Логарифмическая функция

1. Исследование логарифмической функции без производной

2. Исследование функций, содержащих логарифмическую функцию, с помощью производной

1. Исследование логарифмической функции без производной

- ***Примеры***

№1. Найдите точку минимума функции $y=\log_8\left(x^2+2x+30\right)+10$.

№2. Найдите точку максимума функции $y=\log_2\left(2+2x-x^2\right)-2$.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y=\log_3\left(242-2x-x^2\right)+3$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $\mathrm{y}=\log_3\left(x^2-6x+10\right)+2$.

▪ *Решение (примеры)*

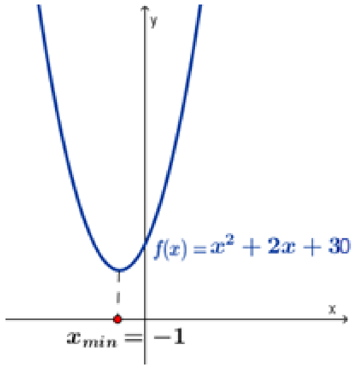
№1. **Найдите точку минимума функции** $y=\log_8\left(x^2+2x+30\right)+10$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)=\mathbb{R}$ функция $y=\log_8 f(x)+10$ имеет сложный аргумент $f(x)=x^2+2x+30$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает минимума в вершине

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2}=-1.$$

Из определения возрастающей функции: меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Точка минимума аргумента является точкой минимума и для самой функции.



$$x_{\min}=-1\to f_{\min}(-1)\to y_{\min}=\log_8 f_{\min}(-1)+10$$

Ответ: -1.

№2. **Найдите точку максимума функции** $y=\log_2\left(2+2x-x^2\right)-2$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y=\log_2 f(x)-2$ имеет сложный аргумент $f(x)=2+2x-x^2$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вниз, достигает максимума в вершине

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{-2}=1.$$

Из определения возрастающей функции: большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Точка максимума аргумента является точкой максимума и для самой функции.

$$x_{\max}=1\to f_{\max}(1)\to y_{\max}=\log_2 f_{\max}(1)-2.$$

Ответ: 1.

№3. **Найдите наибольшее значение функции** $y=\log_3\left(242-2x-x^2\right)+3$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y=\log_3 f(x)+3$ имеет сложный аргумент $f(x)=242-22x-x^2$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вниз, достигает максимума в вершине

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{-2}=-1.$$

Из определения возрастающей функции: большему значению аргумента соответствует большее значение функции. В точке максимума аргумент принимает наибольшее значение, и заданная функция принимает наибольшее значение в этой же точке.

$$x_{\max}=-1\to f_{\max}(-1)=242-2\cdot(-1)-(-1)^2=242+2-1=243=3^5$$

$$y_{\max}=y_{наиб}=y(-1)=\log_3 3^5+3=5+3=8$$

Ответ: 8.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y=\log_3\left(x^2-6x+10\right)+2$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y=\log_3 f(x)+2$ имеет сложный аргумент $f(x)=x^2-6x+10$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает минимума в вершине

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2}=3.$$

Из определения возрастающей функции: меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. В точке минимума аргумент принимает наименьшее значение, и заданная функция принимает наименьшее значение в этой же точке.

$$x_{\min}=3\to f_{\min}(3)=3^2-6\cdot 3+10=1$$

$$y_{наим}=y_{\min}=\log_3 f_{\min}(3)+2=\log_3 1+2=0+2=2$$

Ответ: 2.

▪ *Тест* 1. Исследование логарифмической функций без производной

№1. Найдите точку минимума функции $y=\log_5\left(x^2-30x+249\right)+8$.

№2. Найдите точку максимума функции $y=\log_7\left(-80-20x-x^2\right)-8$.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y=\log_2\left(503-6x-x^2\right)-3$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y=\log_6\left(x^2-18x+117\right)-6$.

▪ *Ответы (тест)* 1. Исследование логарифмической функций без производной

№1	№2	№3	№4
15	*-10*	*6*	*-4*

2. Исследование функций, содержащих логарифмическую функцию, с помощью производной

- ***Примеры***

№1. Найдите точку максимума функции $y=\ln(x-13)-2x+7$.

№2. Найдите точку минимума функции $y=7x-7\ln(x+9)+6$.

№3. Найдите точку минимума функции $y=2x^2-5x+\ln x-3$.

№4. Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+5)^5-5x$.

№5. Найдите наибольшее значение функции $y=8\ln(x+7)-8x+3$ на отрезке $[-6,5;0]$.

№6. Найдите наименьшее значение функции $y=9x-\ln(9x)+3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]$.

№7. Найдите наименьшее значение функции $y=4x-\ln(x+8)^4$ на отрезке $[-7,5;0]$.

№8. Найдите наибольшее значение функции $y=3x^2-13x+7\ln x+5$ на отрезке $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$.

Решение (примеры)

№1. **Найдите точку максимума функции** $y=\ln(x-13)-2x+7$.

Решение:

1) $D(y)=(13;\infty)$

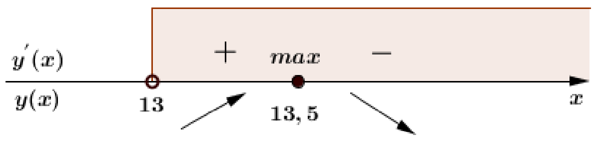
$y'=\dfrac{1}{x-13}-2$

$y'=\dfrac{1-2x+26}{x-13}=\dfrac{-2x+27}{x-13}$

$y'=-\dfrac{2(x-13,5)}{x-13}$

2) $y'=0$, $x=13,5$

3)



$x_{\max}=13,5$ *Ответ: 13,5.*

№2. **Найдите точку минимума функции** $y=7x-7\ln(x+9)+6$.

Решение:

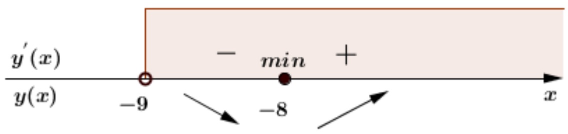
1) $D(y)=(-9;\infty)$

$y'=7-\dfrac{7}{x+9}=7\left(1-\dfrac{1}{x+9}\right)$

$y'=7\cdot\dfrac{x+9-1}{x+9}=7\cdot\dfrac{x+8}{x+9}$

2) $y'=0$, $x=-8$

3)



$x_{\min}=-8$ *Ответ: -8.*

№3. **Найдите точку минимума функции** $y=2x^2-5x+\ln x-3$.

Решение:

1) $D(y)=(0;\infty)$

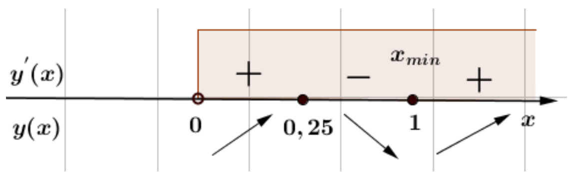
$y'=4x-5+\dfrac{1}{x}$

$y'=\dfrac{4x^2-5x+1}{x}$

$y'=\dfrac{4(x-1)(x-0,25)}{x}$

2) $y'=0$, $x=1$ $x=0,25$

3)



$x_{\min}=1$ *Ответ: 1.*

№4. **Найдите точку максимума функции** $y=\ln(x+5)^5-5x$.

Решение:

1) $D(y)=(-5;\infty)$

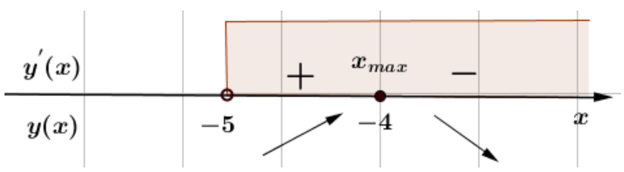
$y=5\ln(x+5)-5x$

$y'=\dfrac{5}{x+5}-5$

$y'=\dfrac{-5(x+4)}{x+5}$

2) $y'=0$, $x=-4$.

3)



$x_{\max}=-4$ *Ответ: -4.*

№5. **Найдите наибольшее значение функции** $y=8\ln(x+7)-8x+3$ **на отрезке** $[-6{,}5;0]$.

Решение:

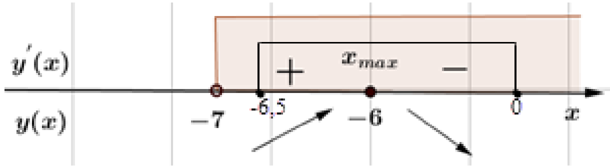
1) $D(y)=(-7;\infty)$

$$y'=\frac{8}{x+7}-8$$

$$y'=\frac{-8(x+6)}{x+7}$$

2) $y'=0$, $x=-6$.

3)



$$y_{наиб}=y_{\max}=y(-6)=8\ln(-6+7)-8\cdot(-6)+3=48+3=51$$

Ответ: 51.

№6. **Найдите наименьшее значение функции** $y=9x-\ln(9x)+3$ **на отрезке** $\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]$.

Решение:

1) $D(y)=(0;\infty)$

$$y=9x-(\ln 9+\ln x)+3$$

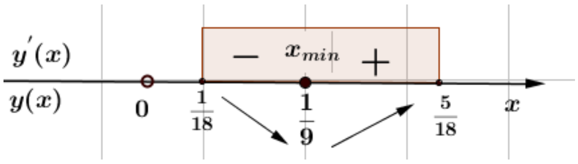
$$y=9x-\ln 9-\ln x+3$$

$$y'=9-\frac{1}{x}$$

$$y'=\frac{9x-1}{x}$$

2) $y'=0$, $x=\frac{1}{9}$.

3)



$$y_{наим}=y_{\min}=y\left(\frac{1}{9}\right)=9\cdot\frac{1}{9}-\ln\left(9\cdot\frac{1}{9}\right)+3=1-0+3=4$$

Ответ: 4.

№7. **Найдите наименьшее значение функции** $y=4x-\ln(x+8)^4$ **на отрезке** $[-7{,}5;0]$.

Решение:

1) $D(y)=(-8;\infty)$

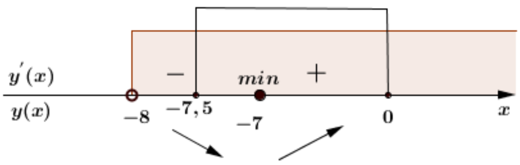
$$y=4x-4\ln(x+8)$$

$$y'=4-\frac{4}{x+8}$$

$$y'=4\cdot\left(1-\frac{1}{x+8}\right)=4\cdot\frac{x+7}{x+8}$$

2) $y'=0$, $x=-7$.

3)



$$y_{наим}=y_{\min}=y(-7)=4\cdot(-7)-\ln(-7+8)=-28-0=-28$$

Ответ: -28.

№8. **Найдите наибольшее значение функции** $y=3x^2-13x+7\ln x+5$ **на отрезке** $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$.

Решение:

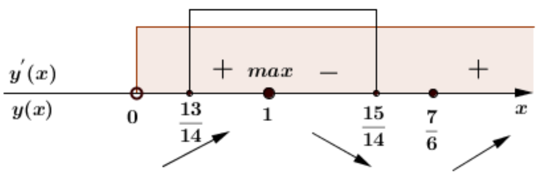
1) $D(y)=(0;\infty)$

$$y'=6x-13+\frac{7}{x}$$

$$y'=\frac{6x^2-13x+7}{x}=\frac{6\left(x-\frac{7}{6}\right)(x-1)}{x}$$

2) $y'=0$, $x=\frac{7}{6}$, $x=1$.

3)



$$y_{наиб}=y_{\max}=y(1)=3-13+7\cdot\ln 1+5=-10+5=-5$$

Ответ: -5.

▪ *Тест* 2. Исследование функций, содержащих логарифмическую функцию, с помощью производной

№1. Найдите точку максимума функции $y=\ln(x-12)-10x+11$.

№2. Найдите точку минимума функции $y=4x-\ln(x+5)+8$.

№3. Найдите точку минимума функции $y=0,5x^2-16x+63\ln x-2$.

№4. Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+17)^{11}-11x+9$.

№5. Найдите наибольшее значение функции $y=9\ln(x+8)-9x+12$ на отрезке $[-7,5;0]$.

№6. Найдите наименьшее значение функции $y=12x-\ln(12x)+4$ на отрезке $\left[\frac{1}{24};\frac{5}{24}\right]$.

№7. Найдите наименьшее значение функции $y=2x-\ln(x+7)^2$ на отрезке $[-6,5;0]$.

№8. Найдите наибольшее значение функции $y=2x^2-9x+5\ln x+3$ на отрезке $\left[\frac{9}{10};\frac{11}{10}\right]$.

▪ *Ответы (тест)* 2. Исследование функций, содержащих логарифмическую функцию, с помощью производной

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
12,1	*-4,75*	*9*	*-16*	*75*	*5*	*-12*	*-4*

✓ *Производная*

1. *Формулы дифференцирования:*

$$(Const)' = 0$$
$$x' = 1$$
$$(kx+m)' = k$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x;$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

2. *Правила дифференцирования*:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(k \cdot f)' = k \cdot f'$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$
$$(f(kx+m))' = k \cdot f'(kx+m)$$

3. Если $f'(x) > 0$ при всех $x \in D(f)$,

то $f(x) \nearrow$ возрастает;

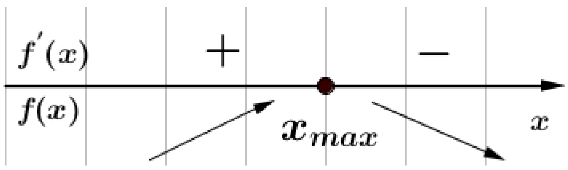
Если $f'(x) < 0$ при всех $x \in D(f)$,

то $f(x) \searrow$ убывает.

4. *Необходимые и достаточные условия существования экстремумов:*

1) Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует;

2) Если в окрестности точки $x = x_0$ производная меняет свой знак с «+» на «-», то это точка максимума;



если в окрестности точки $x = x_0$ производная меняет свой знак с «-» на «+», то это точка минимума;