Тема: Показательные неравенства

Профиль

Сведение к одному основанию

- ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $2^{-x} < \sqrt{2}$

№2. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[5]{6}$

№3. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

№4. $3\cdot 5^{x+1} + 6\cdot 5^{-(x+1)} < \frac{81}{5^{x+1}}$

№5. $162\cdot 3^{5-x} - 2\cdot 3^{x-5} > 0$

№6. $\sqrt[3]{27^{2x-3}} > \sqrt{81^{\frac{6-4x}{x+1}}}$

№7. $7^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-8x+16}} \le 1$

№8. $0,2^{-\frac{2x+3}{x-5}}\cdot 15^{2x}\cdot 25x^{-2} \ge \frac{25^{-\frac{2x+3}{x-5}}\cdot 9^x}{5x^2}$

№9. $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}} \ge \frac{2}{3}\cdot 3,5^{x+1-\frac{3}{x+2}}$

№10. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{6-5x}{x}} \le \left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}$

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $4^{-\frac{x}{2}} < 8$

№2. $0,8^{\frac{x(x-3)}{2}} > 0,64$

№3. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

№4. $2^{10x^2-x-1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{10x^2}$

№5. $4\cdot 3^{x+4} + 19\cdot 3^{-(x+4)} < \frac{31}{3^{x+4}}$

№6. $\sqrt[6]{64^{3x-1}} > \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1-3x}{x-1}}}$

№7. $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \ge \frac{2}{3}\cdot 2,5^{x-\frac{3}{x+1}}$

№8. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{10x-12}{x+3}} \le \frac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^{x}}$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $10^{\frac{2x}{7}} > 0,1$

№2. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-25x^2+20x+10} < \frac{25}{4}$

№3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x-2}{3-3x}} > \frac{9}{4}$

№4. $(0,4)^{\frac{x+7}{x+3}} > (2,5)^{-x-1}$

№5. $2\cdot 3^{x} + \frac{7}{3^{x}} < 61\cdot 3^{-x}$

№6. $5^{\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}} \le 1$

№7. $0,25^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 30^{x}\cdot x^{-2} \le \frac{16^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 15^{x}}{8x^2}$

№8. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\frac{6-x}{x}} \le \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-x}$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1. $4^{\frac{3x}{5}} < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

№2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$

№3. $\sqrt{3}\cdot 4^{x} \le \sqrt{2}\cdot 9^{x}$

№4. $27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x^2+6x} < 8$

№5. $54\cdot 3^{3-x} - 2\cdot 3^{x-3} > 0$

№6. $0,25^{-\frac{3x-2}{x+2}}\cdot 14^{x}\cdot x^{-2} \le \frac{2^{-\frac{3x-2}{x+2}}\cdot 112^{x}}{4x^2}$

№7. $\sqrt{625^{\frac{4-2x}{x-1}}} > \sqrt[3]{125^{2x+1}}$

№8. $4\left(\sqrt{5}+1\right)^{\frac{6x-3}{x-2}} \ge \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^{2x+1}}{16^{x}}$

Вариант 4

Решите неравенства:

№1. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{5}} > 3$

№2. $0,2^{\frac{3x-3}{x-2}} > \frac{1}{5}$

№3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^3+5}{x+5}} < 0,5$

№4. $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} < \frac{2}{3}$

№5. $7 \cdot 2^{x+4} - 448 \cdot 2^{-x-4} < 0$

№6. $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$

- ***Ответы (тест)*** Сведение к одному основанию

	Вар.1	Вар.2	Вар.3	Вар.4
№1	$x > -3$	$x > -3,5$	$x < -\frac{5}{9}$	$x < -2,5$
№2	$-1 < x < 4$	$-0,4 < x < 1,2$	$0 < x < 0,5$	$0,5 < x < 2$
№3	$1 < x < 4$	$0,8 < x < 1$	$x \ge \frac{1}{4}$	$(-\infty;-5)\cup(-1;0)\cup(1;\infty)$
№4	$-\frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{4}$	$(-4;-3)\cup(1;\infty)$	$-1 < x < 7$	$x < 2$
№5	$x < -3,5$	$x < 1,5$	$x < 4,5$	$x < -1$
№6	$\left(\frac{1}{3};1\right)\cup(3;\infty)$	$[-5;-2]\cup[2;3)\cup(3;5]$	$(-2;0)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right]\cup[1;\infty)$	$(-1;2]\cup[3;\infty)$
№7	$(-\infty;-2]\cup(-1;2]$	$(-\infty;-4];[-3;0);(0;2)$	$(-\infty;-3);\left(1;\frac{3}{2}\right)$	
№8	$(-3;3]\cup[4;\infty)$	$(-\infty;-3]\cup(0;2]$	$[-2,5;1]\cup(2;\infty)$	

1. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$, *если* $a > 1$, *функция возрастающая; знак неравенства сохраняется.*

2. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x)$, *если* $0 < a < 1$, *функция убывающая; знак неравенства меняется на противоположный.*

3. $a^{f(x)} \vee b$, *где* $a, b > 0,\ a \neq 1$ *неравенство сводится к неравенствам вида (1) или (2) с помощью основного логарифмического тождества* $b = a^{\log_a b}$.

4. *К неравенствам вида* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right) \cdot h \vee 0$ *применим метод замены множителя:*

   пусть $a > 1$, *тогда множитель* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right)$ *можно заменить множителем* $\left(f(x) - g(x)\right)$ *того же знака;*

   если $0 < a < 1$, *то множитель* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right)$ *можно заменить противоположным множителем* $\left(g(x) - f(x)\right)$.

5. *Неравенства вида* $f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)}$ *можно логарифмировать по основанию больше 1*

$$\lg f(x)^{g(x)} \vee \lg f(x)^{h(x)}$$
$$g(x) \lg f(x) \vee h(x) \lg f(x)$$
$$\left(g(x) - h(x)\right) \cdot \lg f(x) \vee 0$$

✓ *Свойства степеней*

$a^0 = 1$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$