Оптимизация с производной

- ***Примеры***

№1. Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v (км/ч), составляет $\left(90+0,4v^2\right)$ руб. за 1 час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость прохода 1 км пути была наименьшей?

№2. Автомобиль двигается из пункта А в пункт В. Путь от пункта А до промежуточного пункта С он проезжает со скоростью 60 км/ч, а в пункте С вынужден снизить скорость на $2V$ км/ч. Проехав с этой скоростью 2/5 пути от С до В, оставшийся до В путь он преодолевает со скоростью на $3V$ км/ч больше первоначальной. При каком значении V путь от пункта С до пункта В будет преодолен за минимальное время?

№3. На каждом из двух комбинатов работает по 200 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 1 деталь А или 3 детали В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен.

Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужна или 1 деталь А, или 1 деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

№4. В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

▪ *Решение (примеры)* Оптимизация с производной

№1. **Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v (км/ч), составляет $\left(90+0,4v^2\right)$ руб. за 1 час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость прохода 1 км пути была наименьшей?**

Решение:

Время, которое затрачивает катер на прохождение 1 км пути со скоростью v км/ч равно $\frac{1}{v}$ ч.

Стоимость прохода 1 км пути при скорости v км/ч равна $f(v)=\frac{1}{v}\cdot\left(90+0,4v^2\right)$ руб. Исследуем полученную функцию на минимум при $v>0$.

$f(v)=\frac{90}{v}+0,4v$; $f'(v)=0,4-\frac{90}{v^2}=\frac{0,4(v-15)(v+15)}{v^2}$. Учитывая, что $v>0$, получим, $f'(v)<0$ при $v<15$ и $f'(v)>0$ при $v>15$, значит $v=15$ - это точка минимума и в ней функция достигает наименьшее значение.

Ответ: 15.

№2. **Автомобиль двигается из пункта А в пункт В. Путь от пункта А до промежуточного пункта С он проезжает со скоростью 60 км/ч, а в пункте С вынужден снизить скорость на $2V$ км/ч. Проехав с этой скоростью 2/5 пути от С до В, оставшийся до В путь он преодолевает со скоростью на $3V$ км/ч больше первоначальной. При каком значении V путь от пункта С до пункта В будет преодолен за минимальное время?**

Решение:

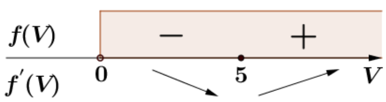
$$t_1=\frac{\frac{2}{5}S}{60-2V},\quad t_2=\frac{\frac{3}{5}S}{60+3V}$$

$$f(V)=\frac{2S}{5(60-2V)}+\frac{3S}{5(60+3V)}$$

$$f'(V)=-\frac{2S\cdot(-2)}{5(60-2V)^2}-\frac{3S\cdot 3}{5(60+3V)^2}=\frac{4S(60+3V)^2-9S(60-2V)^2}{5(60-2V)^2(60+3V)^2}$$

$$f'(V)=0,\quad 4S(60+3V)^2-9S(60-2V)^2=0$$

$$\left[\begin{array}{l}2(60+3V)=3(60-2V)\\ 2(60+3V)=-3(60-2V)\end{array}\right.\Leftrightarrow V=5$$



При $V_{\min}=5$ функция имеет единственный минимум, тогда и наименьшее значение функция принимает в этой же точке.

Ответ: 5.

№3. В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Решение:

Заметим, что в первой области рабочие добывают никель в три раза эффективнее, чем алюминий, и поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, то всех рабочих целесообразно направить на добычу никеля. Значит, в первой области будет добыто никеля $160\cdot 5\cdot 0{,}3=240$ кг.

Во второй области для добычи x кг алюминия требуется x^2 человеко-часов, а для добычи y кг никеля требуется y^2 человеко-часов. Так как в области 160 рабочих, которые готовы трудиться по 5 ч, то они отработают 800 человеко-часов и $x^2+y^2=800$. Рабочие добывают $(x+y)$ кг металла и надо найти наибольшее значение этого выражения. Поскольку $y=\sqrt{800-x^2}$, тогда $x+y=x+\sqrt{800-x^2}$.

Пусть $f(x)=x+\sqrt{800-x^2}$, $x\ge 0$, $x\in\mathbb{Z}$.

Исследуем функцию на наибольшее значение с помощью производной.

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{800-x^2}}=\frac{\sqrt{800-x^2}-x}{\sqrt{800-x^2}}.$$

Найдем нули производной: $f'(x)=0$, $\sqrt{800-x^2}=x$, $x=20$ $(x\in N)$.

При $x<20$ $f'(x)>0$ и $f(x)-$ возрастает, при $x>20$ $f'(x)<0$ и $f(x)-$убывает, значит, в точке $x=20$ функция достигает максимума и $f_{\max}=f(20)=20+\sqrt{800-20^2}=40$.

Значит, во второй области добывается 20 кг алюминия и 20 кг никеля. Всего в двух областях будет добыто $240+20+20=280$ кг металла и это наибольшая масса.

Ответ: 280.

№4. На каждом из двух комбинатов работает по 200 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 1 деталь А или 3 детали В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен.

Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужна или 1 деталь А, или 1 деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

Решение:

I способ.

Заметим, что на первом комбинате производительность труда одного рабочего в три раза выше при изготовлении детали В, чем при изготовлении детали А, и поскольку детали А и В взаимозаменяемы, то поэтому всех рабочих целесообразно направить на изготовление деталей В. Тогда получим количество деталей В, изготовленных на первом комбинате $200 \cdot 3 = 600$ шт.

На втором комбинате рабочих надо распределить таким образом, чтобы количество изготавливаемых деталей было максимальным. Пусть $x-$ количество деталей А и на их изготовление потребуется x^2 человеко-смен, $y-$ количество деталей В и на их изготовление потребуется y^2 человеко-смен, тогда $x^2+y^2=200$, т.к. на втором комбинате тоже работает 200 человек. Надо найти наибольшее значение выражения $(x+y)$ - количество изготавливаемых деталей на втором комбинате.

Поскольку $y=\sqrt{200-x^2}$, тогда $x+y=x+\sqrt{200-x^2}$.

Пусть $f(x)=x+\sqrt{200-x^2}$, $x \ge 0$, $x \in \mathbb{Z}$.

Исследуем функцию на наибольшее значение с помощью производной.

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{200-x^2}}=\frac{\sqrt{200-x^2}-x}{\sqrt{200-x^2}}.$$

Найдем нули производной: $f'(x)=0$, $\sqrt{200-x^2}=x$, $x=10$ $(x \ge 0,\ x \in \mathbb{Z})$.

При $x<10$ $f'(x)>0$ и $f(x)-$ возрастает, при $x>10$ $f'(x)<0$ и $f(x)-$убывает, значит, в точке $x=10$ функция достигает максимума и $f_{\max}=f(10)=10+\sqrt{200-10^2}=20$.

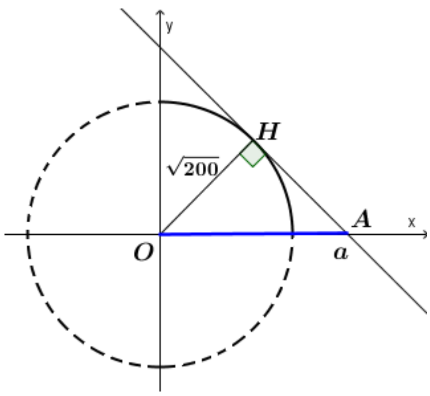
Значит, на втором комбинате добывается 10 кг алюминия и 10 кг никеля. Всего на двух комбинатах будет добыто $600+10+10=620$ кг металла и это наибольшая масса.

II способ.

Решим эту задачу графически. Пусть $x+y=a$, тогда $y=-x+a$ (семейство прямых, параллельных биссектрисе II и IV четвертей). Уравнение $x^2+y^2=200$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{200}$. Наибольшее значение a достигается, когда прямая $x+y=a$ касается окружности. Треугольник $OHA-$ прямоугольный, равнобедренный и $OA=OH\sqrt{2}=\sqrt{200}\cdot\sqrt{2}=20$.

Получили, что на втором комбинате изготавливают максимальное количество деталей А и В в количестве 20 шт.

Значит, в сумме рабочие будут делать $600+20=620$ деталей за смену и поставлять их на комбинат, чтобы собрать 620 изделий.



Ответ: 620.

▪ *Тест* Оптимизация с производной

№1. Автомобиль движется из пункта *A* в пункт *C*. От пункта *A* до пункта *B*, расположенного между *A* и *C*, он едет со скоростью 48 км/ч. В пункте *B* он уменьшает скорость на a км/ч ($0 < a < 48$) и с этой скоростью проезжает третью часть пути от *B* до *C*. Оставшуюся часть пути он едет со скоростью, которая на $2a$ км/ч превышает начальную скорость. При каком значении a автомобиль быстрее всего пройдет путь от *B* до *C*?

№2. Трем экскаваторам необходимо вырыть котлован объемом 3200 $м^3$. Первый экскаватор за один час вынимает 42 $м^3$ грунта, второй - на $q\ м^3/час$ меньше первого, а третий - на $3q\ м^3/час$ больше первого. Определить, при каком значении q работа будет выполнена за кратчайший срок, если вначале 800 $м^3$ выкопают первый и второй экскаваторы, работая одновременно, а оставшуюся часть работы выполняет первый и третий экскаваторы, работая одновременно.

№3. На каждом из двух комбинатов работает по 200 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 1 деталь А или 3 детали В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен.

Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужна или 1 деталь А, или 1 деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

▪ *Ответы (тест)* Оптимизация с производной

№1	№2	№3
12	*28*	*3660*

▪ *Решение (тест)* Оптимизация с производной

№1. Автомобиль движется из пункта *A* в пункт *C*. От пункта *A* до пункта *B*, расположенного между *A* и *C*, он едет со скоростью 48 км/ч. В пункте *B* он уменьшает скорость на a км/ч ($0<a<48$) и с этой скоростью проезжает третью часть пути от *B* до *C*. Оставшуюся часть пути он едет со скоростью, которая на $2a$ км/ч превышает начальную скорость. При каком значении a автомобиль быстрее всего пройдет путь от *B* до *C*?

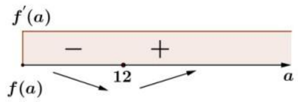
Решение:

$$t_1=\frac{\frac{1}{3}S}{48-a}\ ,\quad t_2=\frac{\frac{2}{3}S}{48+2a}$$

$$f(a)=\frac{S}{3(48-a)}+\frac{2S}{3(48+2a)}$$

$$f'(a)=-\frac{S\cdot(-1)}{3(48-a)^2}-\frac{2S}{3(48+2a)^2}=\frac{S(48+2a)^2-2S(48-a)^2}{3(48-a)^2(48+2a)^2}$$

$$f'(a)=0,\ \ S(48+2a)^2-2S(48-a)^2=0$$



$$\left[\begin{array}{l}(48+2a)=2(48-a)\\(48+2a)=-2(48-a)\end{array}\right.\Leftrightarrow a=12$$

При $a_{\min}=12$ функция имеет единственный минимум, тогда и наименьшее значение функция принимает в этой же точке.

Ответ:12.

№2. Трем экскаваторам необходимо вырыть котлован объемом 3200 $м^3$. Первый экскаватор за один час вынимает 42 $м^3$ грунта, второй - на $q\ м^3/час$ меньше первого, а третий - на $3q\ м^3/час$ больше первого. Определить, при каком значении q работа будет выполнена за кратчайший срок, если вначале 800 $м^3$ выкопают первый и второй экскаваторы, работая одновременно, а оставшуюся часть работы выполняет первый и третий экскаваторы, работая одновременно.

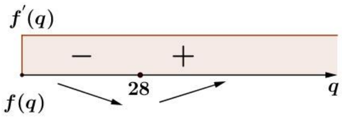
Решение:

	Производи-тельность	*Объем*		*Время*	
I	$42\ м^3/час$	$800\ м^3$	$3200-$ $-800=$ $=2400\ м^3$	$t_{I+II}=\dfrac{800}{42+(42-q)}$	$t_{I+III}=\dfrac{2400}{42+(42+3q)}$
II	$(42-q)\ м^3/час$				
III	$(42+3q)\ м^3/час$				

Все время работы $f(q)=\dfrac{800}{84-q}+\dfrac{2400}{84+3q}$. Исследуем функцию на наименьшее значение с помощью производной.

$$f'(q)=-\frac{800\cdot(-1)}{(84-q)^2}-\frac{2400\cdot3}{(84+3q)^2}=\frac{800\left((84+3q)^2-9(84-q)^2\right)}{(84-q)^2\cdot(84+3q)^2}$$

$$f'(q)=0,\ \ (84+3q)^2-9(84-q)^2=0$$



$$\left[\begin{array}{l} 84+3q=3(84-q) \\ 84+3q=-3(84-q) \end{array}\right.; \; q=24$$

При $q_{\min}=28$ функция имеет единственный минимум, тогда и наименьшее значение функция принимает в этой же точке.

Ответ: 28.

№3. На каждом из двух комбинатов работает по 200 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 1 деталь А или 3 детали В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен.

Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужна или 1 деталь А, или 1 деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

Решение:

Заметим, что на первом комбинате рабочие изготавливают детали В в два раза эффективнее, чем детали А, и поскольку эти детали взаимозаменяемы, то всех рабочих целесообразно направить на изготовление деталей В. Значит, на первом комбинате за смену будет изготовлено деталей В $1800\cdot 2=3600$.

На втором комбинате для изготовления x деталей А потребуется x^2 человеко-смен, а для изготовления y деталей В потребуется y^2 человеко-смен. Так как на втором комбинате 1800 рабочих, то они отработают 1800 человеко-часов и $x^2+y^2=1800$. Рабочие изготавливают $(x+y)$ деталей А и В.

Надо найти наибольшее значение этого выражения. Поскольку $y=\sqrt{1800-x^2}$, тогда

$x+y=x+\sqrt{1800-x^2}$.

Пусть $f(x)=x+\sqrt{1800-x^2}$, $x\in N$.

Исследуем функцию на наибольшее значение с помощью производной.

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1800-x^2}}=\frac{\sqrt{1800-x^2}-x}{\sqrt{1800-x^2}}.$$

Найдем нули производной: $f'(x)=0$, $\sqrt{1800-x^2}=x$, $x=30$ $(x\in N)$.

При $x<30$ $f'(x)>0$ и $f(x)-$ возрастает, при $x>30$ $f'(x)<0$ и $f(x)-$убывает, значит, в точке $x=30$ функция достигает максимума и $f_{\max}=f(30)=30+\sqrt{1800-30^2}=60$.

Значит, на втором комбинате изготавливается за смену 60 деталей типа А и В. Всего на двух комбинатах будет произведено $3600+60=3660$ деталей А и В, и это наибольшее количество, из которых будет произведено 3660 изделий.

Ответ: 3660.