Логарифмические уравнения, сводящиеся к тригонометрическим. Задание 12 ЕГЭ Профиль

- ***Примеры***

№1. а) Решите уравнение $\log_{13}\left(\cos 2x-9\sqrt{2}\cos x-8\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\log_9\left(3^{2x}+5\sqrt{2}\sin x-6\cos^2 x-2\right)=x$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $2\log_3^2\left(2\cos x\right)-5\log_3\left(2\cos x\right)+2=0$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2\left(\sin x\right)+\log_2\left(\sin x\right)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\dfrac{3\cos^2 x-\sin^2 x-2}{\log_4\left(-\cos x\right)}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

▪ *Решение (примеры)*

№1. **а) Решите уравнение** $\log_{13}\left(\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\log_{13}\left(\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8\right) = 0$

$\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8 = 1$

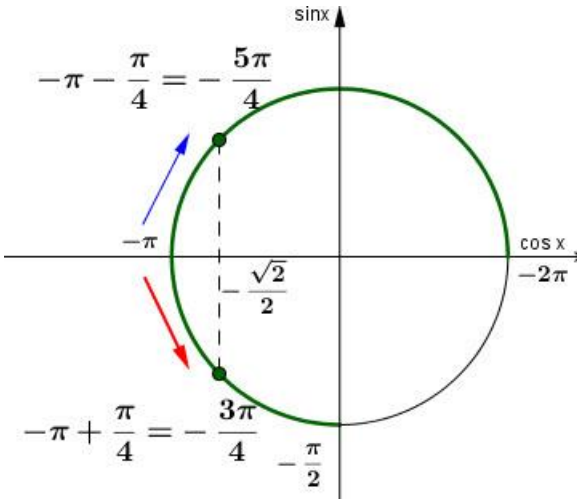
$2\cos^2 x - 1 - 9\sqrt{2}\cos x - 8 - 1 = 0$

$2\cos^2 x - 9\sqrt{2}\cos x - 10 = 0$

$D = 242, \quad \sqrt{D} = 11\sqrt{2},$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos x = 5\sqrt{2}, \ \varnothing$

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$



б) Корни уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \quad x_1 = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}, \quad x_2 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$

Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$; ***б)*** $-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$.

№2. **а) Решите уравнение** $\log_9\left(3^{2x} + 5\sqrt{2}\sin x - 6\cos^2 x - 2\right) = x$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\log_9\left(3^{2x} + 5\sqrt{2}\sin x - 6\cos^2 x - 2\right) = x$

$3^{2x} + 5\sqrt{2}\sin x - 6\cos^2 x - 2 = 3^{2x}$

$5\sqrt{2}\sin x - 6\left(1 - \sin^2 x\right) - 2 = 0$

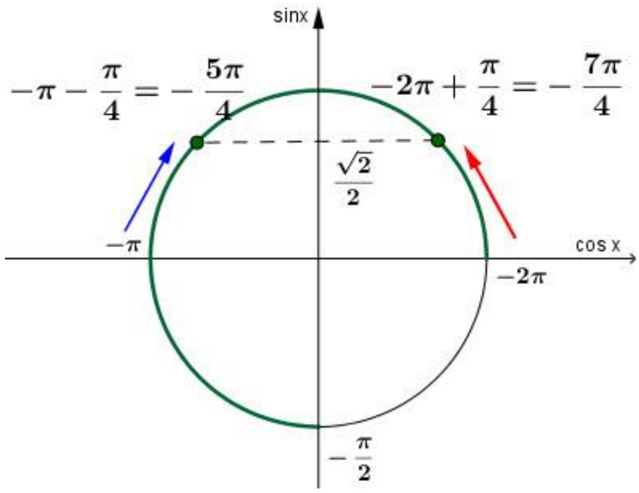
$6\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x - 8 = 0$

$D = 242, \quad \sqrt{D} = 11\sqrt{2},$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin x = -\frac{4\sqrt{2}}{3}, \ \varnothing$

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$



б) Корни уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \quad x_1 = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}, \quad x_2 = -2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$

.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$.

№3. **а) Решите уравнение** $2\log_3^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=0$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $2\log_3^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=0$

$\log_3(2\cos x)=t$

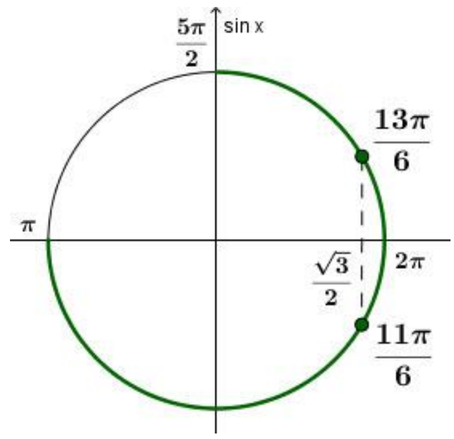
$2t^2-5t+2=0,\ t_1=\frac{1}{2},\ t_2=2$

$\log_3(2\cos x)=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\log_3(2\cos x)=2$

$2\cos x=3^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $2\cos x=9$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos x=4{,}5\quad\varnothing$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$



б) Корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$

$x_1=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6},\quad x_2=2\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}$.

№4. **а) Решите уравнение** $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Решение:

а) $\begin{cases}\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)=0 & (1)\\ 2\cos x-\sqrt{3}\neq 0 & (2)\end{cases}$

(1) $\log_2(\sin x)\cdot(\log_2(\sin x)+1)=0$

$\log_2(\sin x)=0$ $\qquad$ $\log_2(\sin x)+1=0$

$\sin x=1$ $\qquad$ $\log_2(\sin x)=-1$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $\qquad$ $\sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi m,\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$

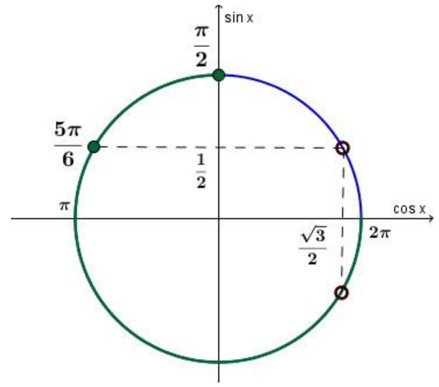
(2) $\cos x\neq\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x\neq\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ x\neq-\frac{\pi}{6}+2\pi n$

С учетом условия (2) получим, что

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m;\ k,m\in\mathbb{Z}$

б) Корни уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]\quad x_1=\frac{\pi}{2},\quad x_2=\frac{5\pi}{6}$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad \frac{5\pi}{6}+2\pi m;\ k,m\in\mathbb{Z}$;

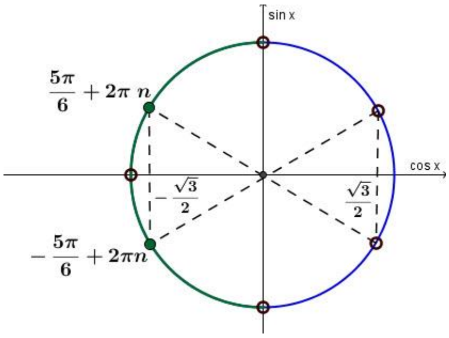
б) $\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6}$.

№5. **а) Решите уравнение** $\dfrac{3\cos^2 x - \sin^2 x - 2}{\log_4(-\cos x)} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\begin{cases} 3\cos^2 x - \sin^2 x - 2 = 0 & (1) \\ \log_4(-\cos x) \neq 0 & (2) \end{cases}$



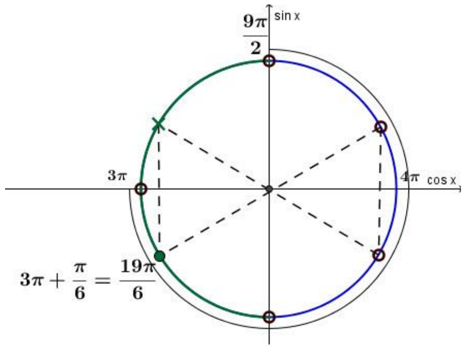
$(1)\quad 3\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 2 = 0$

$4\cos^2 x = 3, \quad \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$(2)\quad \log_4(-\cos x) \neq 0$

$\begin{cases} -\cos x \neq 1 \\ -\cos x > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos x \neq -1 \\ \cos x < 0 \end{cases}$



С учетом условия (2) получим, что $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

б) Корень, принадлежащий отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ $x = \dfrac{19\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$ ***; б)*** $\dfrac{19\pi}{6}$.

▪ *Тест* Логарифмические уравнения, сводящиеся к тригонометрическим. Задание 12 ЕГЭ Профиль

№1. а) Решите уравнение $\log_8\left(7\sqrt{3}\sin x-\cos 2x-10\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\log_4\left(2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-6\sin^2 x\right)=x$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $2\log_3^2\left(2\sin x\right)-7\log_3\left(2\sin x\right)+3=0$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2\left(\cos x\right)+\log_2\left(\cos x\right)}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\log_4\left(\sin x\right)}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответы (тест) Логарифмические уравнения, сводящиеся к тригонометрическим
Задание 12 ЕГЭ Профиль

№1.	№2.	№3.	№4.	№5.
а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k$ б) $\frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ б) $\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}$	а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ б) $\frac{2\pi}{3}$	а) $2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k$ б) $0,\ \frac{\pi}{3}$	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi m$ б) $-\frac{11\pi}{6}$

Решение (тест) Логарифмические уравнения, сводящиеся к тригонометрическим
Задание 12 ЕГЭ Профиль

№1. **а) Решите уравнение** $\log_8\left(7\sqrt{3}\sin x-\cos 2x-10\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Решение:

а) $\log_8\left(7\sqrt{3}\sin x-\cos 2x-10\right)=0$

$7\sqrt{3}\sin x-\cos 2x-10=1$

$7\sqrt{3}\sin x-\left(1-2\sin^2 x\right)-11=0$

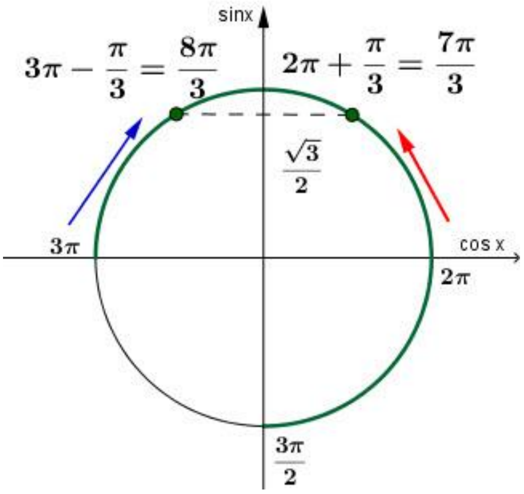
$2\sin^2 x+7\sqrt{3}\sin x-12=0$

$D=243,\quad \sqrt{D}=9\sqrt{3},$

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \sin x=-4\sqrt{3},\quad \varnothing$

$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

$x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$



б) Корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$

$x_1=3\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{9\pi}{3},\quad x_2=2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}.$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$.

№2. **а) Решите уравнение** $\log_4\left(2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-6\sin^2 x\right)=x$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\log_4\left(2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-6\sin^2 x\right)=x$

$2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-6\sin^2 x=2^{2x}$

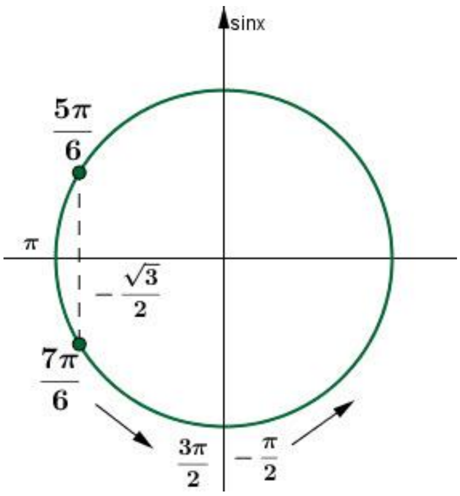
$-\sqrt{3}\cos x-6\left(1-\cos^2 x\right)=0$

$6\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x-6=0$

$D=147,\ \ \sqrt{D}=7\sqrt{3},$

$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos x=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \varnothing$

$x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$



б) Корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

$x_1=\frac{5\pi}{6},\ \ x_2=\frac{7\pi}{6}.$

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}$.

№3. **а) Решите уравнение** $2\log_3^2\left(2\sin x\right)-7\log_3\left(2\sin x\right)+3=0$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Решение:

а) $2\log_3^2\left(2\sin x\right)-7\log_3\left(2\sin x\right)+3=0$

$\log_3\left(2\sin x\right)=t$

$2t^2-7t+3=0,\ \ t_1=\frac{1}{2},\ \ t_2=3$

$\log_3\left(2\sin x\right)=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\log_3\left(2\sin x\right)=3$

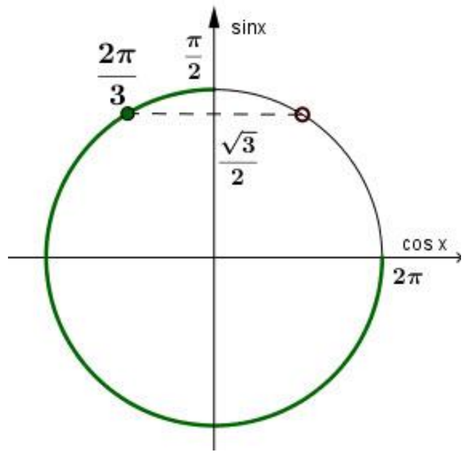
$2\sin x=3^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $2\sin x=27$

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin x=13{,}5\ \ \varnothing$

$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

$x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

б) Корень уравнения, принадлежащий отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ $\frac{2\pi}{3}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{2\pi}{3}$.

№4. **а) Решите уравнение** $\dfrac{\log_2^2(\cos x)+\log_2(\cos x)}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\begin{cases}\log_2^2(\cos x)+\log_2(\cos x)=0 & (1)\\ 2\sin x+\sqrt{3}\neq 0 & (2)\end{cases}$

$(1)\quad \log_2(\cos x)\cdot\left(\log_2(\cos x)+1\right)=0$

$\log_2(\cos x)=0 \qquad \log_2(\cos x)+1=0$

$\cos x=1 \qquad \log_2(\cos x)=-1$

$x=2\pi k \qquad \cos x=\dfrac{1}{2}$

$x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$

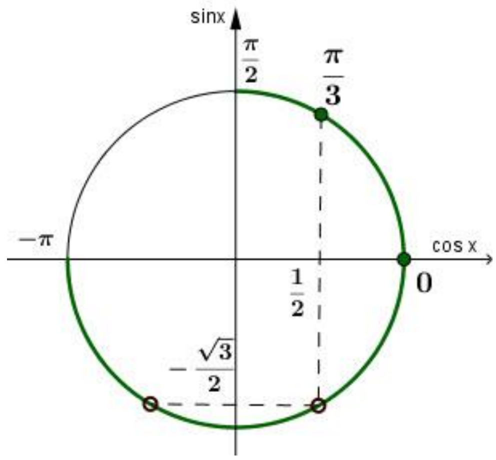
$(2)\quad \sin x\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad x\neq-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\quad x\neq-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi m$

С учетом условия (2) получим, что

$x=2\pi k,\quad x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$

б) Корни уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right] \quad x_1=0,\quad x_2=\dfrac{\pi}{3}$



Ответ: а) $2\pi k,\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$ ***; б)*** $0,\ \dfrac{\pi}{3}$.

№5. **а) Решите уравнение** $\dfrac{2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\log_4(\sin x)}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\begin{cases}2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0 & (1)\\ \log_4(\sin x)\neq 0 & (2)\end{cases}$

$(1)\quad 2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0,$

$\cos x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$

$\cos x=0 \qquad \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n \qquad x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$

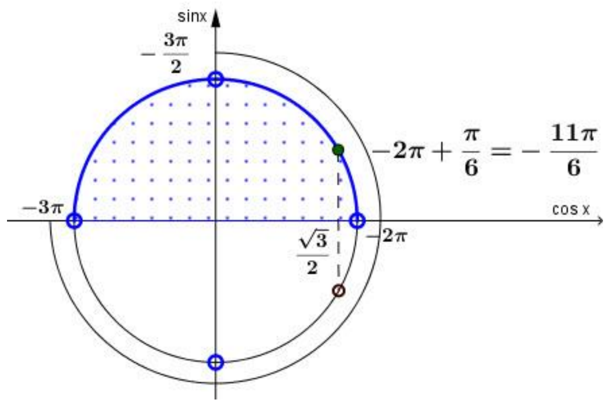
$(2)\quad \log_4(\sin x)\neq 0$

$\begin{cases}\sin x\neq 1\\ \sin x>0\end{cases}$

С учетом условия (2) получим, что $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi m$.

б) Корень, принадлежащий отрезку

$\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right] \quad x=-\dfrac{11\pi}{6}$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$ ***; б)*** $-\dfrac{11\pi}{6}$.