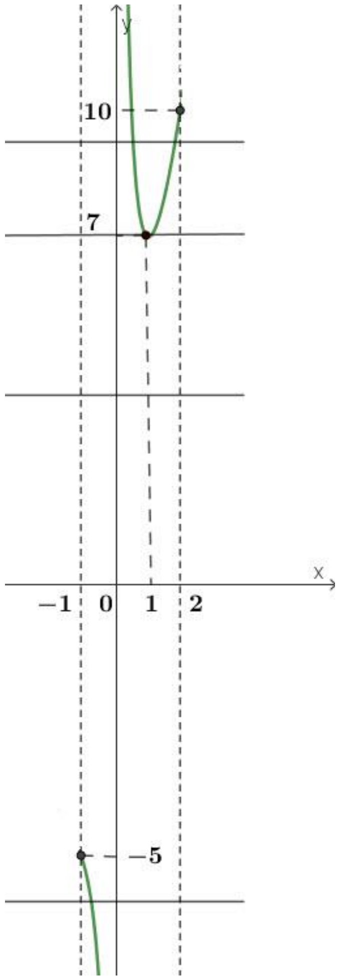
Построим график функции $y=f(x)$.

Если $a\le -5$ график функции $y=f(x)$ и прямая $y=a$ имеют единственную общую точку при $-1\le x<0$;
если $-5<a<7$ общих точек нет; если $a=7$ единственная общая точка $(1;7)$; если $7<a\le 10$ две различные точки при $0<x\le 2$; если $a>10$ одна общая точки при $0<x\le 2$.
Решим два неравенства и уравнение:

$\log_2(b-1)\le -5,\quad \log_2(b-1)=7,\quad \log_2(b-1)>10$

$0<b-1\le\dfrac{1}{32}\qquad b-1=128\qquad b-1>1024$

$1<b\le\dfrac{33}{32}\qquad b=129\qquad b>1029$



Ответ:

$1<b\le\dfrac{33}{32},\ b=129,\ b>1029$.

№3. **Найти все значения параметра** $a \in [-2;3]$**, при которых неравенство** $ax^2+2(1-a)x+a-3<0$ **выполняется для любых** $x \in [-4;1]$**.**

Решение:

$I.\ a=0,\ 2x-3<0,\ x<1{,}5-$ выполняется для всех $x\in[-4;1]$ и $a=0\in[-2;3]$

$II.\ a\neq 0,\ ax^2+2x-2ax+a-3<0$

$$a\left(x^2-2x+1\right)<3-2x$$

$$a(x-1)^2<3-2x$$

Если $x=1$, то $0<3-2x;\ x<1{,}5-$ выполняется при $\forall a$, в том числе $a\in[-2;3]$

Если $x\neq 1$, то $a<\dfrac{3-2x}{(x-1)^2}$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{3-2x}{(x-1)^2}$

Найдем наименьшее значение $f(x)$ при $x\in[-4;1]$

$$f'(x)=\frac{(3-2x)'(x-1)^2-\left((x-1)^2\right)'(3-2x)}{(x-1)^4}=\frac{-2(x-1)^2-2(x-1)(3-2x)}{(x-1)^4}$$

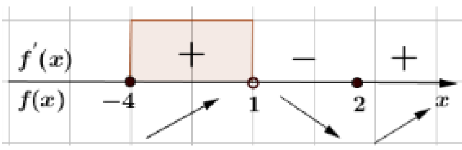
$$f'(x)=\frac{2(x-1)(-x+1-3+2x)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x-2)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-2)}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=0,\ x=2,\ x\neq 1$$

$$f(x)\uparrow \text{ при } x\in[-4;1) \text{ и } f_{наим}=f(-4)=\frac{3-2\cdot(-4)}{(-4-1)^2}=\frac{11}{25}$$

Неравенство $a<f(x)$ выполняется всегда, если $a<f_{наим.}=\dfrac{11}{25}$

$a<\dfrac{11}{25}$, учтем, что $a\in[-2;3]$, то $a\in\left[-2;\dfrac{11}{25}\right)$



Ответ: $\left[-2;\dfrac{11}{25}\right)$.

№4. **Найдите все значения параметра** a **, при которых все числа** x **из отрезка** $[1;5]$ **удовлетворяют неравенству** $3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0$.

Решение:

Введем замену $t=\sqrt{3x+1}$. Выразим x через t: $x=\dfrac{t^2-1}{3}$.

Найдем границы для t, зная границы для x.

$$1\le x\le 5$$
$$3\le 3x\le 15$$
$$4\le 3x+1\le 16$$
$$2\le \sqrt{3x+1}\le 4$$
$$2\le t\le 4$$

Получим неравенство $at^2<2t^2-2t+3$, т.к. $t\in[2;4]$, то разделим обе части неравенства на t^2.

$$a<\frac{2t^2-2t+3}{t^2}\ .$$

Рассмотрим функцию $f(t)=\dfrac{2t^2-2t+3}{t^2}$, $f(t)=2-\dfrac{2}{t}+3t^{-2}$.

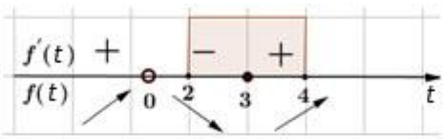
Найдем все значения параметра a, при которых будет всегда выполняться неравенство $a<f(t)$ при всех $t\in[2;4]$.

Найдем множество значений функции $f(t)$ при $t\in[2;4]$.

Воспользуемся алгоритмом нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке с помощью производной.

Найдем производную функции: $f'(t)=\dfrac{2}{t^2}-\dfrac{6}{t^3}=\dfrac{2t-6}{t^3}$.

Нули производной: $f'(t)=0,\ \ t=3\in[2;4]$.



На отрезке $[2;4]$ $f_{наим}=f(3)=\dfrac{2\cdot 3^2-2\cdot 3+3}{3^2}=\dfrac{5}{3}$.

Неравенство $a<f(t)$ верно всегда при всех $t\in[2;4]$, если $a<f_{наим}$, т.е. $a<\dfrac{5}{3}$.

Ответ: $a<\dfrac{5}{3}$.

▪ *Тест* 1. Рациональные функции

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^3+2x^2-ax+4=0$ имеет единственный корень на отрезке $[-1;2]$.

№2. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $x^3+4x^2-x\log_2(b-3)+6=0$ имеет единственное решение на отрезке $[-2;2]$.

№3. Найдите все значения a, для каждого из которых неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$
а) выполняется для всех x; б) выполняется для всех $x>0$; в) выполняется для всех $x<0$;
г) выполняется для всех $-1<x<0$.

▪ *Ответы (тест)* 1. Рациональные функции

№1	№2	№3
$a\le -5,\ a=7,\ a>10$	$3<b\le\frac{385}{128},\ b=2051,\ b>32771$	*а)* $a>1$; *б)* $a>1$; *в)* $a\ge 0$; *г)* $a\ge -\frac{1}{3}$

№3. **Найдите все значения a, для каждого из которых неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$**
а) выполняется для всех x; б) выполняется для всех $x>0$; в) выполняется для всех $x<0$; г) выполняется для всех $-1<x<0$.

Решение:

$а)\ I.\ a=0\Rightarrow -4x+1>0,\ 4x<1,\ x<\frac{1}{4}.$ Неравенство выполняется не для всех x, значит, $a\neq 0.$

$II.\ f(x)=ax^2-4x+3x+1$ (квадратичная функция, графиком является парабола)

$$f(x)>0,\ \text{если}\ \begin{cases}D<0\\ a>0\end{cases};\quad \frac{D}{4}=4-a(3a+1)=-3a^2-a+4$$

$$\begin{cases}-3a^2-a+4<0\\ a>0\end{cases};\ \begin{cases}3a^2+a-4>0\\ a>0\end{cases};\ \begin{cases}(a-1)\left(a+\frac{4}{3}\right)>0\\ a>0\end{cases};\ \underline{a>1}$$

$б)\ I.\ a=0;\ \ x<\frac{1}{4}.$ Не выполняется для всех $x>0$

$$II.\ a\neq 0;\ a\left(x^2+3\right)>4x-1;\ \ a>\frac{4x-1}{x^2+3}\quad \left(x^2+3>0\right)$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{4x-1}{x^2+3}$. Найдем наибольшее значение $f(x)$ при $x>0.$

$$f'(x)=\frac{(4x-1)'\left(x^2+3\right)-(4x-1)\left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{-4x^2+2x+12}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$f'(x)=0,\ \ x_1=-\frac{3}{2},\ \ x_2=2;\qquad f(2)=f_{\max}=\frac{4\cdot 2-1}{2^2+3}=1$$

При всех $x>0$ неравенство $a>f(x)$ выполняется всегда, если $a>f_{наиб.}=1\Rightarrow \underline{a>1}$

$в)\ I.\ a=0;\ x<\frac{1}{4}$ выполняется для всех $x<0$

$II.\ a\neq 0,\ \ a>\frac{4x-1}{x^2+3}$ при всех $x<0$

$$f(x)=\frac{4x-1}{x^2+3}<0,\ \ a>f(x)$$

Неравенство будет верным всегда, если $\underline{a\geq 0}$

$г)\ \ a>\frac{4x-1}{x^2+3};\ f(x)=\frac{4x-1}{x^2+3}$

На промежутке $x\in(-1;0)$ $f(x)$ возрастает, поэтому наибольшее

значение функции $\ f_{наиб.}=f(0)=\frac{4\cdot 0-1}{0^2+3}=-\frac{1}{3}.$

Но т.к. $x\in(1;0)$, то $f(x)<-\frac{1}{3}$

Неравенство $a>f(x)$ выполняется при всех $x\in(-1;0)$, если $a>f_{наиб.}$, поэтому $a\geq -\frac{1}{3}$

Ответ: а) $a>1$; *б)* $a>1$; *в)* $a\geq 0$; *г)* $a\geq -\frac{1}{3}$.

2. Тригонометрические функции

№1. Найти все значения p, при которых уравнение $4\sin x+9=p\left(1+ctg^2x\right)$ имеет решение.

№2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\sin x+\cos x=a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

№3. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\frac{1+(2-2k)\sin t}{\cos t-\sin t}=2k$ имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

№4. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\frac{2+(4-4k)\cos t}{4\cos t-\sin t}=1$ не имеет решений на интервале $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$.

▪ *Решение (примеры)* 2. Тригонометрические функции

№1. Найти все значения p, при которых уравнение $4\sin x+9=p\left(1+ctg^2x\right)$ имеет решение.

Решение:
ОДЗ: $\sin x\neq 0$.

Выразим из уравнения параметр p: $p=\frac{4\sin x+9}{1+ctg^2x}$, $p=(4\sin x+9)\sin^2 x$.

Пусть $\sin x=t$, причем $t\in[-1;1]$ и $t\neq 0$. Получим $p=(4t+9)t^2$, $p=4t^3+9t^2$.
Найдем множество значений правой части уравнения.
Уравнение будет иметь решения, если значения параметра p совпадают с этим множеством.

Введем функцию $f(t)=4t^3+9t^2$. Множество ее значений будем искать с помощью производной, учитывая, что $t\in[-1;1]$ и $t\neq 0$.

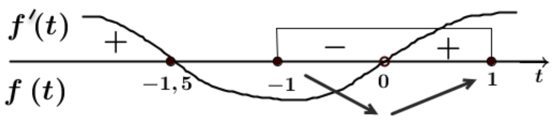
$f'(t)=12t^2+18t$

$f'(t)=0$

$12t^2+18t=0$

$t(2t+3)=0$

$t=0 \ \vee \ t=-1{,}5$



Найдем значения функции $f(t)=4t^3+9t^2$ в критической точке и на концах отрезка $t\in[-1;1]$ и $t\neq 0$.

$f(-1)=-4+9=5$, $f(0)=0$, $f(1)=4+9=13$

Множество значений функции $E(f)=(0;13]$, поэтому уравнение будет иметь решения, если $p\in(0;13]$.

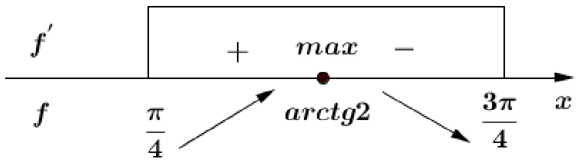
Ответ: $(0;13]$.

№2. **Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\sin x+\cos x=a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.**

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x)=2\sin x+\cos x$. Найдем множество значений этой функции на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

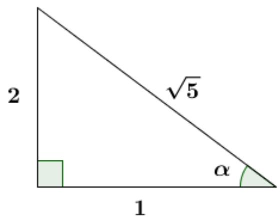
$$f'(x)=2\cos x-\sin x,\quad f'(x)=0,\quad 2\cos x-\sin x=0,\quad tgx=2,\quad x=arctg2+\pi k.$$



$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\sin\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(arctg2)=2\sin(arctg2)+\cos(arctg2)=\frac{2\cdot 2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

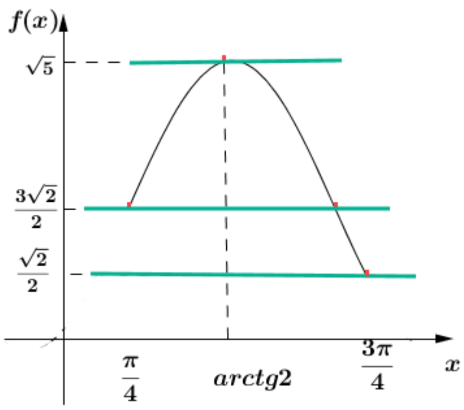


$$arctg2=\alpha,\quad tg\alpha=2,$$

$$\sin(arctg2)=\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos(arctg2)=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$E(f)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{5}\right]$$



Уравнение $2\sin x+\cos x=a$ решим графически.

$$\begin{cases} f(x)=2\sin x+\cos x \\ f(x)=a \end{cases}$$

Уравнение имеет единственное решение при

$$a\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left\{\sqrt{5}\right\}.$$

Ответ: $a\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left\{\sqrt{5}\right\}.$

№3. **Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\dfrac{1+(2-2k)\sin t}{\cos t-\sin t}=2k$ имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.**

Решение:

ОДЗ: $\cos t-\sin t\neq 0,\;\; tgt\neq 1,\;\; t\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\; n\in\mathbb{Z}$.

Выразим из уравнения параметр k: $k=\dfrac{1+2\mathrm{sint}}{2\cos t}$.

С учетом ОДЗ и $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, имеем, что $t\neq\dfrac{\pi}{4}$. Значит, $k\neq\dfrac{1+2\sin\dfrac{\pi}{4}}{2\cos\dfrac{\pi}{4}},\;\; k\neq\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

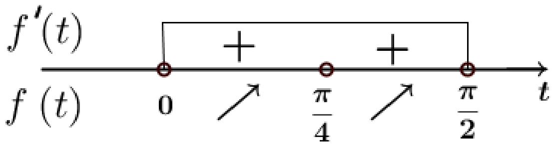
Найдем множество значений правой части уравнения.
Уравнение будет иметь решения, если значения параметра k совпадают с этим множеством.

Введем функцию $f(t)=\dfrac{1+2\sin t}{2\cos t}$. Множество ее значений будем искать с помощью производной, учитывая, что $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(t)=\frac{(1+2\sin t)'\cdot 2\cos t-(2\cos t)'\cdot(1+2\sin t)}{(2\cos t)^2}$$

$$f'(t)=\frac{4+2\sin t}{4\cos^2 t}$$

Заметим, что $f'(t)>0$ при всех допустимых значениях t, поэтому $f(t)$ всегда возрастает.



$$f(0)=\frac{1+2\sin 0}{2\cos 0}=\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2},$$

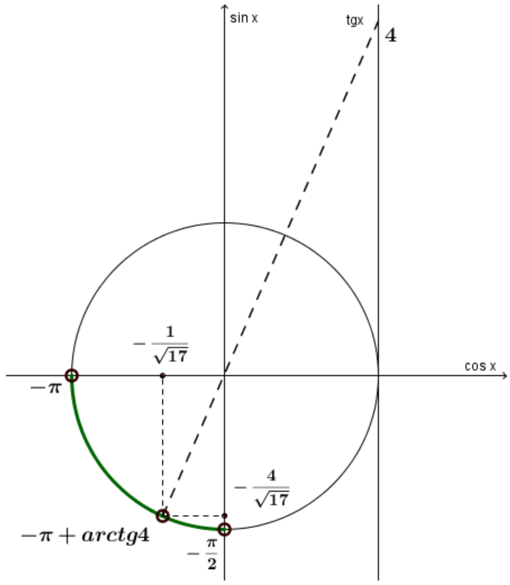
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+2\sin\dfrac{\pi}{2}}{2\cos\dfrac{\pi}{2}}=\frac{3}{0}\text{ не существует, при } x\to\frac{\pi}{2},\; f(t)\to\infty.$$

Множество значений функции $E(f)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\infty\right)$, поэтому уравнение будет иметь решения, если $\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\; k>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\; k>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

№4. **Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\dfrac{2+(4-4k)\cos t}{4\cos t-\sin t}=1$ не имеет решений на интервале $\left(-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right)$.**

Решение:



ОДЗ: $4\cos t-\sin t\neq 0,\ \ tgt\neq 4,\ \ t\neq arctg4+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Выразим из уравнения параметр k: $k=\dfrac{2+\text{sint}}{4\cos t}$.

С учетом ОДЗ и $t\in\left(-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right)$, имеем, что $t\neq -\pi+arctg4$.

Т.к. $tgt\neq 4$, то найдем значения $\sin t$ и $\cos t$, которые надо исключить.

$$1+tg^2t=\frac{1}{\cos^2 t},\ \ 1+16=\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\cos t\neq\pm\frac{1}{\sqrt{17}},\ \ t\in III\rightarrow\cos t\neq-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

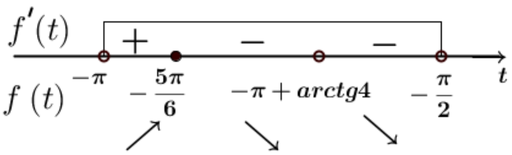
$$\sin t=-\sqrt{1-\cos^2 t}=-\sqrt{1-\frac{1}{17}}=-\frac{4}{\sqrt{17}}$$, значит, $\sin t\neq-\dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

Тогда $k\neq\dfrac{2+\left(-\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)}{4\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)},\ \ k\neq 1-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. Найдем множество значений правой части уравнения.

Уравнение будет иметь решения, если значения параметра k совпадают с этим множеством.

Введем функцию $f(t)=\dfrac{2+\sin t}{4\cos t}$. Множество ее значений будем искать с помощью производной, учитывая, что $t\in(-\pi;-\pi+\operatorname{arctg}4)\cup\left(-\pi+\operatorname{arctg}4;-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(t)=\frac{4+8\sin t}{16\cos^2 t},\ \ \ f'(t)=0,\ \ \sin t=-\frac{1}{2}$$



На заданном интервале $t=-\dfrac{5\pi}{6}$.

$$f(-\pi)=\frac{2+\sin(-\pi)}{4\cos(-\pi)}=-\frac{1}{2},\ \ f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2-\frac{1}{2}}{4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{0}$$ не существует, при $x\rightarrow-\dfrac{\pi}{2},\ f(t)\rightarrow-\infty$.

Множество значений функции $E(f)=\left(-\infty;1-\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(1-\dfrac{\sqrt{17}}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right]$, поэтому уравнение не имеет решений, если $k=1-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ и $k>-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $k=1-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ и $k>-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

▪ *Тест* 2. Тригонометрические функции

№1. Найти все значения p, при которых уравнение $8\sin^3 x = p - 7\cos 2x$ не имеет решений.

№2. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\cos^2 x + (p+2)\cos x + 3p + 1 = 0$ не имеет корней.

№3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

№4. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\frac{2(k+1)\cos t - k}{\sin t + \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

№5. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\frac{2-(4-4k)\sin t}{\cos t - 4\sin t} = 1$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

▪ *Ответы (тест)* 2. Тригонометрические функции

№1	№2	№3	№4	№5
$(-\infty;-15);(7;\infty)$	$(-\infty;-1);(0;\infty)$	$\left[\sqrt{2};2\sqrt{2}\right);\left\{\sqrt{10}\right\}$	$-2 \le k < -2+\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2} < k \le 0$	$\frac{1}{2} \le k < 1+\frac{\sqrt{17}}{2}$, $k > 1+\frac{\sqrt{17}}{2}$

№1. **Найти все значения p, при которых уравнение $8\sin^3 x = p - 7\cos 2x$ не имеет решений.**

Решение:

Выразим параметр *p*: $8\sin^3 x + 7\left(1 - 2\sin^2 x\right) = p,\ \ p = 8\sin^3 x - 14\sin^2 x + 7$

Пусть $\sin x = t$, причем $t \in [-1;1]$. Получим уравнение $p = 8t^3 - 14t^2 + 7$.

Найдем множество значений правой части уравнения. Уравнение будет иметь решения, если значения параметра *p* совпадают с этим множеством.

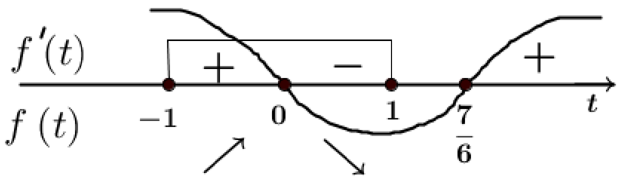
Введем функцию $f(t) = 8t^3 - 14t^2 + 7$. Множество ее значений будем искать с помощью производной, учитывая, что $t \in [-1;1]$.

$$f'(t) = 24t^2 - 28t$$

$$f'(t) = 0$$

$$6t^2 - 7t = 0$$

$$t = 0 \ \vee \ t = \frac{7}{6}$$



Найдем значения функции $f(t) = 8t^3 - 14t^2 + 7$ в критической точке и на концах отрезка $[-1;1]$.

$f(0) = 7$, $f(-1) = -8 - 14 + 7 = -15$, $f(1) = 8 - 14 + 7 = 1$.

Множество значений функции $[-15;7]$, поэтому уравнение будет иметь решения, если $p \in [-15;7]$. Но по условию требуются значения *p*, при которых уравнений решений не имеет, тогда $p \in (-\infty;-15) \cup (7;\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-15) \cup (7;\infty)$.

№2. **Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\cos^2 x + (p+2)\cos x + 3p + 1 = 0$ не имеет корней.**

Решение:

Пусть $\cos x = t,\ \ |t| \le 1$. Тогда уравнение примет вид $t^2 + (p+2)t + 3p + 1 = 0$.

Выразим p через t: $p = -\dfrac{(t+1)^2}{t+3} = p(t)$. С помощью производной исследуем функцию $p(t)$ на отрезке $[-1;1]$.

$p'(t) = -\dfrac{(t+1)(t+5)}{(t+3)^2}$. Заметим, что $p'(t) \le 0$ при $t \in [-1;1]$, значит, функция $p(t)$ убывает на отрезке $[-1;1]$. Найдем множество значений функции $p(t)$ на отрезке $[-1;1]$: $p(-1) = 0$, $p(1) = -1$, тогда $E(p) = [-1;0]$. Получили, что при $p \in [-1;0]$ уравнение имеет решение, тогда при $p \in (-\infty;-1) \cup (0;\infty)$ решений не имеет.

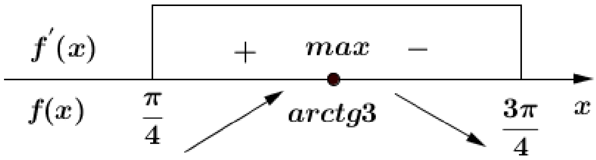
Ответ: $(-\infty;-1) \cup (0;\infty)$.

№3. **Найти все значения параметра** a **, при каждом из которых уравнение** $3\sin x + \cos x = a$ **имеет ровно один корень на отрезке** $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = 3\sin x + \cos x$. Найдем множество значений этой функции на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

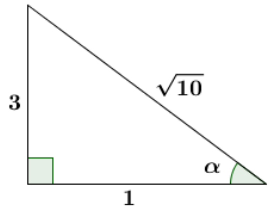
$$f'(x) = 3\cos x - \sin x, \quad f'(x) = 0, \quad 3\cos x - \sin x = 0, \quad tgx = 3, \quad x = arctg3 + \pi k.$$



$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f(arctg3) = 3\sin(arctg3) + \cos(arctg3) = \frac{3\cdot 3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

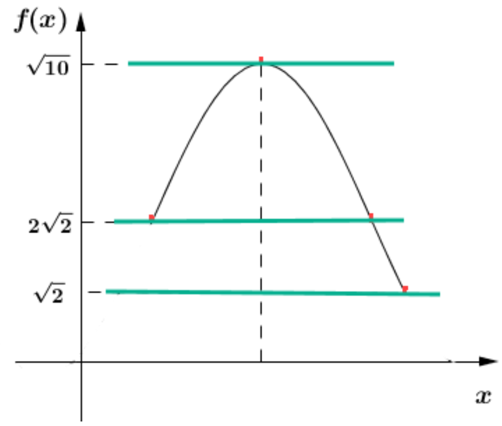


$arctg3 = \alpha, \quad tg\alpha = 3,$

$\sin(arctg3) = \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}},$

$\cos(arctg3) = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$$E(f) = \left[\sqrt{2}; \sqrt{10}\right]$$



Уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение при $a \in \left[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right) \cup \left\{\sqrt{10}\right\}$.

Ответ: $a \in \left[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right) \cup \left\{\sqrt{10}\right\}$.

№4. **Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\frac{2(k+1)\cos t-k}{\sin t+\cos t}=2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.**

Решение:

ОДЗ: $\cos t+\sin t\neq 0,\ \ tgt\neq -1,\ \ t\neq -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

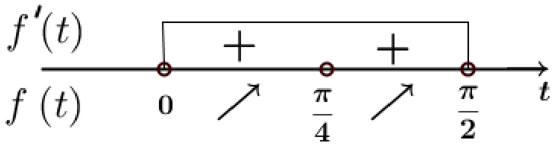
Выразим из уравнения параметр k: $k=\frac{2\text{sint}}{2\cos t-1}$.

С учетом ОДЗ и $t\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, имеем, что $t\neq\frac{3\pi}{4}$. Значит, $k\neq\frac{2\sin\frac{3\pi}{4}}{2\cos\frac{3\pi}{4}-1}$, $k\neq -2+\sqrt{2}$.

Найдем множество значений правой части уравнения.
Уравнение будет иметь решения, если значения параметра k совпадают с этим множеством.

Введем функцию $f(t)=\frac{2\sin t}{2\cos t-1}$. Множество ее значений будем искать с помощью производной, учитывая, что $t\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

$f'(t)=\frac{4-2\sin t}{(2\cos t-1)^2}$.



Заметим, что $f'(t)>0$ при всех допустимых значениях t, поэтому $f(t)$ всегда возрастает.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{2\cos\frac{\pi}{2}-1}=-2$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-2$, $f(\pi)=\frac{2\sin\pi}{2\cos\pi-1}=0$.

Множество значений функции $E(f)=\left[-2;-2+\sqrt{2}\right)\cup\left(-2+\sqrt{2};0\right]$, поэтому уравнение будет иметь решения, если $-2\le k<-2+\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2}<k\le 0$.

Ответ: $-2\le k<-2+\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2}<k\le 0$.

№5. **Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\dfrac{2-(4-4k)\sin t}{\cos t-4\sin t}=1$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[-3\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.**

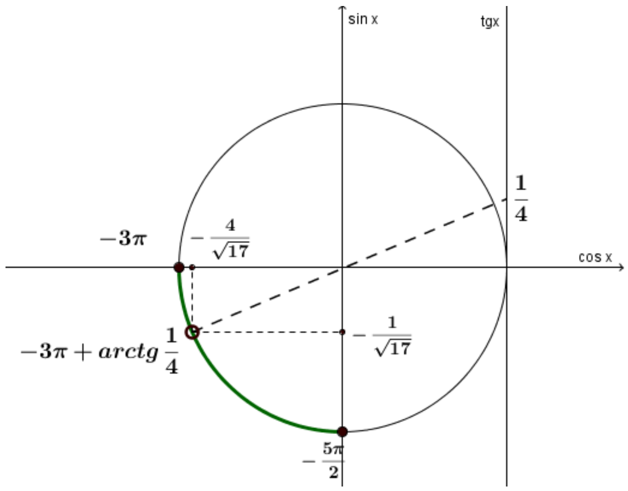
Решение: ОДЗ:

$$\cos t-4\sin t\neq 0,\ \ tgt\neq\frac{1}{4},\ \ t\neq arctg\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Выразим из уравнения параметр k: $k=\dfrac{\cos t-2}{4\sin t}$.

С учетом ОДЗ и $t\in\left[-3\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$, имеем, что

$$t\neq -3\pi+arctg\frac{1}{4}.$$



Т.к. $tgt\neq\dfrac{1}{4}$, то найдем значения $\sin t$ и $\cos t$, которые надо исключить.

$$1+tg^2t=\frac{1}{\cos^2 t},\ 1+\frac{1}{16}=\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\cos t\neq\pm\frac{4}{\sqrt{17}},\ \ t\in III\to\cos t\neq-\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin t=-\sqrt{1-\cos^2 t}=-\sqrt{1-\frac{16}{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}},$$

значит, $\sin t\neq-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Тогда $k\neq\dfrac{-\dfrac{4}{\sqrt{17}}-2}{4\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)}$, $k\neq 1+\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Найдем множество значений правой части уравнения.

Уравнение будет иметь решения, если значения параметра k совпадают с этим множеством.

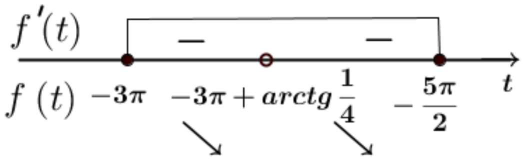
Введем функцию $f(t)=\dfrac{\cos t-2}{4\sin t}$. Множество ее значений будем искать с помощью производной, учитывая, что $t\in\left[-3\pi;-3\pi+arctg\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(-3\pi+arctg\dfrac{1}{4};-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

$$f'(t)=\frac{-4+8\cos t}{16\sin^2 t}$$

$$f'(t)=0,\ \ \cos t=\frac{1}{2}$$

На заданном интервале корней нет, т.к. $\cos t<0$ и

$f'(t)<0\Rightarrow f(t)\searrow$



$$f\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=\frac{0-2}{4\cdot(-1)}=\frac{1}{2},\ \ f\left(-3\pi+arctg\frac{1}{4}\right)=1+\frac{\sqrt{17}}{2},$$

$f(-3\pi)=$ не существует, при $x\to-3\pi$, $f(t)\to\infty$.

Множество значений функции $E(f)=\left[\dfrac{1}{2};1+\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(1+\dfrac{\sqrt{17}}{2};\infty\right)$, поэтому уравнение имеет хотя бы одно решение, если $\dfrac{1}{2}\le k<1+\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ и $k>1+\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\le k<1+\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ и $k>1+\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

3. Показательная и логарифмическая функции

▪ *Примеры*

№1. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $\dfrac{4^{-x^2}-a\cdot 2^{1-x^2}+a}{2^{1-x^2}-1}=3$ имеет хотя бы одно решение.

№2. Найти все значения параметра а, при которых неравенство $4^x-a\cdot 2^x-a+3\le 0$ имеет хотя бы одно решение.

№3. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{\left(3-\cos^2 x\right)-a}{a+\left(4\cdot 5^x+2\cdot 5^{-x}\right)}\le 0$ не имеет решений.

№4. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{a-\left(\log_x 3+2\sqrt{5}\cdot\log_3 x-6\right)}{\left(3\cos\sqrt{x-9}-5\right)-a}\le 0$ не имеет решений.

▪ *Решение (примеры)*

№1. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $\dfrac{4^{-x^2}-a\cdot 2^{1-x^2}+a}{2^{1-x^2}-1}=3$ имеет хотя бы одно решение

Решение: *<u>1-ый способ</u>*

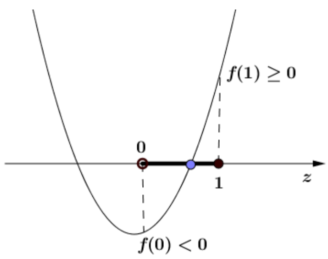
Сделаем замену $z=2^{-x^2}$, $-x^2\le 0$, $2^{-x^2}\le 2^0$, $0<z\le 1$. Задачу можно сформулировать так: найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{z^2-2az+a}{2z-1}=3$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0<z\le 1$.

Перейдем к системе: $\begin{cases} z^2-2az+a=6z-3 \\ z\ne 0{,}5 \\ 0<z\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-2(a+3)z+a+3=0 \\ z\ne 0{,}5 \\ 0<z\le 1 \end{cases}$.

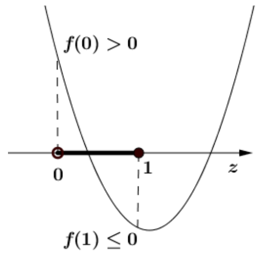
Заметим, что ни при одном значении a число $z=0{,}5$ не является корнем уравнения. Рассмотрим функцию $f(z)=z^2-2(a+3)z+a+3$. Ее график - парабола, ветви вверх. Следовательно, условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:

1) Трехчлен имеет два различных корня, и только больший из них лежит на промежутке $(0;1]$ т.е.

$\begin{cases} f(0)<0 \\ f(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3<0 \\ 1-a-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-3 \\ a\le -2 \end{cases} \Leftrightarrow a<-3.$

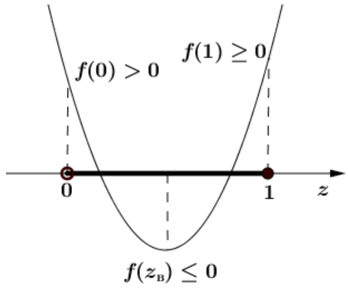


2) Трехчлен имеет два различных корня, и только меньший из них лежит на промежутке $(0;1]$, т.е.



$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3>0 \\ 1-a-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-3 \\ a\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow a\ge -2 .$$

3) Трехчлен имеет два корня, возможно, совпадающих, и оба лежат на промежутке $(0;1]$, т.е.

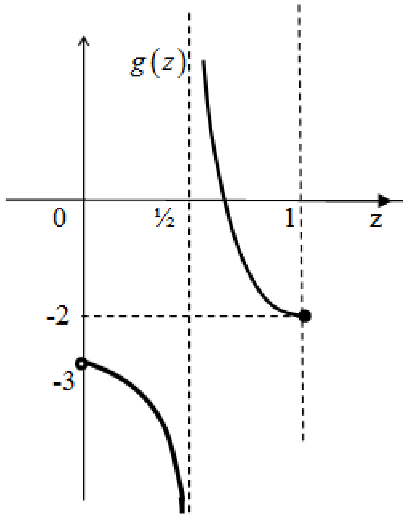


$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)\ge 0 \\ f(z_в)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3>0 \\ 1-a-3\ge 0 \\ (a+3)^2-2(a+3)+a+3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-3 \\ a\le -2 \\ a\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow a=-2$$

Ответ: $a<-3,\quad a\ge -2$.

2-ой способ

Разрешим уравнение относительно a: $a=\dfrac{z^2-6z+3}{2z-1}$. Заметим, что ни при одном значении a число $z=0,5$ не является корнем уравнения.



Рассмотрим функцию $g(z)=\dfrac{z^2-6z+3}{2z-1}$ и $0<z\le 1$. Уравнение будет иметь решения, если значения параметра $a\in E(g)$ (принадлежат множеству значений функции $g(z)$) при всех $z\in(0;1]$). Применим производную для нахождения множества значений функции.

$g'(z)=\dfrac{2z(z-1)}{(2z-1)^2}$. Найдем нули производной:

$g'(z)=0,\quad z=0,\quad z=1$. На промежутках $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{2};1\right]$ функция $g(z)$ убывает и $g(0)=-3$ и $g(1)=-2$. Нарисуем эскиз графика функции $g(z)$.

Множество значений функции $\left[\begin{array}{l} g(z)<-3 \\ g(z)\ge -2 \end{array}\right.$

Поэтому уравнение будет иметь решения, если $\left[\begin{array}{l} a<-3 \\ a\ge -2 \end{array}\right.$

Ответ: $a<-3,\quad a\ge -2$.

№2. **Найти все значения параметра а, при которых неравенство $4^x - a\cdot 2^x - a + 3 \le 0$ имеет хотя бы одно решение.**

Решение:

$$4^x - a\cdot 2^x - a + 3 \le 0$$
$$4^x + 3 \le a\left(2^x + 1\right)$$
$$a \ge \frac{4^x + 3}{2^x + 1}$$

Пусть $f(x) = \dfrac{4^x + 3}{2^x + 1}$ и, если $2^x = t > 0$, то исследуем функцию $g(t) = \dfrac{t^2 + 3}{t + 1}$.

$D(g) = (0;\infty)$; $g'(t) = \dfrac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}$; $g'(t) = 0$, $t = 1$

При $t \in (0;1)$ $g'(t) < 0$ и функция $g(t)$ убывает, при $t \in (1;\infty)$ $g'(t) > 0$ и $g(t)$ возрастает. Значит, при $t = 1$ функция $g(t)$ имеет минимум $g_{\min} = g(1) = 2$ и $E(g) = [-2;\infty)$.

Неравенство $a \ge g(t)$ имеет хотя бы одно решение, если $a \ge g_{\min}$, значит, $a \ge -2$.

Ответ: $a \ge -2$.

№3. **Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{\left(3 - \cos^2 x\right) - a}{a + \left(4\cdot 5^x + 2\cdot 5^{-x}\right)} \le 0$ не имеет решений.**

Решение:
Решим неравенство методом интервалов относительно a:

$$\frac{a - \left(3 - \cos^2 x\right)}{a - \left(-4\cdot 5^x - 2\cdot 5^{-x}\right)} \ge 0.$$

Пусть $f(x) = 3 - \cos^2 x$ и $g(x) = -4\cdot 5^x - 2\cdot 5^{-x}$. Ограничений на переменную, для введенных функций, нет.

Найдем множество значений функции $f(x)$:

$-1 \le -\cos^2 x \le 0$, $2 \le 3 - \cos^2 x \le 3$. Значит, $E(f) = [2;3]$.

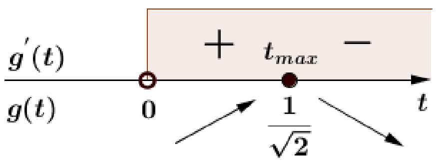
Найдем множество значений функции $g(x)$.

Введем замену $t = 5^x$, $t > 0$.

$$g(t) = -4t - \frac{2}{t}$$

$$g'(t) = -4 + \frac{2}{t^2} = \frac{-2\left(2t^2 - 1\right)}{t^2} = \frac{-4\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{t^2},$$

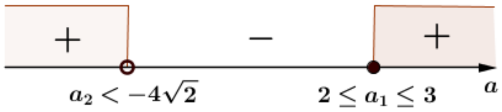
$$g'(t) = 0,\quad \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,\quad t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$



При $t > 0$ в точке $t_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ функция принимает наибольшее значение

$$g_{наиб} = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2}.$$ Значит, $E(g) = \left(-\infty;-4\sqrt{2}\right]$.

Решим неравенство $\dfrac{a - f(x)}{a - g(x)} \ge 0$. Пусть $a_1 = f(x)$ и $a_2 = g(x)$, тогда $\dfrac{a - a_1}{a - a_2} \ge 0$.



Чтобы неравенство не имело решений, необходимо чтобы $-4\sqrt{2} \le a < 2$

Ответ: $\left[-4\sqrt{2};2\right)$.

№4. **Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{a-\left(\log_x 3+2\sqrt{5}\cdot\log_3 x-6\right)}{\left(3\cos\sqrt{x-9}-5\right)-a} \le 0$ не имеет решений.**

Решение:
Решим неравенство методом интервалов относительно a:

$$\frac{a-\left(\log_x 3+2\sqrt{5}\cdot\log_3 x-6\right)}{a-\left(3\cos\sqrt{x-9}-5\right)} \ge 0.$$

Пусть $f(x)=\log_x 3+2\sqrt{5}\log_3 x-6$ и $g(x)=3\cos\sqrt{x-9}-5$. Найдем область определения введенных функций: $\begin{cases} x \ne 1 \\ x>0 \Leftrightarrow x \ge 9. \\ x \ge 9 \end{cases}$

Найдем множество значений функции $f(x)$ на области определения.

Введем замену $t=\log_3 x$ и т.к. $x \ge 9,\ \ \log_3 x \ge 9,\ \ \log_3 x \ge 2$, то $t \ge 2$.

$$f(t)=\frac{1}{t}+2\sqrt{5}t-6$$

$$f'(t)=-\frac{1}{t^2}+2\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}t^2-1}{t^2},$$

$$f'(t)=0,\ \ 2\sqrt{5}t^2-1=0,\ \ t^2=\frac{1}{2\sqrt{5}},\ \ t=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{20}}$$

При $t \ge 2$ $f'(t)>0$, значит, $f(t)-$ возрастает и $f_{наим}=f(2)=\frac{1}{2}+4\sqrt{5}-6=4\sqrt{5}-5{,}5$.

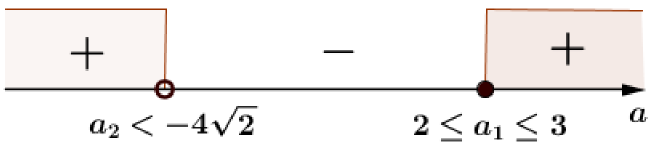
$E(f)=\left[4\sqrt{5}-5{,}5;\infty\right)$.

Найдем множество значений функции $g(x)$ на области определения.

$$-1 \le \cos\sqrt{x-9} \le 1,\ \ -3 \le 3\cos\sqrt{x-9} \le 3,\ \ -8 \le 3\cos\sqrt{x-9}-5 \le -2.$$

$E(g)=[-8;-2]$.

Решим неравенство $\dfrac{a-f(x)}{a-g(x)} \ge 0$. Пусть $a_1=f(x)$ и $a_2=g(x)$, тогда $\dfrac{a-a_1}{a-a_2} \ge 0$.



Чтобы неравенство не имело решений, необходимо чтобы $-2 \le a < 4\sqrt{5}-5{,}5$

Ответ: $\left[-2;4\sqrt{5}-5{,}5\right)$

▪ *Тест* 3. Показательная и логарифмическая функции

№1. Найдите все допустимые значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{\left(2^x+5\cdot 2^{-x}\right)-a}{a+6}\le 0$ не имеет решений.

№2. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{x-\left(2^a+2^{3-a}\right)}{x-(\sin a-1)}\le 0$ выполнено хотя бы при одном x, принадлежащем промежутку $(6;9]$.

▪ *Ответы (тест)* 3. Показательная и логарифмическая функции

№1	№2
$\left(-6;2\sqrt{5}\right)$	$(-\infty;1);(2;\infty)$

▪ *Решение (тест)* 3. Показательная и логарифмическая функции

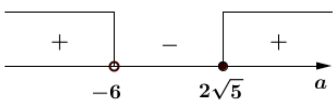
№1. Найдите все допустимые значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{\left(2^x+5\cdot 2^{-x}\right)-a}{a+6}\le 0$ не имеет решений.

Решение:

$$\frac{a-\left(2^x+5\cdot 2^{-x}\right)}{a+6}\ge 0$$

Пусть $f(x)=2^x+\dfrac{5}{2^x}$, $t=2^x>0$, $g(t)=t+\dfrac{5}{t}$. Найдем множество значений функции $g(t)$.

$g'(t)=1-\dfrac{5}{t^2}=\dfrac{t^2-5}{t^2}=\dfrac{\left(t-\sqrt{5}\right)\left(t+\sqrt{5}\right)}{t^2}$, $t>0$. При $t\in\left(0;\sqrt{5}\right)$ $g'(t)<0$ и функция $g(t)$ убывает, при $t\in\left(\sqrt{5};\infty\right)$ $g'(t)>0$ и функция $g(t)$ возрастает. Значит, в точке $t=\sqrt{5}$ функция принимает минимальное значение $g\left(\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}+\dfrac{5}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ и $E(g)=E(f)=\left[2\sqrt{5};\infty\right)$.



Решим $\dfrac{a-f(x)}{a+6}\ge 0$ неравенство методом интервалов.

Значит, при всех допустимых значениях a неравенство не имеет решения, если $a\in\left(-6;2\sqrt{5}\right)$

Ответ: $\left(-6;2\sqrt{5}\right)$.

№2. **Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{x-\left(2^a+2^{3-a}\right)}{x-(\sin a-1)}\le 0$ выполнено хотя бы при одном x, принадлежащем промежутку $(6;9]$.**

Решение:

Пусть $f(a)=2^a+2^{3-a}=2^a+\dfrac{8}{2^a}$. Введем замену $t=2^a>0,\ \ g(t)=t+\dfrac{8}{t}$. Найдем множество значений функции $g(t)$.

$g'(t)=1-\dfrac{8}{t^2}=\dfrac{t^2-8}{t^2},\ \ g'(t)=0,\ \ t=\pm 2\sqrt{2}$, но $t>0$, поэтому $t=2\sqrt{2}$.

При $t\in\left(0;2\sqrt{2}\right)$ $g'(t)<0$ и функция $g(t)$ убывает, при $t\in\left(2\sqrt{2};\infty\right)$ $g'(t)>0$ и функция $g(t)$ возрастает, при $t=2\sqrt{2}$ функция принимает минимальное значение, равное

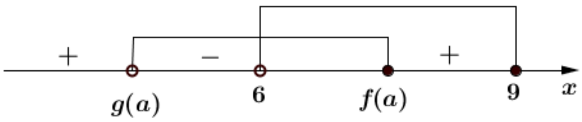
$g_{\min}=g\left(2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}+\dfrac{8}{2\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$. $E(g)=E(f)=\left[4\sqrt{2};\infty\right)$.

Пусть $h(a)=\sin a-1$. Найдем множество значений функции $h(a)$.

$-1\le\sin a\le 1,\quad -2\le\sin a-1\le 0,\quad E(h)=[-2;0]$.

$\dfrac{x-f(a)}{x-h(a)}\le 0$. Неравенство выполняется хотя бы при одном x, принадлежащем промежутку $(6;9]$, если

$f(a)>6$.



$2^a+\dfrac{8}{2^a}>6,\ \ 2^{2a}-6\cdot 2^a+8>0,\ \ \left(2^a-4\right)\left(2^a-2\right)>0,\ \ (a-2)(a-1)>0,\ \ a\in(-\infty;1)\cup(2;\infty)$.

Ответ: $(-\infty;1)\cup(2;\infty)$.