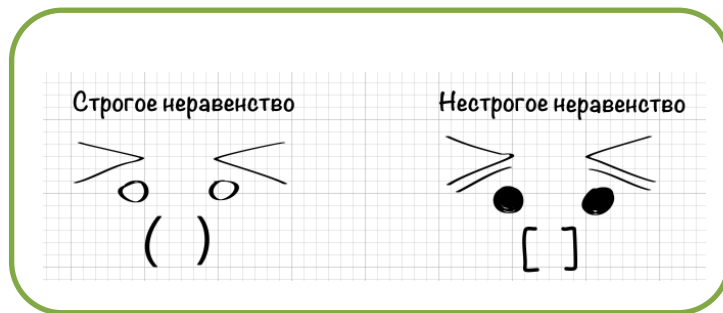




- Подготовка к ЕГЭ [Задание №15](#) / Рациональные неравенства

1. Целые неравенства. Метод интервалов

2. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов

3. Системы неравенств

1. Целые неравенства. Метод интервалов.

■ Примеры

Решите неравенства:

№1. $(x^2 - 6x + 5)(x + 3)^2 \leq 0$

№2. $(1 - 3x)^3 (5 - 2x)^2 (4 - x)^2 (2 - x)x(x + 2)^4 (x + 3)^3 > 0$

№3. $(x + 6)^4 (x + 4)^3 (x + 2)^2 (x + 1)(x - 3)^2 (x - 5) \leq 0$

№4. $x^2 (x^2 + 9) < 9(x^2 + 9)$

№5. $(3x^2 - x - 4)^2 (5x - 2) \geq (3x^2 - x - 4)^2 (4x + 1)$

■ **Тест** 1. Целые неравенства. Метод интервалов

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $(x-2)(x-1)^2 \geq 0$

№2. $(x^2-5x+4)(x+2)^2 \leq 0$

№3. $(x^2+4x+3)(x-2) < (x^2-2x-3)(x+3)$

№4. $(x+2)^2(1-x)(x-2)^3(x-3) \leq 0$

№5. $|3x^2-11x+6|(6x^2-11x+3) \geq 0$

№6. $(x^2+6x+11)(x^2+6x+13) \leq 8$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $(x-6)(x+2)^2 \geq 0$

№2. $x^2(x^2+4) \geq 4(x^2+4)$

№3. $(x^2-3x+2)(x-3) < (x^2-5x+6)(x-4)$

№4. $(x+3)^2(x+1)^3x(x-2)^4(x-4)^5(x-5)^6 \geq 0$

№5. $|4x^2-12x+5|(5x^2-12x+4) \geq 0$

№6. $(x^2-8x+18)(x^2-8x+19) \leq 6$

■ **Ответы (тест)** 1. Целые неравенства. Метод интервалов

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	$\{1\} \cup [2; \infty)$	$\{-2\} \cup [1; 4]$	$(-3; -1)$	$\{-2\} \cup [1; 2] \cup [3; \infty)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$	-3
Вар.2	$\{-2\} \cup [6; \infty)$	$(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$	$(2; 3)$	$\{-3\} \cup [-1; 0] \cup \{2\} \cup [4; \infty)$	$\left(-\infty; \frac{2}{5}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [2; \infty)$	4

2. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов.

■ Примеры

Решите неравенства:

№1. $\frac{(x+4)^2}{x^2-9} \leq 0$

№2. $\frac{25-x^2}{(x-4)^2} \geq 0$

№3. $\frac{x^3-3x^2-16x+48}{3-x} \geq 0$

№4. $\frac{x^2-4x+3}{2x^2+5} \leq \frac{x^2-4x+3}{3x^2+5}$

№5. $\frac{5x-x^2-4}{x^2-4x} \leq 2 - \frac{8}{x+3}$

№6. $1 + \frac{2}{x} \leq \frac{x^2+4x+4}{3x+2}$

№7. $\frac{3}{x^2+13x+40} \geq \frac{1}{x^2+15x+56}$

№8. $\frac{(5x-3)^2}{x-2} \geq \frac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}$

№9. $\frac{\frac{1}{x-5}-1}{1-\frac{1}{x-8}} \geq 0$

№10. $\frac{1}{x+10} \leq \frac{x}{x^2-2x+4} + \frac{8-17x}{(x+10)(x^2-2x+4)}$

№11. $\frac{(x+2)^2-4}{x+4} + \frac{25}{x+2} \leq 8$

■ Тест

2. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов

Вариант 1

Решите неравенства:

$$\text{№1. } \frac{2x^2}{3x+7} \leq 0$$

$$\text{№2. } \frac{(x+7)^2}{x^2-36} \leq 0$$

$$\text{№3. } \frac{1}{2-x} < \frac{x^2-5}{x-2}$$

$$\text{№4. } \frac{x^3-3x^2-10x}{x^2-3x-10} \geq 0$$

$$\text{№5. } \frac{x^3-4x^2-25x+100}{4-x} \geq 0$$

$$\text{№6. } \frac{x^2-6x+8}{x-1} + \frac{x-4}{x^2-3x+2} \leq 0$$

Вариант 2

Решите неравенства:

$$\text{№1. } \frac{3x^2}{2x+5} \leq 0$$

$$\text{№2. } \frac{16-x^2}{(x-3)^2} \geq 0$$

$$\text{№3. } \frac{2}{3-x} < \frac{x^2-11}{x-3}$$

$$\text{№4. } \frac{x^3-4x^2-12x}{x^2-4x-12} \leq 0$$

$$\text{№5. } \frac{x^2-3x+2}{3x^2+7} \leq \frac{x^2-3x+2}{4x^2+7}$$

$$\text{№6. } \frac{x^2-4x+3}{x-2} - \frac{x-3}{x^2-3x+2} \leq 0$$

Вариант 3

Решите неравенства:

$$\text{№1. } \frac{\frac{1}{x-1}-1}{1-\frac{1}{x-7}} \geq 0$$

$$\text{№2. } \frac{5}{x-4} - \frac{16}{x^2-5x+4} \geq 1$$

$$\text{№3. } 1 + \frac{16}{x^2-7x+10} \leq \frac{5}{2-x}$$

$$\text{№4. } 1 + \frac{6}{x} \leq \frac{x^2+12x+36}{5x+2}$$

$$\text{№5. } \frac{4}{x^2-x+3} + \frac{2}{x-3} \leq \frac{2x^2-2x-13}{(x-3)(x^2-x+3)}$$

$$\text{№6. } 1 + \frac{64}{x^2-9x+14} \leq \frac{11}{2-x}$$

Вариант 4

Решите неравенства:

№1. $\frac{x^2 - 8x + 13}{x - 6} \leq \frac{x - 1}{2}$

№2. $\frac{x^2 + 14x - 3}{x + 5} \leq 2$

№3. $\frac{x^2 - x - 14}{x - 4} + \frac{x^2 - 8x + 3}{x - 8} \leq 2x + 3$

№4. $\frac{1}{5x - 12} + \frac{2x^2 - 6x + 1}{x - 3} \geq 2x$

№5. $\frac{3}{x^2 - 30x + 216} \geq \frac{1}{x^2 - 34x + 288}$

№6. $\frac{(5x - 2)^2}{x - 3} \geq \frac{4 - 20x + 25x^2}{24 - 11x + x^2}$

Вариант 5

Решите неравенство:

№1. $\frac{3x + 28 - x^2}{x^2 - 7x} \leq 2 + \frac{2}{x + 3}$

№2. $\frac{(x + 3)^2 - 9}{x + 6} + \frac{36}{x + 2} \leq 10$

■ Ответы (тест) 2. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар. 1	$\left(-\infty; -\frac{7}{3}\right);$ $\{0\}$	$\{-7\}; (-6; 6)$	$(-2; 2); (2; \infty)$	$[0; 5); (5; \infty)$	$[-5; 4); (4; 5]$	$(-\infty; 1); (2; 4]$
Вар. 2	$(-\infty; -2, 5);$ $\{0\}$	$[-4; 3); (3; 4]$	$(-3; 3); (3; \infty)$	$(-\infty; -2); (-2; 0]$	$\{0\}; [1; 2]$	$(-\infty; 0]; (1; 2);$ $(2; 3]$
Вар. 3	$(1; 2]; (7; 8)$	$(1; 4); \{5\}$	$\{1\}; (2; 5)$	$[-6; -2];$ $\left(-\frac{2}{5}; 0\right);$ $[1; \infty)$	$\left[-\frac{7}{4}; 3\right)$	$\{-1\}; (2; 7)$
Вар. 4	$(-\infty; 4]; [5; 6)$	$(-\infty; -13];$ $(-5; 1]$	$(-\infty; -4];$ $(4; 8)$	$\left(\frac{12}{5}; 2, 5\right];$ $(3; \infty)$	$(-\infty; 12);$ $(16; 18);$ $(18; \infty)$	$\{0, 4\}; (3; 8);$ $[9; \infty)$
Вар. 5	$(-\infty; -4];$ $(-3; -1];$ $(0; 7); (7; +\infty)$	$(-\infty; -6);$ $(-6; -2); 4$				

3. Системы неравенств

■ Примеры

Решите системы неравенств:

$$\text{№1.} \quad \begin{cases} 2(5x+4) - 5(2x+4) > 4x \\ (x-1)(x+4) < 0 \end{cases}$$

$$\text{№2.} \quad \begin{cases} (x+1)^2 \geq 4x+4 \\ \frac{x-1}{x+2} \geq \frac{6}{x^2+2x} \end{cases}$$

$$\text{№3.} \quad \begin{cases} \frac{x-3}{x-5} \leq \frac{-4}{x^2-4x-5} \\ \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{x} \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{№4.} \quad \begin{cases} (x-1-x^2)(x+6)(x^2-6x+5) \geq 0 \\ \frac{x^2-4x+3}{x^2+14x+49} \geq 0 \\ x^2-2x-120 < 0 \end{cases}$$

$$\text{№5.} \quad \begin{cases} \frac{48x^2-27}{3-4x} \cdot x - (1-2x)(5+6x) \geq \frac{x^2-10x}{x} + x - 1 \\ \frac{5-x}{2} - \frac{1-x}{3} < \frac{1-2x}{6} + x + 4 \end{cases}$$

$$\text{№6.} \quad \begin{cases} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} \leq 5 \\ (x+1, 5)(x^2+3, 6x+3, 24) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{№7.} \quad \begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \geq \frac{6}{x+3} \\ \sqrt{x^2+22} \leq 5 \end{cases}$$

Вариант 1

Решите системы неравенств:

$$\text{№1.} \quad \begin{cases} 7(2x+4) - 2(7x+4) > 4x \\ (x-7)(x+4) < 0 \end{cases}$$

$$\text{№2.} \quad \begin{cases} x^2 > 16 \\ x^2 - 6x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{№3.} \quad \begin{cases} x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2x} \\ \frac{x-1}{x+1} > 2 \end{cases}$$

$$\text{№4.} \quad \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x - 140}{x^2 + 3} \leq 1 \\ \frac{2x+3}{x-9} > 1 \end{cases}$$

$$\text{№5.} \quad \begin{cases} \frac{x^2 + 10x + 25}{4x - 5} \geq 0 \\ (x-2)(x^2 - 6x + 9) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{№6.} \quad \begin{cases} (x+4)^2 \leq 4(3-x) + 8(x+2) \\ \frac{x^2}{(x+1)^2 - 1} \leq \frac{3}{x+2} \end{cases}$$

Вариант 2

Решите системы неравенств:

$$\text{№1.} \quad \begin{cases} 7(3x+2) - 3(7x+2) > 2x \\ (x-5)(x+8) < 0 \end{cases}$$

$$\text{№2.} \quad \begin{cases} \frac{x^2 + 5x - 14}{x+3} \geq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{№3.} \quad \begin{cases} x + \frac{11}{4} \leq \frac{45}{4x} \\ \frac{5x+1}{4x+3} \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{№4.} \quad \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 189}{x^2 + 23} \leq 2 \\ \frac{x+4}{x-9} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{№5.} \quad \begin{cases} x-4 \leq \frac{27}{x+2} \\ x+2 \leq \frac{27}{x-4} \end{cases}$$

$$\text{№6.} \quad \begin{cases} (x+1)^2 \geq 3x+7 \\ \frac{x+1}{x+3} \geq \frac{6}{x^2+3x} \end{cases}$$

Вариант 3

Решите системы неравенств:

$$\text{№1.} \quad \begin{cases} 2x^2 + 9x \leq -7 \\ 2x + 5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{№2.} \quad \begin{cases} x + 1 - \frac{8}{x+3} \leq 0 \\ x^2 + 7x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{№3.} \quad \begin{cases} x + \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3x} \\ \frac{x-2}{3x-1} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{№4.} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 18 < 0 \\ x(1-x)^{-1} < 0 \end{cases}$$

$$\text{№5.} \quad \begin{cases} \frac{x}{x+3} + \frac{27}{x^2+5x+6} \geq \frac{7}{x+2} \\ 36 - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{№6.} \quad \begin{cases} (x+1)^2 \geq x+1 \\ \frac{x+4}{x-3} > \frac{4}{3x-x^2} \end{cases}$$

Вариант 4

Решите системы неравенств:

$$\text{№1.} \quad \begin{cases} 2x^2 - 5x - 7 \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{№2.} \quad \begin{cases} 2 - x - \frac{2}{x-5} \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{№3.} \quad \begin{cases} \frac{2x^2 - 19x - 61}{x^2 + 5} \leq 1 \\ \frac{x - 46}{x - 25} \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{№4.} \quad \begin{cases} (7+x)^{-1} \geq \frac{1}{6} \\ (7+x)^2 < 36 \end{cases}$$

$$\text{№5.} \quad \begin{cases} (x-3)^2 \leq 3(2-x) + (3-x) \\ \frac{x^2}{x^2+3x} \leq \frac{2}{x+3} \end{cases}$$

$$\text{№6.} \quad \begin{cases} (x+1)^2 \geq 1 - 3x \\ \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^2} \geq 1 \end{cases}$$

Вариант 5

Решите системы неравенств:

$$\text{№1.} \quad \begin{cases} \frac{x-1}{x-2} \leq \frac{6}{x^2+2x-8} \\ \frac{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}{x} \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{№2.} \quad \begin{cases} (x+1)(1-x) \geq 2x+1 \\ \frac{x+6}{x-4} > \frac{9}{4x-x^2} \end{cases}$$

$$\text{№3.} \quad \begin{cases} (x+2,5)(x^2+5,6x+7,84) \geq 0 \\ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{№4.} \quad \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{6}{x-3} \geq 0 \\ \sqrt{x^2+34} \geq 6 \end{cases}$$

▪ **Ответы (тест)** **3. Системы неравенств**

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	$(-4;5)$	$(4;6]$	$(-3;-1,5]$	$(9;13]$	$\{-5\};$ $\left(\frac{5}{4};2\right];$ $\{3\}$	$(-2;0) \cup (0;2]$
Вар.2	$(-8;4)$	$[-7;-3)$	$(0;2]$	$[-17;-11]$	$(-\infty;-5];$ $(4;7]$	$(-\infty;-3);$ $(-3;-2];$ $[3;\infty)$
Вар.3	$[-3,5;-2,5]$	$[-7;-5];$ $(-3;0]$	$[-2;0)$	$(-3;0);$ $(1;6)$	$[-6;-3);$ $(-2;2];$ $[3;6]$	$(-2;-1];$ $(3;\infty)$
Вар.4	$[3,5;\infty)$	$\{3\} \cup [4;5)$	$[4;22]$	$(-7;-1)$	$(0;2]$	$(0;\sqrt{7}]$
Вар.5	$[-5;-4)$	$[-2;0)$	$\left[-2,5;\frac{-25+\sqrt{5}}{10}\right];$ $(-2;\infty)$	$(-\infty;-\sqrt{2}];$ $\left[\sqrt{2};\frac{5}{3}\right];$ $(2;3)$		

✓ **Алгоритм решения неравенств методом интервалов**

• **Подготовительный этап.**

Приведем неравенство к виду $f(x) \vee 0$.

Выражение $f(x)$ назовем функцией. По-возможности, в этом выражении разложите на множители числитель и знаменатель.

Знак $\vee$ обозначает любой из знаков неравенства: $\leq \geq < >$.

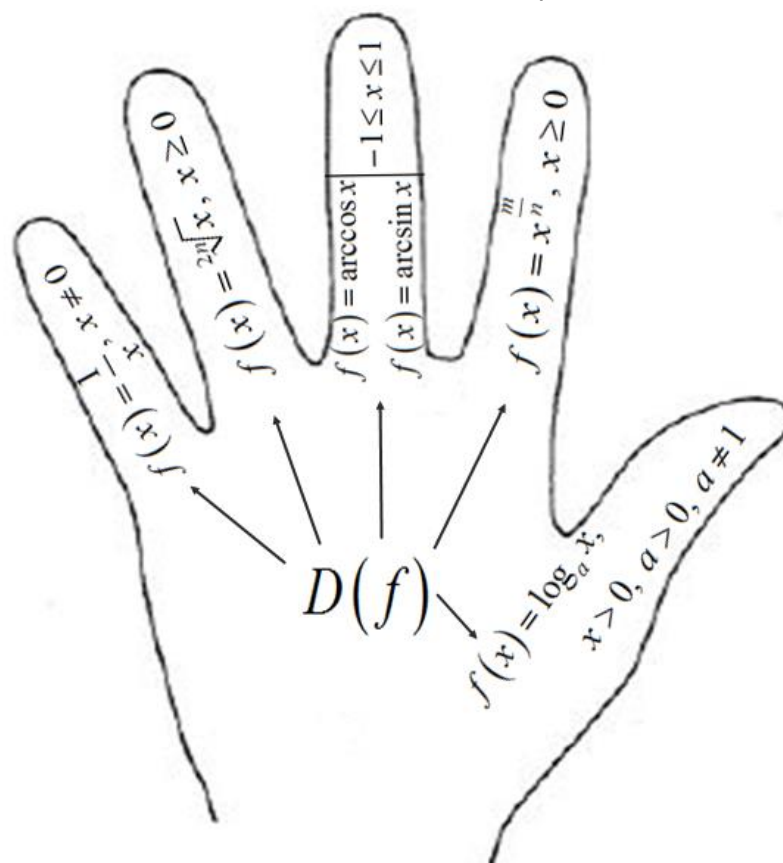
• **Алгоритм.**

1. Найти область определения функции: $D(f)$.
2. Найти нули функции: $f(x) = 0$.
3. На области определения ($D(f)$) расставить нули функции ($f(x) = 0$) и определить знак функции на промежутках, в каждом из которых функция сохраняет постоянный знак. Отметить нужные промежутки из условия $f(x) \vee 0$ и записать ответ.

✓ **Вопросы, возникающие при выполнении некоторых пунктов алгоритма.**

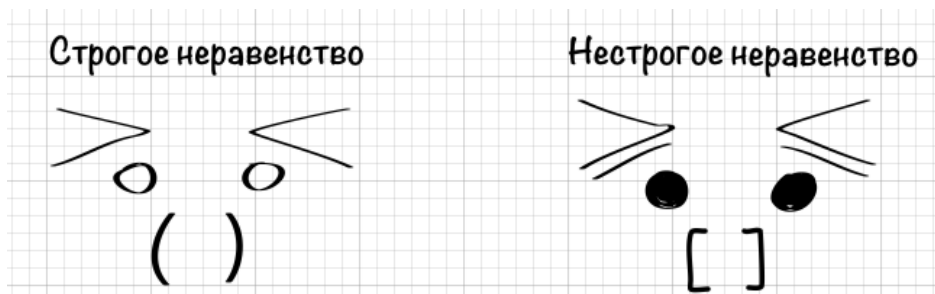
1. Найти область определения функции: $D(f)$.

Область определения функции - это множество допустимых значений переменной, входящей в выражение $f(x)$, при которых это выражение имеет смысл. Ограничений для переменной, входящей в выражение не так много - их всего пять и можно запомнить, разместив на пальцах ладони.



3. Если в разложенном на множители выражении $f(x)$ содержится множитель в четной степени $(x-a)^{2n}$, то функция знак не меняет, проходя через нуль этого множителя. Будем называть этот нуль или точку - двойная. Знание этого факта намного упрощает решение некоторых видов неравенств.

Запомнить соответствие: знак неравенства - точка на координатной прямой - скобка в промежутке, поможет следующая пиктограмма.



Чаще возникают сложности при решении нестрогих неравенств, т.к. отдельно стоящие точки, которые обращают в нуль выражение $f(x)$ можно пропустить при записи ответа. Нестрогое неравенство - это совокупность двух условий: равенства нулю и строгое сравнение с нулем. Запомним, что

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \qquad f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

	Скобка	Союз	Операции над множествами решений
Система условий	{	“И”	Общие решения $\cap$ - пересечение
Совокупность условий	[	“ИЛИ”	Все решения $\cup$ - объединение