Иррациональные и степенные функции

- ***Примеры***

№1. Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{-79-18x-x^2}$.

№2. Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2+8x+185}$.

№3. Найдите точку минимума функции $y=x^{\frac{3}{2}}-6x+9$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y=x^{\frac{3}{2}}-9x+19$ на отрезке $[1;407]$.

№5. Найдите точку максимума функции $y=7+6x-2x^{\frac{3}{2}}$.

№6. Найдите наибольшее значение функции $y=20+18x-2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[2;111]$.

№7. Найдите точку минимума функции $y=x\sqrt{x}-3x+1$.

№8. Найдите наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x}-30x+18$ на отрезке $[0;400]$.

№9. Найдите точку минимума $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+1$.

№10. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-6x+72$ на отрезке $[5;582]$.

№11. Найдите точку максимума $y=12+12x-2x\sqrt{x}$.

№12. Найдите наибольшее значение функции $y=2+3x-4x\sqrt{x}$ на отрезке $[0;9,25]$.

№13. Найдите точку максимума $y=-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+7x+18$.

№14. Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{1}{3}x\sqrt{x}+9x+16$ на отрезке $[323;326]$.

Решение (примеры)

№1. **Найдите точку максимума функции** $y=\sqrt{-79-18x-x^2}$.

Решение:

Функция $y=\sqrt{f(x)}$ возрастает на всей своей области определения, и ее поведение определяет поведение сложного аргумента $f(x)=-79-18x-x^2$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вниз, достигает своего максимума в вершине $x_в=-\dfrac{-18}{-2}=-9$. Из свойства возрастающей функции: большему значению аргумента соответствует большее значение функции, имеем $y_{\max}=y(-9)$. Точка максимума аргумента является точкой максимума и для самой функции.

Ответ: -9.

№2. **Найдите наименьшее значение функции** $y=\sqrt{x^2+8x+185}$.

Решение:

Функция $y=\sqrt{f(x)}$ возрастает на всей своей области определения, и ее поведение определяет поведение сложного аргумента $f(x)=x^2+8x+185$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает своего минимума в вершине $x_в=-\dfrac{8}{2}=-4$. Точкой минимума функции является точка минимума аргумента $x_{\min}=-4$. Т.к. это единственный экстремум функции, то в нем функция и будет принимать наименьшее значение, а именно

$y(-4)=\sqrt{(-4)^2+8\cdot(-4)+185}=\sqrt{169}=13$.

Ответ: 13.

№3. **Найдите точку минимума функции** $y=x^{\frac{3}{2}}-6x+9$.

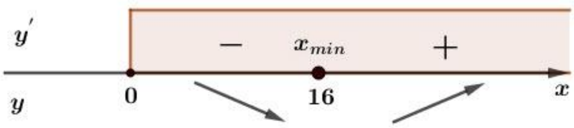
Решение:

$$y=x^{\frac{3}{2}}-6x+9;\quad D(y)=[0;\infty)$$

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}-6=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-6=\frac{3}{2}\sqrt{x}-6=\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-4\right)$$

$$y'=0,\quad \sqrt{x}-4=0,\quad \sqrt{x}=4,\quad x=16$$

$$x_{\min}=16$$



Ответ: 16.

№4. **Найдите наименьшее значение функции** $y=x^{\frac{3}{2}}-9x+19$ **на отрезке** $[1;407]$

Решение:

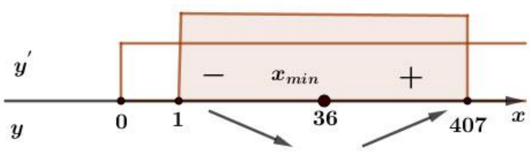
$$y=x^{\frac{3}{2}}-9x+19;\quad D(y)=[0;\infty)$$

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}-9=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-9=\frac{3}{2}\sqrt{x}-9=\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-6\right)$$

$$y'=0,\quad \sqrt{x}-6=0,\quad \sqrt{x}=6,\quad x=36$$

$$x_{\min}=36,$$

$$\underset{[1;407]}{y_{наим.}}=y(36)=36^{\frac{3}{2}}-9\cdot 36+9=\left(6^2\right)^{\frac{3}{2}}-9\cdot 6^2+19=-89$$



Ответ: -89.

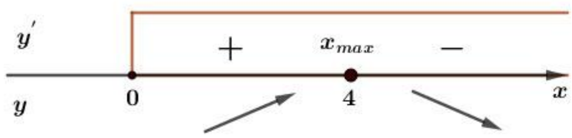
№5. **Найдите точку максимума функции** $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

Решение:

$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}};\ D(y) = [0;\infty)$

$y' = 6 - 2\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = 6 - 3x^{\frac{1}{2}} = 6 - 3\sqrt{x} = 3\left(2 - \sqrt{x}\right)$

$y' = 0,\ \ 2 - \sqrt{x} = 0,\ \ \sqrt{x} = 2,\ \ x = 4$



$x_{\max} = 4$

Ответ: 4.

№6. **Найдите наибольшее значение функции** $y = 20 + 18x - 2x^{\frac{3}{2}}$ **на отрезке** $[2;111]$.

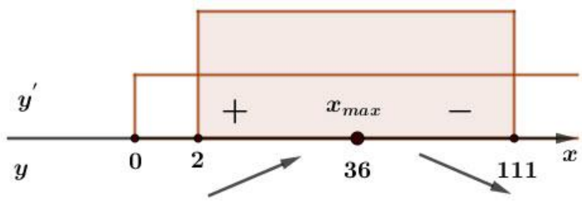
Решение:

$y = 20 + 18x - 2x^{\frac{3}{2}};\ D(y) = [0;\infty)$

$y' = 18 - 2\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = 18 - 3x^{\frac{1}{2}} = 18 - 3\sqrt{x} = 3\left(6 - \sqrt{x}\right)$

$y' = 0,\ \ 6 - \sqrt{x} = 0,\ \ \sqrt{x} = 6,\ \ x = 36$

$x_{\max} = 36$



$\underset{[2;111]}{y_{наиб}} = y(36) = 20 + 18\cdot 36 - 2\cdot 36^{\frac{3}{2}} = 20 + 3\cdot 6^3 =$

$= 20 + 216 = 236$

Ответ: 236.

№7. **Найдите точку минимума функции** $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$.

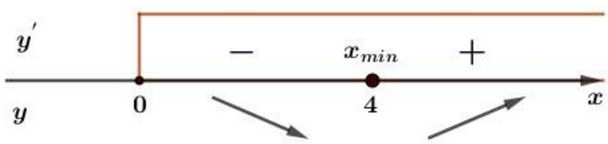
Решение:

$y = x\sqrt{x} - 3x + 1;\ \ D(y) = [0;\infty)$

$y = x\sqrt{x} - 3x + 1 = x^1\cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x + 1 = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$

$y' = \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1\right)' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x} - 2\right)$

$y' = 0;\ \ \sqrt{x} - 2 = 0,\ \ x = 4$



$x_{\min} = 4$

Ответ: 4.

№8. **Найдите наименьшее значение функции** $y = x\sqrt{x} - 30x + 18$ **на отрезке** $[0;400]$.

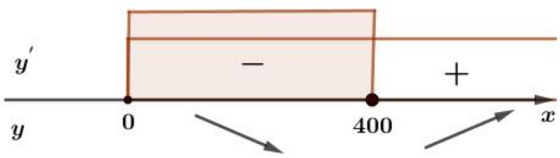
Решение:

$y = x\sqrt{x} - 30x + 18;\ D(y) = [0;\infty)$

$y = x\sqrt{x} - 30x + 18 = x^{\frac{3}{2}} - 30x + 18$

$y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 30 = \dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x} - 20\right)$

$y' = 0;\ \ \sqrt{x} - 20 = 0,\ \ x = 400$



$\underset{[0;400]}{y_{наим}} = y(400) = 400\cdot\sqrt{400} - 30\cdot 400 + 18 = -4000 + 18 = -3982$

Ответ: -3982.

№9. **Найдите точку минимума** $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+1$.

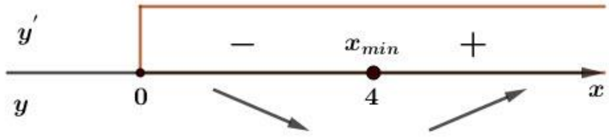
Решение:

$y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+1;\ D(y)=[0;\infty)$

$y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+1=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+1$

$y'=x^{\frac{1}{2}}-2=\sqrt{x}-2$

$y'=0;\quad \sqrt{x}-2=0,\quad x=4$



$x_{\min}=4$

Ответ: 4.

№10. **Найдите наименьшее значение функции** $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-6x+72$ **на отрезке** $[5;582]$.

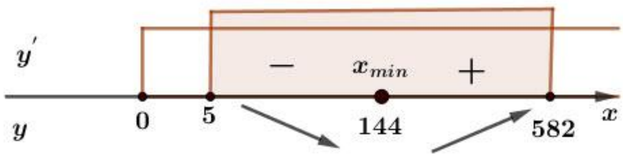
Решение:

$y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-6x+72;\ D(y)=[0;\infty)$

$y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-6x+72=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-6x+72$

$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-6=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-12\right)$

$y'=0;\quad \sqrt{x}-12=0,\quad x=144$



$$\underset{[5;582]}{y_{наим}}=y(144)=\frac{1}{3}\cdot 144\cdot\sqrt{144}-6\cdot 144+72=48\cdot 12-6\cdot 12^2+72=$$

$$=4\cdot 12^2-6\cdot 12^2+72=-288+72=-216$$

Ответ: -216.

№11. **Найдите точку максимума** $y=12+12x-2x\sqrt{x}$.

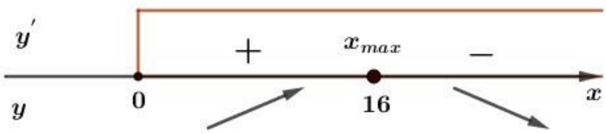
Решение:

$y=12+12x-2x\sqrt{x};\ D(y)=[0;\infty)$

$y=12+12x-2x\sqrt{x}=12+12x-2x^{\frac{3}{2}}$

$y'=12-2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=12-3x^{\frac{1}{2}}=3\left(4-\sqrt{x}\right)$

$y'=0;\quad 4-\sqrt{x}=0,\quad x=16$



$x_{\max}=16$

Ответ: 16.

№12. **Найдите наибольшее значение функции** $y=2+3x-4x\sqrt{x}$ **на отрезке** $[0;9,25]$.

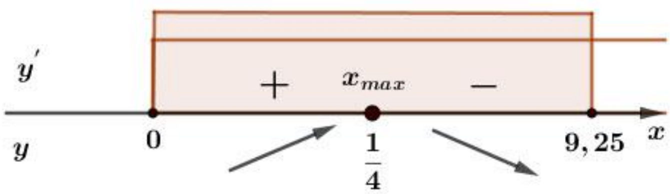
Решение:

$y=2+3x-4x\sqrt{x};\ D(y)=[0;\infty)$

$y=2+3x-4x\sqrt{x}=2+3x-4x^{\frac{3}{2}}$

$y'=3-4\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=3-6x^{\frac{1}{2}}=3\left(1-2\sqrt{x}\right)$

$y'=0;\quad 1-2\sqrt{x}=0,\quad x=\frac{1}{4}$



$$\underset{[0;9,25]}{y_{наиб}}=y\left(\frac{1}{4}\right)=2+3\cdot\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}=2,25$$

Ответ: 2,25.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№13. Найдите точку максимума $y=-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+7x+18$.

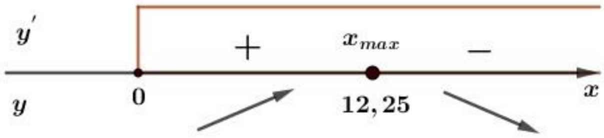
Решение:

$$y=-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+7x+18;\ \ y=-\frac{1}{3}x\sqrt{x}+9x+16$$

$$y=-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+7x+18=-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+7x+18$$

$$y'=-2x^{\frac{1}{2}}+7=7-2\sqrt{x}$$

$$y'=0;\ \ 7-2\sqrt{x}=0,\ \ \sqrt{x}=\frac{7}{2},\ x=\frac{49}{4},\ \ x=12,25$$



$$x_{\max}=12,25$$

Ответ: 12,25.

№14. Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{1}{3}x\sqrt{x}+9x+16$ **на отрезке** $[323;326]$.

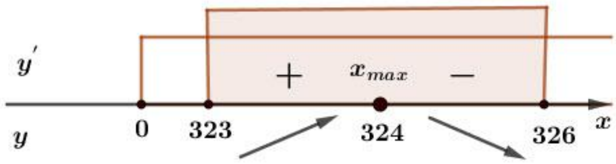
Решение:

$$y=-\frac{1}{3}x\sqrt{x}+9x+16;\ \ y=-\frac{1}{3}x\sqrt{x}+9x+16$$

$$y=-\frac{1}{3}x\sqrt{x}+9x+16=-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+9x+16$$

$$y'=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+9=9-\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$y'=0;\ \ 9-\frac{1}{2}\sqrt{x}=0,\ \ \sqrt{x}=18,\ \ x=324$$



$$\underset{[323;326]}{y_{наиб}}=y(324)=-\frac{1}{3}\cdot 324\cdot\sqrt{324}+9\cdot 324+16=$$

$$=-6\cdot 18^2+9\cdot 18^2+16=3\cdot 324+16=988$$

Ответ: 988.

▪ *Тест* Исследование иррациональных и степенных функций

№1. Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{13+6x-x^2}$.

№2. Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2+20x+104}$.

№3. Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2-6x+73}$.

№4. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{168-22x-x^2}$.

№5. Найдите точку минимума функции $y=x^{\frac{3}{2}}-30x+13$.

№6. Найдите наименьшее значение функции $y=x^{\frac{3}{2}}-21x+5$ на отрезке $[3;408]$.

№7. Найдите точку максимума функции $y=17+15x-2x^{\frac{3}{2}}$.

№8. Найдите наибольшее значение функции $y=9+33x-2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[1;166]$.

№9. Найдите точку минимума функции $y=x\sqrt{x}-18x+29$.

№10. Найдите наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x}-24x+24$ на отрезке $[1;256]$.

№11. Найдите точку минимума $y=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-7x+6$.

№12. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-3x+86$ на отрезке $[0;582]$.

№13. Найдите точку максимума $y=17+15x-4x\sqrt{x}$.

№14. Найдите наибольшее значение функции $y=3+33x-2x\sqrt{x}$ на отрезке $[119;131]$.

№15. Найдите точку максимума $y=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+8x+6$.

№16. Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+12x+6$ на отрезке $[33;37]$.

▪ ***Ответы (тест)*** Исследование рациональных функций

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
3	*-10*	*8*	*17*	*400*	*-1367*	*25*	*1340*
№9	**№10**	**№11**	**№12**	**№13**	**№14**	**№15**	**№16**
144	*-2024*	*12,25*	*50*	*6,25*	*1334*	*64*	*150*

Справочные материалы

✓ ***Производная***

1. *Формулы дифференцирования:*

$$(Const)' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(kx+m)' = k$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x>0)$$

2. *Правила дифференцирования*:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(k\cdot f)' = k\cdot f'$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$\left(f(kx+m)\right)' = k\cdot f'(kx+m)$$

3. Если $f'(x) > 0$ при всех $x \in D(f)$,

то $f(x)\nearrow$ возрастает;

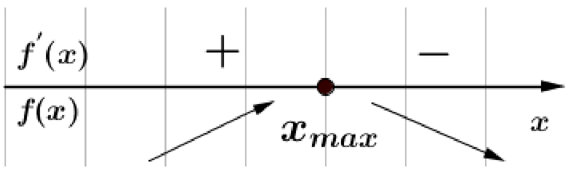
Если $f'(x) < 0$ при всех $x \in D(f)$,

то $f(x)\searrow$ убывает.

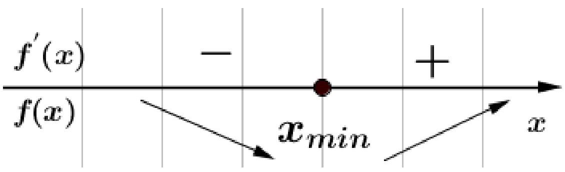
4. *Необходимые и достаточные условия существования экстремумов:*

1) Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует;

2) Если в окрестности точки $x = x_0$ производная меняет свой знак с «+» на «-», то это точка максимума;



если в окрестности точки $x = x_0$ производная меняет свой знак с «-» на «+», то это точка минимума;



МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru