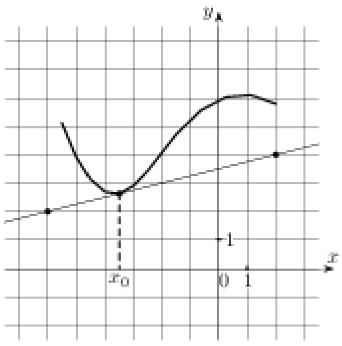
Геометрический смысл производной

№1. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



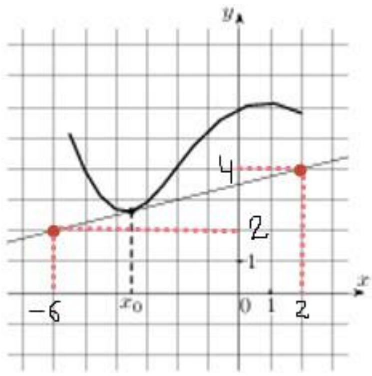
На касательной отмечены точки с координатами: $(x_1; y_1) = (-6; 2)$ *и* $(x_2; y_2) = (2; 4)$.

Угловой коэффициент прямой вычислим по формуле: $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$k = \frac{4-2}{2-(-6)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

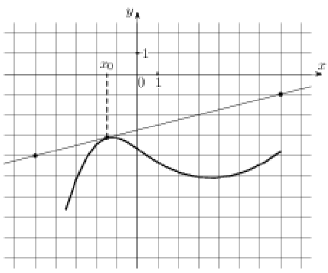
Исходя из геометрического смысла производной, получим

$$f'(x_0) = k = 0,25.$$



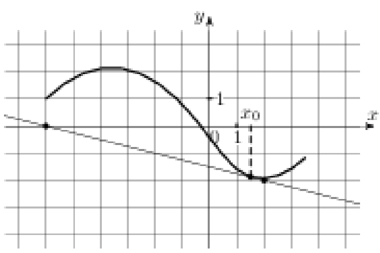
Ответ: 0,25.

№1а. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



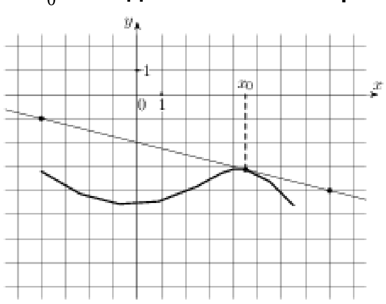
Ответ: 0,25.

№1б. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



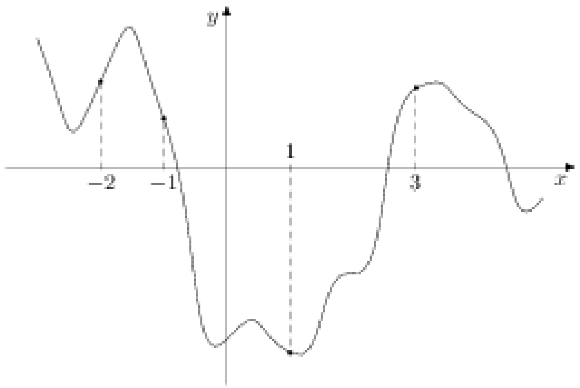
Ответ: - 0,25.

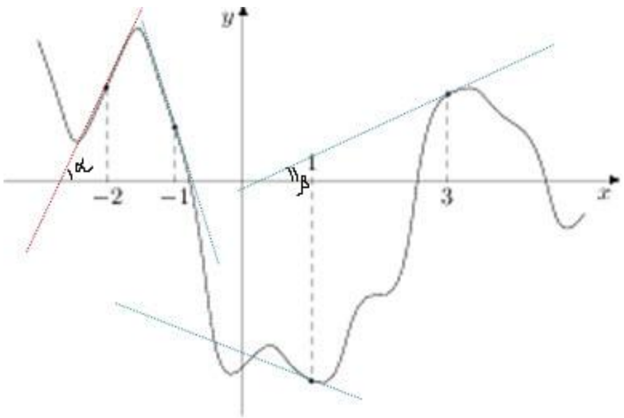
№1в. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: - 0,25.

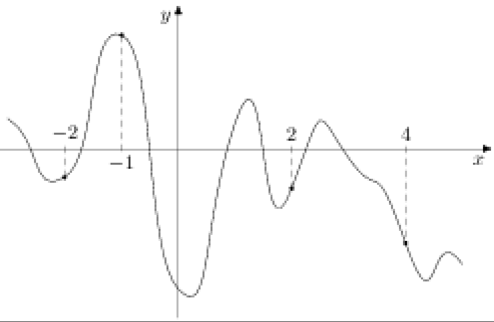
№2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -2, -1, 1, 3. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.





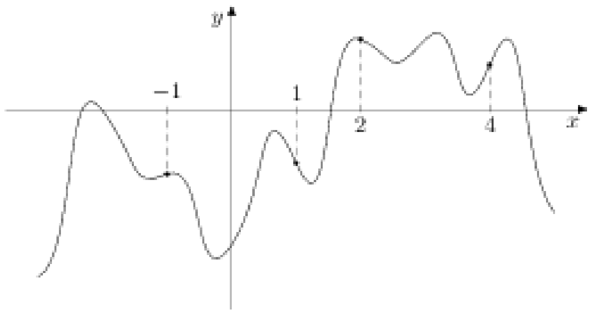
Проведем касательные к графику функции в заданных точках. Исходя из геометрического смысла производной: $f'(x_0) = tg\alpha = k$, имеем, что наибольшее значение производной функции будет в той точке, где угловой коэффициент касательной наибольший. Углы α и β - острые, поэтому $tg\alpha > 0$, $\mathrm{tg}\beta > 0$ и т.к. $\alpha > \beta$, то $tg\alpha > tg\beta$. Поэтому $f'(-2) > f'(3)$. В точке (-2) значение производной наибольшее. *Ответ: -2.*

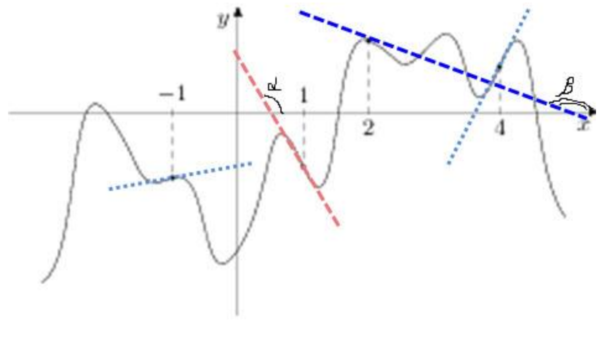
№2а. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -2, -1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: 2.

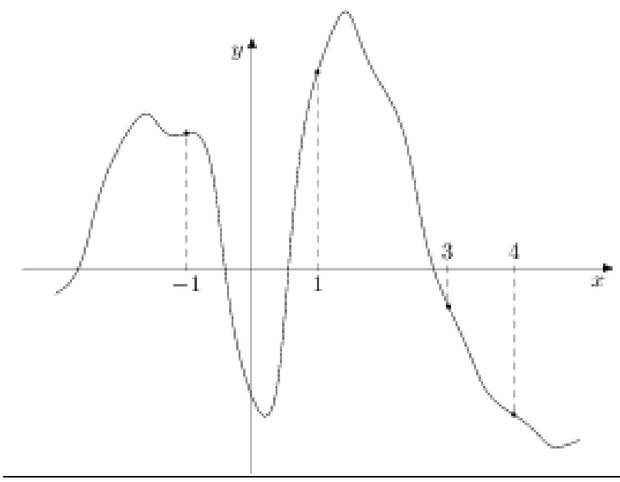
№3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -1, 1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.





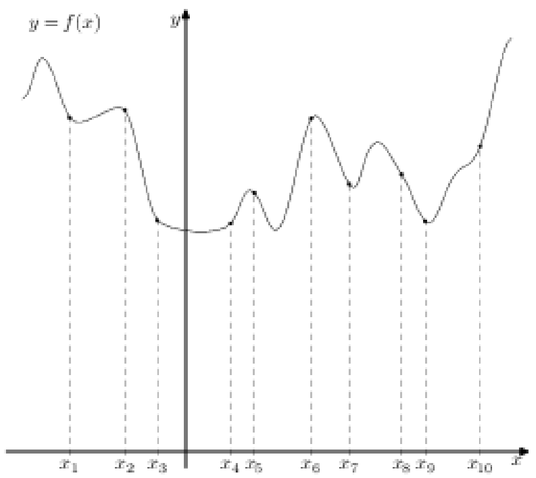
Проведем касательные к графику функции в заданных точках. Исходя из геометрического смысла производной: $f'(x_0) = tg\alpha = k$, имеем, что наименьшее значение производной функции будет в той точке, где угловой коэффициент касательной наименьший. Углы α и β - тупые, поэтому $tg\alpha < 0$, $\mathrm{tg}\beta < 0$ и т.к. $\alpha < \beta$, то $tg\alpha < tg\beta$. Поэтому $f'(1) < f'(2)$. В точке 1 значение производной наименьшее. *Ответ: 1.*

№3а. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -1, 1, 3, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



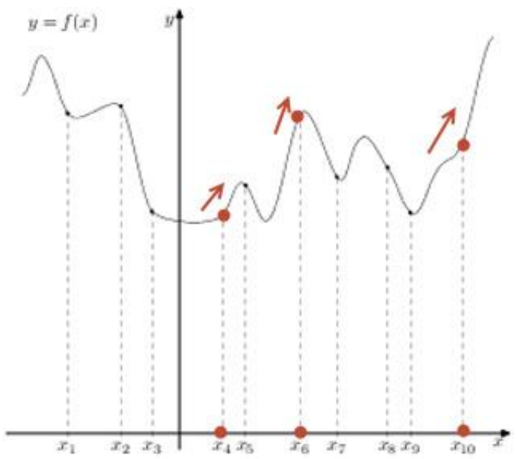
Ответ: 3.

№4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, ..., x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции положительна?



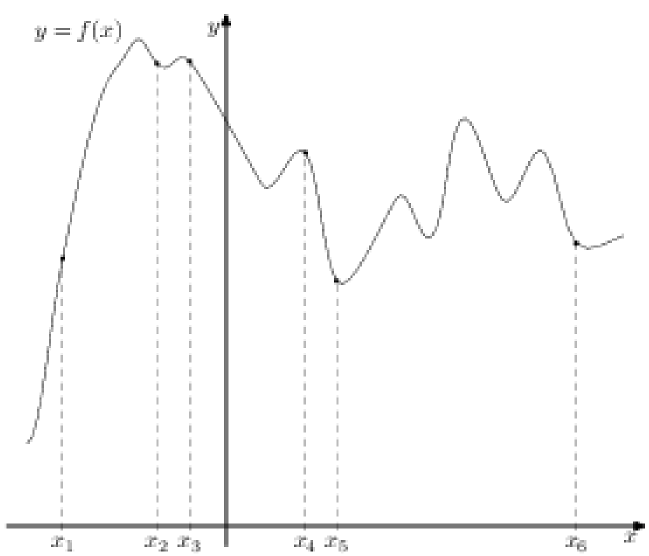
Производная функции положительна в точке, в которой угловой коэффициент касательной положителен. $f'(x) = k > 0$ $\alpha -$ *острый угол.*

*Всего **3** точки.*



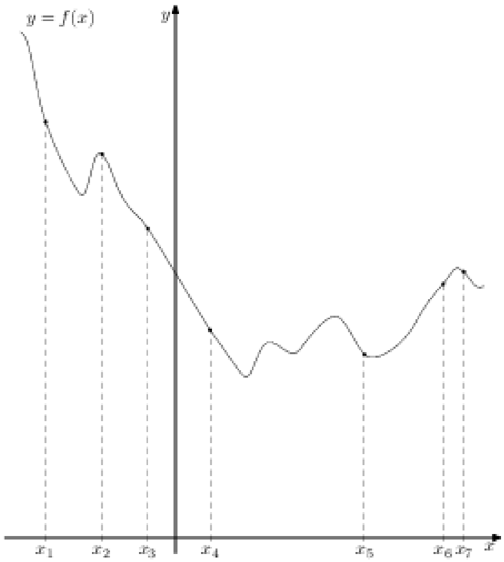
Ответ: 3.

№4а. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_6$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: 1.

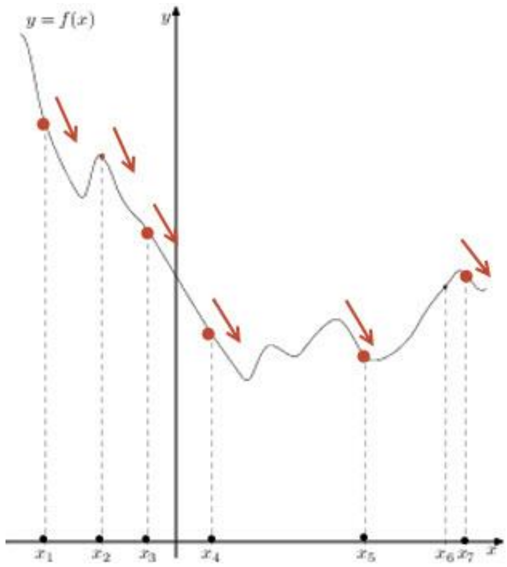
№5. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Производная функции отрицательна в точке, в которой угловой коэффициент касательной отрицателен.

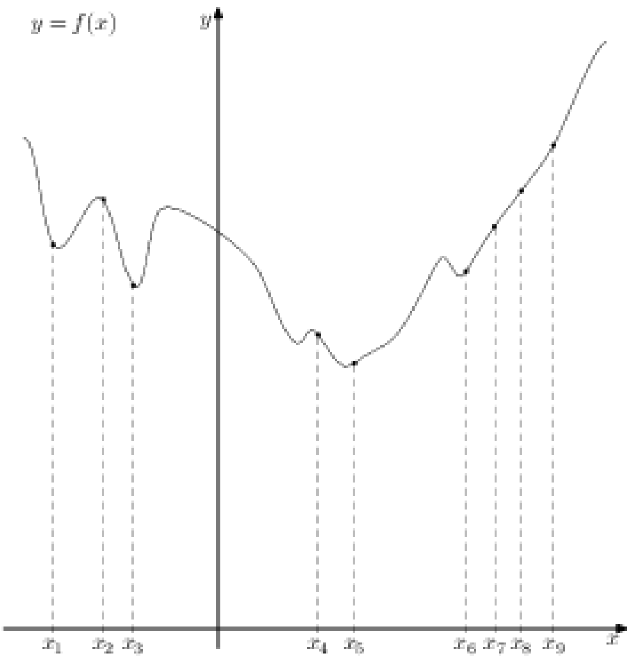
$f'(x) = k < 0$ $\alpha -$ *тупой угол.*

*Всего **6** точек.*



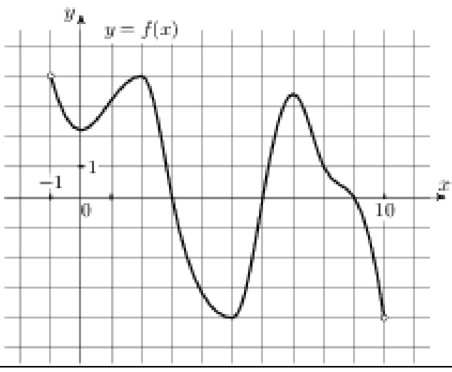
Ответ: 6.

№5а. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



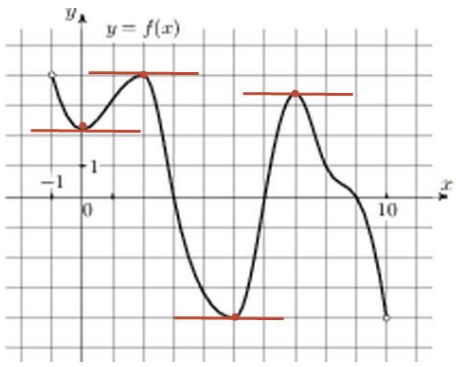
Ответ: 4.

№6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1;10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.

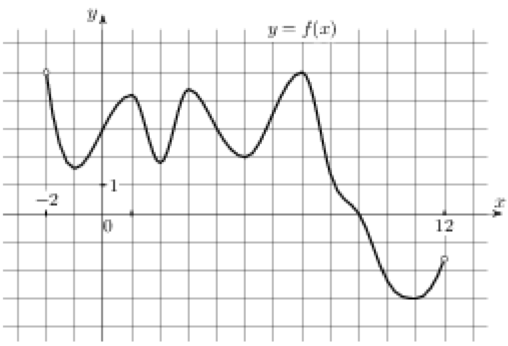


*Прямые вида $y = const$ параллельны оси ОХ. Таких точек, в которых касательные параллельны оси ОХ на графике **4**.*

Ответ: 4.

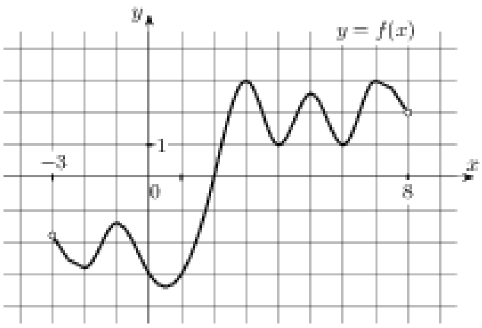


№7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$.



а) На интервале $(-2;12)$ найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 7$.

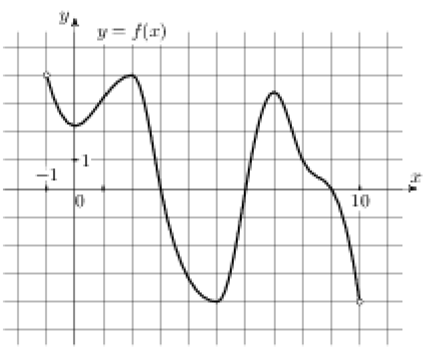
Ответ: 7.



б) На интервале $(-3;8)$ найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -20$.

Ответ: 8.

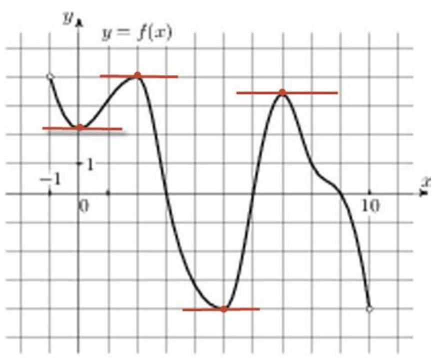
№8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1;10)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Исходя из геометрического смысла производной:

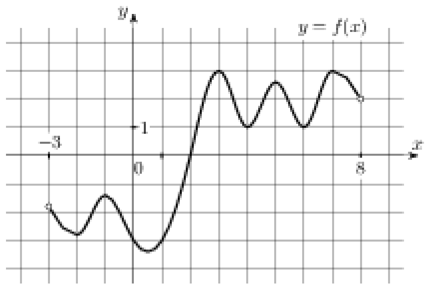
$f'(x_0) = tg\alpha = k = 0$,

*Угловой коэффициент касательной равен 0, поэтому касательные параллельны оси ОХ. Таких точек на графике **4**.*



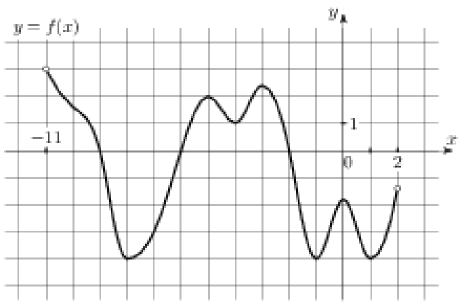
Ответ: 4.

№9. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0 .



а) на интервале $(-3;8)$.

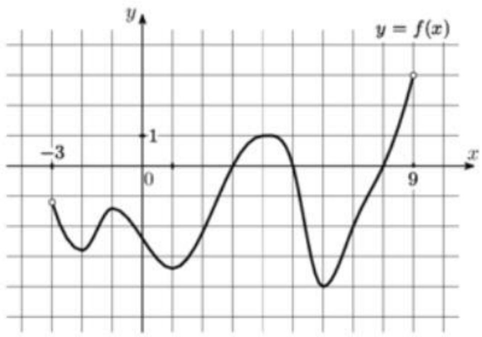
Ответ: 8.



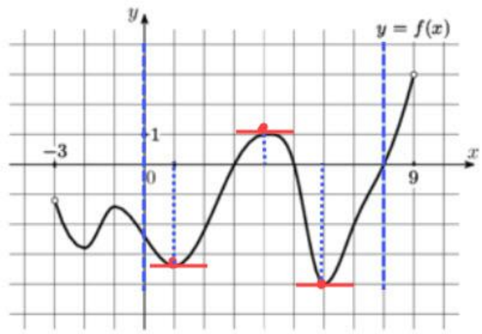
б) на интервале $(-11;2)$.

Ответ: 7.

№10. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3;9)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[0;8]$.

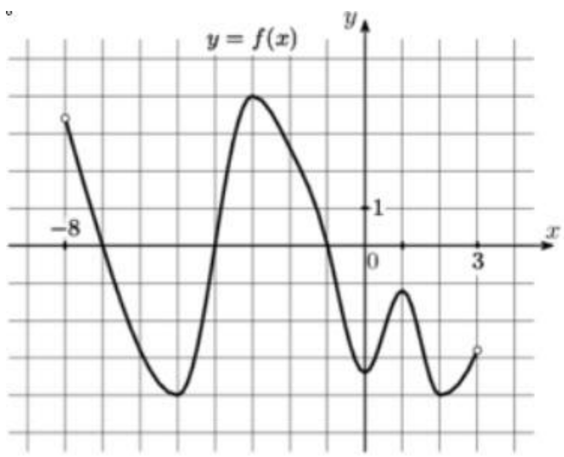


$f'(x) = 0$, значит, угловой коэффициент касательной $k = 0$ и она параллельна оси x. Всего на заданном отрезке 3 точки. Количество корней уравнения 3.



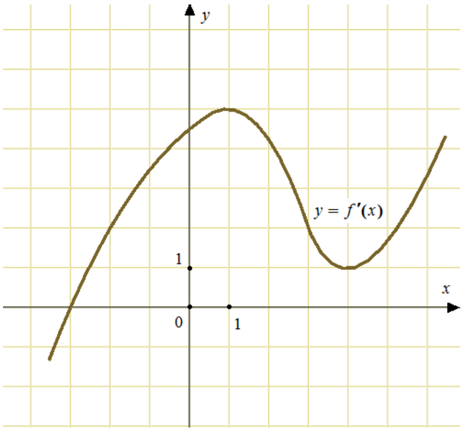
Ответ: 3.

№10а. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-7;-1]$.

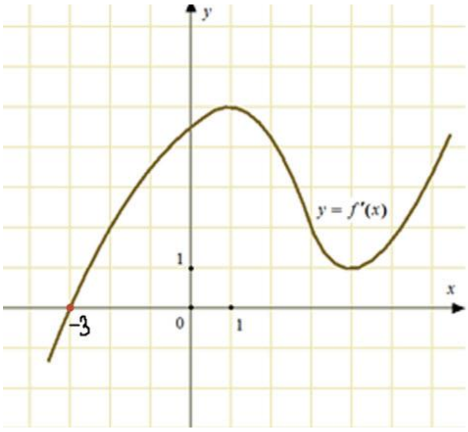


Ответ: 2.

№11. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

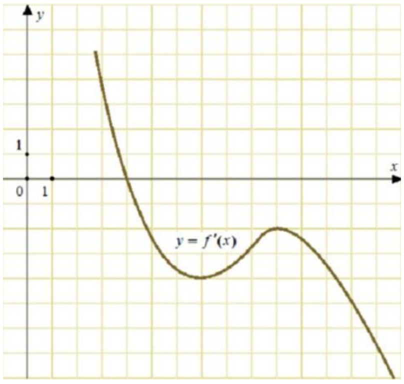


Касательные к графику функции параллельные оси абсцисс или совпадающие с ней имеют угловой коэффициент равный 0, т.е. $f'(x_0) = k = 0$. *Найдем на графике производной функции точку, где* $f'(x_0) = 0$. *Это точка с абсциссой* $x_0 = -3$



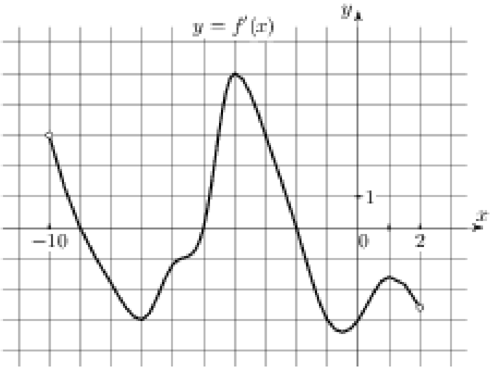
Ответ: -3.

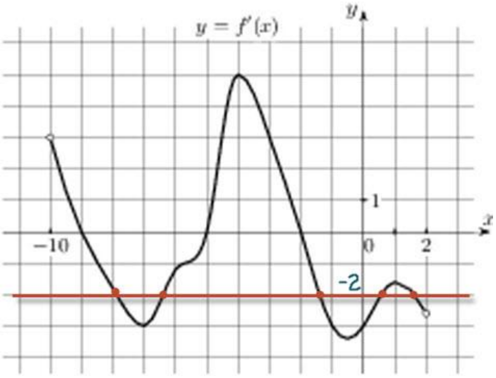
№11а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: 4.

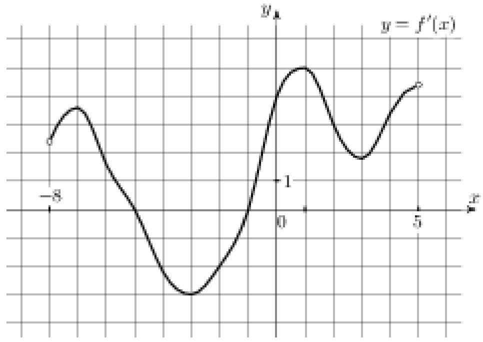
№12. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.





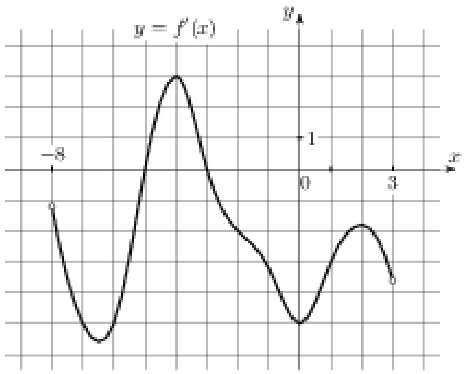
Параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты. Угловой коэффициент прямой $k = -2$ *равен угловому коэффициенту касательной к графику функции. Исходя из геометрического смысла производной, имеем:* $f'(x_0) = tg\alpha = k$. *Поэтому* $f'(x_0) = -2$. *Отметим это число на оси значений производной и найдем абсциссы точек пересечения прямой* $f'(x_0) = -2$ *с графиком производной функции. Всего таких точек 5.* *Ответ: 5.*

№12а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 17$ или совпадает с ней.



Ответ: 5.

№12б. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -x - 15$ или совпадает с ней.



Ответ: 2.

№13. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

Решение:

Если $a = 0$, то прямые $y = 2x + 3$ и $y = 3x + 1$ пересекаются.

Если $a \neq 0$, то прямая $y = 3x + 1$ является касательной к параболе $y = ax^2 + 2x + 3$, если они имеют только одну общую точку.

Значит, система уравнений $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = ax^2 + 2x + 3 \end{cases}$ должна иметь единственное решение.

Решим соответствующее квадратное уравнение $3x + 1 = ax^2 + 2x + 3$ и найдем при каком значении a оно имеет единственное решение.

$$3x + 1 = ax^2 + 2x + 3$$

$$ax^2 - x + 2 = 0, \quad D = 1 - 4 \cdot a \cdot 2 = 1 - 8a$$

$$D = 0, \quad 1 - 8a = 0, \quad a = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Ответ: 0,125.

№13а. Прямая $y=-x-2$ является касательной к графику функции $y=ax^2+17x+1$. Найдите a.

Ответ: 27.

№13б. Прямая $y=-3x-8$ является касательной к графику функции $y=ax^2+27x+7$. Найдите a.

Ответ: 15.

№14. Прямая $y=-5x+8$ является касательной к графику функции $y=28x^2+bx+15$.
Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение:

Прямая $y=-5x+8$ является касательной к параболе $y=28x^2+bx+15$, если они имеют только одну общую точку.

Значит, система уравнений $\begin{cases} y=-5x+8 \\ y=28x^2+bx+15 \end{cases}$ должна иметь единственное решение.

Решим соответствующее квадратное уравнение $-5x+8=28x^2+bx+15$ и найдем при каких значениях b оно имеет единственное решение.

$-5x+8=28x^2+bx+15$

$28x^2+(b+5)x+7=0,\ \ D=(b+5)^2-4\cdot 28\cdot 7=(b+5)^2-28^2=(b+5-28)(b+5+28)=(b-23)(b+33)$

$D=0,\quad b_1=23,\ \ b_2=-33$

Если $b=23$, то $28x^2+28x+7=0,\ \ 4x^2+4x+1=0,\ \ x_0=-\dfrac{1}{2}<0$

Если $b=-33$, то $28x^2-28x+7=0,\ \ 4x^2-4x+1=0,\ \ x_0=\dfrac{1}{2}>0$.

Ответ: -33.

№14а. Прямая $y=-6x+1$ является касательной к графику функции $y=4x^2+bx+2$.
Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

Ответ: -2.

№14б. Прямая $y=-9x-7$ является касательной к графику функции $y=x^2+bx+2$.
Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Ответ: -15.

№14в. Прямая $y=3x+4$ является касательной к графику функции $y=3x^2-3x+c$. Найдите c.

Ответ: 7.

№15. Прямая $y=8x+4$ является касательной к графику функции $y=x^3+3x^2-x+9$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение:

Исходя из геометрического смысла производной, имеем $f'(x_0)=k$. Поскольку прямая $y=8x+4$ является касательной к графику функции $y=x^3+3x^2-x+9$, то $k=8$. Для нахождения абсциссы точки касания, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases}\left(x^3+3x^2-x+9\right)'=8\\ x^3+3x^2-x+9=8x+4\end{cases};\quad \begin{cases}3x^2+6x-1=8\\ x^3+3x^2-9x+5=0\end{cases};\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=-3\\ x_2=1\end{array}\right.\\ x^3+3x^2-9x+5=0\end{cases};\quad x=1 \text{ (проверкой)}$$

Ответ: 1.

№15а. Прямая $y=5x+11$ является касательной к графику функции $y=x^3+4x^2+9x+11$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: -2.

№15б. Прямая $y=-6x-2$ является касательной к графику функции $y=x^3-5x^2+x-5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: 1.