Преобразование логарифмических выражений

Задания повышенной сложности

- ***Банк заданий***

Найдите значение выражения:

№1. $10^{0,5\lg 16}+14\log_3\sqrt{2}\cdot\log_4 81+4^{\log_3 5}-25^{\log_3 2}$

№2. $\log^2{}_5 243\cdot\log_3 25-50\log_5 15$

№3. $\log^2{}_4 27\cdot\log_3 1024-45\log_4 12$

№4. $\log_3 2-\sqrt{\log_3 2\cdot(\log_3 6+\log_2 6)}$

№5. $\dfrac{8^{\log_3 13+3}}{8^{\sqrt{\log_3 13(\log_3 39+\log_{13} 39)}}}$

№6. $\dfrac{75^{\log_{15} 45}}{3^{\log_{15} 75}}+\dfrac{0,5\log_5\left(9-\sqrt{82}\right)^2}{\log_5\left(9+\sqrt{82}\right)}$

№7. $\dfrac{5^{\lg 20}}{20^{\lg 5+1}}+\dfrac{\lg\left|1-\sqrt{2}\right|}{\lg\left(1+\sqrt{2}\right)^{-1}}$

№8. $\dfrac{\log_{\sqrt{3}} 12-\log_2^{-2}\sqrt{3}+\log_3^2 12+4\log_3 2}{\log_3 12+\log_4^{-1} 3}$

№9. $\dfrac{\frac{1}{4}\log_{\sqrt{7}}^2 14+\log_7 14\cdot\log_2^{-1} 7-8\log_7^2\sqrt{2}}{\log_7 14+2\log_7 2}$

№10. $7^{\log_7 125}\cdot\log_7 5\cdot\log_5 49+\log_5\left(\sqrt{17}+4\right)+\log_5\left|4-\sqrt{17}\right|$

№11. $11^{\log_{11} 216}\cdot\log_{11} 6\cdot\log_6 121+\log_6\left(\sqrt{2}+1\right)+\log_6\left|1-\sqrt{2}\right|$

№12. $12^{\log_{12} 8}\cdot\log_{12} 2\cdot\log_2 144+\log_2\left(\sqrt{65}+8\right)+\log_2\left|8-\sqrt{65}\right|$

№13. $4\log_4\sqrt{2}-\log_{\sqrt{6}} 125\cdot\log_5 6-\frac{1}{4}\log_5\left(2\sqrt{2}-3\right)^2-\log_5\sqrt{2\sqrt{2}+3}$

№14. $\dfrac{5^{-5\ln\left(21+2\sqrt{110}\right)-18\ln\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)+2}}{5^{8\ln\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)}}$

№15. $\dfrac{2^{-4\ln\left(19+6\sqrt{10}\right)-17\ln\left(\sqrt{10}-3\right)+2}}{2^{9\ln\left(3+\sqrt{10}\right)}}$

№16. $\log_2\sqrt{\sin 6^\circ}+\log_2\sqrt{\cos 12^\circ}+\log_2\sqrt{\cos 24^\circ}+\log_2\sqrt{\sin 42^\circ}$

№17. $(\log_4 36+\log_6 16+4)(\log_4 6-\log_{24} 6)\log_6 4-\log_4 36$

№18. $\log_2 \log_6 256^{\lg 81} + \log_2 \log_7 36^{\lg 4} + \log_2 \log_3 49^{\lg 16} - 3\log_2 \lg 2$

№19. Вычислить $\log_{\frac{1}{4}} z - \log_4\left(z^2 + 3z + 3\right)$, если $z = -1 + \sqrt[3]{1025}$.

№20. Вычислить $\log_2 \log_5^2 (2a+5) + \log_2 \log_a^2 25$, если $a = \sqrt{2} - 1$.

№21. Вычислить $\log_a (2a+1) + \log_{a-2} a$, если $a = 1 + \sqrt{2}$

№22. Вычислить $\log_c^2 (ab)$, если $\log_a b = 7$ и $\log_c a = 4$.

№23. Вычислить $\dfrac{\left(\left(\log_x^4 y + \log_x^{-4} y + 2\right)^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{\frac{1}{2}}}{2\log_x y - 2\log_y x}$, где $1 < y < x$.

№24. Вычислить $\log_x\left(x^8 - 27x^5 + 3\right)$, если $x^{21} - 3x^{13} + 9x^5 - 1 = 0$.

№25. Вычислить $\log_x\left(5x^5 - 125x^2 + 25\right)$, если $x^{12} - 5x^7 + 25x^2 - 5 = 0$.

№26. Вычислить $\log_x (2x-1)$, если $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$.

№27. Вычислить $\log_x\left(4x^7 - 125x^3 + 20\right)$, если $25x^3 - 5x^{10} + x^{17} - 4 = 0$.

№28. Вычислить $\log_{|x|}\left(-6x^3 - 1 + 4x\right)$, если $x^3 + 5x^2 - 5x + 1 = 0$.

№29. Найти знаменатель геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ с положительными членами, если ее члены связаны с членами арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, разность которой $d = \log_8 15$, соотношением $\log_{27} b_n \cdot \log_8 27 - a_n = \log_{30} b_m \log_8 30 - a_m$ для некоторых $m \neq n$.

№30. Найти $\log_2\left(\lg^2 x_{65} - \lg x_1 \lg x_{129}\right) - \log_2\left(\lg^2 x_2 - \lg x_1 \lg x_3\right)$, если $x_1, x_2, x_3, \ldots$ - геометрическая прогрессия.

№31. Для некоторой геометрической прогрессии выполняется соотношение $2\log_{b_1} b_2 = 1 + \log_{b_1} \dfrac{b_4}{5}$.

Найти отношение $\dfrac{b_{11}}{b_8}$.

№32. Сумма членов геометрической прогрессии $x_1, x_2, \ldots, x_{81}$ равна 8. Вычислить $\log_3\left|\log_2(8x_2 - 7)\right| - \log_3\left|\log_2 x_4\right|$, если $x_{53}x_{129} = x_{61}^3$.

№33. Сумма членов геометрической прогрессии $x_1, x_2, \ldots, x_{36}$ равна 11. Вычислить $\log_3\left|\log_2(11x_2 - 10)\right| - \log_3\left|\log_2 x_5\right|$, если $x_{82}x_{184} = x_{89}^3$.

▪ *Ответы (банк заданий)* Преобразование логарифмических выражений. Задания повышенной сложности

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10
18	-50	-45	-1	64	74	1,05	3	1	250
№11	№12	№13	№14	№15	№16	№17	№18	№19	№20
432	16	-5	25	4	-2	2	10	-5	4
№21	№22	№23	№24	№25	№26	№27	№28	№29	№30
1	1024	-0,5	29	17	6	24	4	15	12
№31	№32	№33							
125	3	2							

▪ *Решение (банк заданий)* Преобразование логарифмических выражений. Задания повышенной сложности

№1. $10^{0,5\lg 16}+14\log_3\sqrt{2}\cdot\log_4 81+4^{\log_3 5}-25^{\log_3 2}=18$

1) $10^{0,5\lg 16}=10^{0,5\cdot\log 4^2}=10^{0,5\cdot 2\lg 4}=10^{\lg 4}=4$

2) $14\cdot\log_3\sqrt{2}\cdot\log_4 81=14\cdot\log_3 2^{\frac{1}{2}}\cdot\log_{2^2}3^4=14\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{2}\cdot\log_3 2\cdot\log_2 3=14$

3) $4^{\log_3 5}=5^{\log_3 4}$; 4) $25^{\log_3 2}=5^{2\log_3 2}=5^{\log_3 4}$; 5) $4+14+5^{\log_3 4}-5^{\log_3 4}=18$

№2. $\log^2{}_5 243\cdot\log_3 25-50\log_5 15=-50$

1) $\log_5^2 243=\left(\log_5 243\right)^2=\left(\log_5 3^5\right)^2=\left(5\log_5 3\right)^2=25\cdot\log_5^3 3$

2) $25\cdot\log_5^3 3\cdot\log_3 25=25\cdot\log_5 3\cdot\log_5 3\cdot 2\cdot\log_3 5=50\cdot\log_5 3\cdot\log_5 3\cdot\log_3 5=50\log_5 3$

3) $\log_5 15=\log_5(5\cdot 3)=\log_5 5+\log_5 3=1+\log_5 3$

4) $50\cdot\log_5 3-50(1+\log_5 3)=50\log_5 3-50-50\log_5 3=-50$

№3. $\log^2{}_4 27\cdot\log_3 1024-45\log_4 12=-45$

$\log_4^2 27\cdot\log_3 1024-45\cdot\log_4 12=\left(\log_{2^2}3^3\right)^2\cdot\log_3 2^{10}-45\cdot\log_{2^2}(4\cdot 3)=$

$=\left(\dfrac{3}{2}\log_2 3\right)^2\cdot 10\cdot\log_3 2-\dfrac{45}{2}\cdot\left(\log_2 4+\log_2 3\right)=\dfrac{10\cdot 9}{4}\cdot\log_2 3\cdot\underbrace{\log_2 3\cdot\log_3 2}_{=1}-\dfrac{45}{2}\left(2+\log_2 3\right)=$

$=\dfrac{45}{2}\log_2 3-45-\dfrac{45}{2}\log_2 3=-45$

№4. $\log_3 2-\sqrt{\log_3 2\cdot\left(\log_3 6+\log_2 6\right)}=-1$

1) $\log_3 6+\log_2 6=\log_3(3\cdot 2)+\log_2(3\cdot 2)=\log_3 3+\log_3 2+\log_2 3+\log_2 2=$

$=1+\log_3 2+\log_2 3+1=2+\log_3 2+\log_2 3$

2) $\log_3 2\cdot\left(2+\log_3 2+\log_2 3\right)=2\log_3 2+\log_3^2 2+\log_3 2\cdot\log_2 3=\log_3^2 2+2\cdot\log_3 2+1=$

$=\left(\log_3 2+1\right)^2$

3) $\log_3 2-\sqrt{\left(\log_3 2+1\right)^2}=\log_3 2-\left(\log_3 2+1\right)=-1$

№5. $$\frac{8^{\log_3 13+3}}{8^{\sqrt{\log_3 13(\log_3 39+\log_{13} 39)}}}=64$$

1) $\log_3 39+\log_{13} 39=\log_3 13+\log_3 3+\log_{13} 13+\log_{13} 3=2+\log_3 13+\dfrac{1}{\log_3 13}=$

$=\dfrac{\log_3^2 13+2\log_3 13+1}{\log_3 13}=\dfrac{(\log_3 13+1)^2}{\log_3 13}$; 2) $\dfrac{8^{\log^3 13+3}}{8^{\log_3 13+1}}=8^2=64$

№6. $$\frac{75^{\log_{15} 45}}{3^{\log_{15} 75}}+\frac{0,5\log_5\left(9-\sqrt{82}\right)^2}{\log_5\left(9+\sqrt{82}\right)}=74$$

1) $\dfrac{75^{\log_{15} 45}}{3^{\log_{15} 75}}=\dfrac{75^{\log_{15} 45}}{75^{\log_{15} 3}}=75^{\log_{15} 45-\log_{15} 3}=75^{\log_{15}\frac{45}{3}}=75^{\log_{15} 15}=75$

2) $0,5\cdot\log_5\left(9-\sqrt{82}\right)^2=0,5\cdot 2\log_5\left|9-\sqrt{82}\right|=\log_5\left(\sqrt{82}-9\right)$

3) $\left(9+\sqrt{82}\right)\left(\sqrt{82}-9\right)=1;\quad \sqrt{82}-9=\left(\sqrt{82}+9\right)^{-1}$

4) $\dfrac{\log_5\left(\sqrt{82}-9\right)}{\log_5\left(9+\sqrt{82}\right)}=\dfrac{\log_5\left(\sqrt{82}+9\right)^{-1}}{\log_5\left(\sqrt{82}+9\right)}=-1;$ 5) $75-1=74$

№7. $$\frac{5^{\lg 20}}{20^{\lg 5+1}}+\frac{\lg\left|1-\sqrt{2}\right|}{\lg\left(1+\sqrt{2}\right)^{-1}}=\frac{5^{\lg 10+\lg 2}}{20^{\lg 5+1}}+\log_{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{5\cdot 5^{\lg 2}}{20\cdot 10^{\lg 5}\cdot 2^{\lg 5}}+1=\frac{1}{4}\cdot\frac{5^{\lg 2}}{5\cdot 5^{\lg 2}}+1=\frac{1}{20}+1=1,05$$

№8. $$\frac{\log_{\sqrt{3}} 12-\log_2^{-2}\sqrt{3}+\log_3^2 12+4\log_3 2}{\log_3 12+\log_4^{-1} 3}=3$$

1) $\log_{\sqrt{3}} 12=\log_{3^{\frac{1}{2}}} 12=2\log_3(4\cdot 3)=2(1+\log_3 4)=2+4\log_3 2$

2) $\log_2^{-2}\sqrt{3}=\left(\log_2\sqrt{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{1}{2}\log_2 3\right)^{-2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(\log_3 2)^2=4\log_3^2 2$

3) $\log_3^2 12=(\log_3 12)^2=(1+2\log_3 2)^2=1+4\log_3 2+4\log_3^2 2$

4) $2+4\log_3 2-4\log_3^2 2+1+4\log_3 2+4\log_3^2 2+4\log_3 2=3+12\log_3 2=3(1+4\log_3 2)$

5) $\log_3 12+\log_4^{-1} 3=1+\log_3 4+\log_3 4=1+4\log_3 2;$ 6) $\dfrac{3(1+4\log_3 2)}{1+4\log_3 2}=3$

№9. $$\frac{\frac{1}{4}\log_{\sqrt{7}}^2 14+\log_7 14\cdot\log_2^{-1} 7-8\log_7^2\sqrt{2}}{\log_7 14+2\log_7 2}=1$$

1) $\frac{1}{4}\log^2_{\sqrt{7}}15=\frac{1}{4}\left(\log_{7^{\frac{1}{2}}}14\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_7 2\cdot 7\right)^2=\frac{1}{4}\left(2\cdot(\log_7 2+1)\right)^2=(1+\log_7 2)^2$

2) $\log_7 14\cdot\frac{1}{\log_2 7}=\frac{1+\log_7 2}{\log_2 7}=(1+\log_7 2)\cdot\log_7 2=\log_7 2+\log_7^2 2$

3) $8\cdot\log_7^2\sqrt{2}=8\left(\log_7 2^{\frac{1}{2}}\right)^2=8\left(\frac{1}{2}\log_7 2\right)^2=\frac{8}{4}\log_7^2 2=2\log_7^2 2$

4) $(1+\log_7 2)^2+\log_7 2+\log_7^2 2-2\log_7^2 2=1+2\log_7 2+\log_7^2 2+\log_7 2-\log_7^2 2=$
$=3\log_7 2+1$

5) $\log_7 14+2\log_7 2=1+\log_7 2+2\log_7 2=1=3\log_7 2;$ 6) $\frac{3\log_7 2+1}{3\log_7 2+1}=1$

№10. $7^{\log_7 125}\cdot\log_7 5\cdot\log_5 49+\log_5\left(\sqrt{17}+4\right)+\log_5\left|4-\sqrt{17}\right|=$

$=125\cdot\log_5 7^2\cdot\log_7 5+\log_5\left(\sqrt{17}+4\right)\cdot\left(\sqrt{17}-4\right)=250\cdot\log_5 7\cdot\log_7 5+$

$+\log_5(17-16)=250+0=250$

№11. $11^{\log_{11}216}\cdot\log_{11}6\cdot\log_6 121+\log_6\left(\sqrt{2}+1\right)+\log_6\left|1-\sqrt{2}\right|=$

$=216\cdot 2+\log_6\left(\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\right)=432+0=432$

№12. $12^{\log_{12}8}\cdot\log_{12}2\cdot\log_2 144+\log_2\left(\sqrt{65}+8\right)+\log_2\left|8-\sqrt{65}\right|=$

$==8\cdot\log_{12}144+\log_2\left(\sqrt{65}+8\right)\cdot\left(\sqrt{65}-8\right)=8\cdot 2+\log_2 1=16+0=16$

№13. $4\log_4\sqrt{2}-\log_{\sqrt{6}}125\cdot\log_5 6-\frac{1}{4}\log_5\left(2\sqrt{2}-3\right)^2-\log_5\sqrt{2\sqrt{2}+3}=$

$=4\log_4\sqrt{2}-\log_{\sqrt{6}}125\cdot\log_5 6-\frac{1}{4}\log_5\left(2\sqrt{2}-3\right)^2-\log_5\sqrt{2\sqrt{2}+3}=$

$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{\frac{1}{2}}\cdot\log_6 5\cdot\log_5 6-\frac{1}{2}\log_5\left(3-2\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\log_5\left(3+2\sqrt{2}\right)=$

$=1-6-\frac{1}{2}\log_5\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(2+2\sqrt{2}\right)=-5-\frac{1}{2}\cdot 0=-5$

№14. $\frac{5^{-5\ln\left(21+2\sqrt{110}\right)-18\ln\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)+2}}{5^{8\ln\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)}}=25$

1) $21+2\sqrt{110}=11+10+2\sqrt{11}\cdot\sqrt{10}=\left(\sqrt{11}\right)^2+2\sqrt{11}\cdot\sqrt{10}+\left(\sqrt{10}\right)^2=\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)^2$

2) $\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)=1;\quad \sqrt{11}-\sqrt{10}=\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)^{-1}$

3) $-5\ln\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)^2-18\ln\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)=-10\ln\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)-18\ln\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)^{-1}=$

$=-10\ln\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)+18\ln\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)=8\ln\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)$

4) $\frac{5^{8\ln\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)+2}}{5^{8\ln\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)}}=5^2=25$

№15. $$\frac{2^{-4\ln\left(19+6\sqrt{10}\right)-17\ln\left(\sqrt{10}-3\right)+2}}{2^{9\ln\left(3+\sqrt{10}\right)}}=4$$

1) $19+6\sqrt{10}=10+9+2\cdot3\cdot\sqrt{10}=\left(\sqrt{10}\right)^2+2\cdot3\cdot\sqrt{10}+3^2=\left(\sqrt{10}+3\right)^2$

2) $\left(\sqrt{10}+3\right)\left(\sqrt{10}-3\right)=1;\quad \sqrt{10}-3=\left(\sqrt{10}+3\right)^{-1}$

3) $-4\ln\left(10+6\sqrt{10}\right)-17\ln\left(\sqrt{10}-3\right)=-4\ln\left(\sqrt{10}+3\right)^2=-8\ln\left(\sqrt{10}+3\right)-17\ln\left(\sqrt{10}+3\right)^{-1}=$

$=-8\ln\left(\sqrt{10}+3\right)+17\ln\left(\sqrt{10}+3\right)=9\ln\left(\sqrt{10}+3\right)$

4) $\dfrac{2^{9\ln\left(\sqrt{10}+3\right)+2}}{2^{9\ln\left(\sqrt{10}+3\right)}}=2^2=4$

№16. $\log_2\sqrt{\sin6^\circ}+\log_2\sqrt{\cos12^\circ}+\log_2\sqrt{\cos24^\circ}+\log_2\sqrt{\sin42^\circ}=-2$

$\log_2\sqrt{\sin6^\circ}+\log_2\sqrt{\cos12^\circ}+\log_2\sqrt{\cos24^\circ}+\log_2\sqrt{\sin42^\circ}=\dfrac12\log_2\sin6^\circ\cdot\cos12^\circ\cdot\cos24^\circ\cdot\sin42^\circ=$

$=\dfrac12\log_2\dfrac{2\cdot\sin6^\circ\cdot\cos6^\circ\cdot\cos12^\circ\cdot\cos24^\circ\cdot\cos48^\circ}{2\cdot\cos6^\circ}=\dfrac12\log_2\dfrac{2\cdot\sin12^\circ\cdot\cos12^\circ\cdot\cos24^\circ\cdot\cos48^\circ}{4\cdot\cos6^\circ}=$

$=\dfrac12\log_2\dfrac{2\cos24^\circ\cdot\sin24^\circ\cdot\cos48^\circ}{8\cdot\cos6^\circ}=\dfrac12\log_2\dfrac{2\sin48^\circ\cdot\cos48^\circ}{16\cdot\cos6^\circ}=\dfrac12\log_2\dfrac{\sin96^\circ}{16\cdot\cos6^\circ}=\dfrac12\log_2 2^{-4}=-2$

№17. $\left(\log_4 36+\log_6 16+4\right)\left(\log_4 6-\log_{24}6\right)\log_6 4-\log_4 36=2$

1) $\log_4 36+\log_6 16+4=\log_4 6^2+\log_6 4^2+4=2\log_4 6+2\log_6 4=4=$

$=2\log_4 6+\dfrac{2}{\log_4 6}+4=\dfrac{2\log_4^2 6+4\log_4 6+2}{\log_4 6}=\dfrac{2\left(\log_4^2 6+2\log_4 6+1\right)}{\log_4 6}=\dfrac{2\left(\log_4 6+1\right)^2}{\log_4 6}$

2) $\left(\log_4 6-\log_{24}6\right)\log_6 4=\log_4 6\cdot\log_6 4-\log_{24}6\cdot\log_6 4=1-\log_{24}4=1-\dfrac{1}{\log_4 24}=$

$=1-\dfrac{1}{\log_4\left(4\cdot6\right)}=1-\dfrac{1}{\log_4 4+\log_4 6}=1-\dfrac{1}{1+\log_4 6}=\dfrac{1+\log_4 6-1}{1+\log_4 6}=\dfrac{\log_4 6}{1+\log_4 6}$

3) $\dfrac{2\cdot\left(1+\log_4 6\right)^2}{\log_4 6}\cdot\dfrac{\log_4 6}{1+\log_4 6}=2\left(1+\log_4 6\right)=2+2\log_4 6=2+\log_4 36$

4) $2+\log_4 36-\log_4 36=2$

№18. $\log_2\log_6 256^{\lg81}+\log_2\log_7 36^{\lg4}+\log_2\log_3 49^{\lg16}-3\log_2\lg2=10$

1) $\log_6 256^{\lg81}=\lg81\cdot\log_6 256=\lg3^4\cdot\log_6 2^8=4\cdot8\cdot\lg3\cdot\log_6 2=32\cdot\lg3\cdot\log_6 2$

2) $\log_7 36^{\lg4}=\lg4\cdot\log_7 36=3\lg2\cdot\log_7 6^2=4\lg2\cdot\log_7 6$

3) $\log_3 49^{\lg16}=\lg16\cdot\log_3 49=\lg2^4\cdot\log_3 7^2=4\cdot2\cdot\lg2\cdot\log_3 7=8\cdot\lg2\cdot\log_3 7$

4) $\log_2\left(32\cdot\lg3\cdot\log_6 2\right)+\log_2\left(4\lg2\cdot\log_7 6\right)+\log_2\left(8\cdot\lg2\cdot\log_3 7\right)=$

$=\log_2\left(32\cdot\lg3\cdot\log_6 2\cdot4\cdot\lg2\cdot\log_7 6\cdot8\cdot\lg2\cdot\log_3 7\right)=\log_2\left(2^5\cdot2^2\cdot2^3\cdot\lg3\cdot\log_3 7\cdot\log_7 6\cdot\log_6 2\cdot\lg^2 2\right)=$

$=\log_2\left(2^{10}\cdot\lg2\cdot\lg^2 2\right)=\log_2\left(2^{10}\cdot\lg^3 2\right)=\log_2 2^{10}+\log_2\left(\lg2\right)^3=10+3\log_2\lg2$

5) $10+3\log_2\lg2-3\log_2\lg2=10$

№19. Вычислить $\log_{\frac{1}{4}} z-\log_4\left(z^2+3z+3\right)$, если $z=-1+\sqrt[3]{1025}$.

$$\log_{\frac{1}{4}} z-\log_4\left(z^2+3z+3\right)=-\left(\log_4 z+\log_4\left(z^2+3z+3\right)\right)=-\log_4 z\cdot\left(z^2+3z+3\right)=$$

$$=-\log_4\left(z^3+3z^2+3z+1-1\right)=-\log_4\left(\left(z+1\right)^3-1\right)=-\log_4\left(\left(-1+\sqrt[3]{1025}+1\right)^3-1\right)=-\log_4 1024=$$

$$=-\log_4 2^{10}=-\frac{10}{2}\log_2 2=-5$$

№20. Вычислить $\log_2\log_5^2\left(2a+5\right)+\log_2\log_a^2 25$, если $a=\sqrt{2}-1$.

$$\log_2\log_5^2\left(2a+5\right)+\log_2\log_a^2 25=\log_2\left(\log_5\left(2a+5\right)\cdot\log_a 25\right)^2=\log_2\left(2\cdot\log_a 5\cdot\log_5\left(2a+5\right)\right)^2=$$

$$=\log_2\left(2\cdot\log_a\left(2a+5\right)\right)^2=\log_2\left(2\cdot\log_{\sqrt{2}-1}\left(2\sqrt{2}-2+5\right)\right)^2=\log_2\left(2\cdot\log_{\sqrt{2}-1}\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)^2=$$

$$=\log_2\left(2\cdot\log_{\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}}\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right)^2=\log_2\left(2\cdot(-2)\right)^2=\log_2 2^4=4$$

№21. Вычислить $\log_a\left(2a+1\right)+\log_{a-2} a$, если $a=1+\sqrt{2}$

$$\log_{1+\sqrt{2}}\left(2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)+1\right)+\log_{1+\sqrt{2}-2}\left(1+\sqrt{2}\right)=\log_{\sqrt{2}+1}\left(3+2\sqrt{2}\right)+\log_{\sqrt{2}-1}\left(1+\sqrt{2}\right)=$$

Заметим, что $\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=1,\ \sqrt{2}-1=\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1};\quad \left(3+2\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

$$=\log_{\sqrt{2}+1}\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\log_{\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}}\left(\sqrt{2}+1\right)=2-1=1$$

№22. Вычислить $\log_c^2\left(ab\right)$, если $\log_a b=7$ и $\log_c a=4$.

$$\log_c^2\left(ab\right)=\left(\log_c a+\log_c b\right)^2=\left(4+\frac{\log_a b}{\log_a c}\right)^2=\left(4+7:\frac{1}{4}\right)^2=1024$$

№23. Вычислить $\dfrac{\left(\left(\log_x^4 y+\log_x^{-4} y+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{2\log_x y-2\log_y x}$, где $1<y<x$.

$$\frac{\left(\left(\log_x^4 y+\log_x^{-4} y+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{2\log_x y-2\log_y x}=\frac{\left(\left(\log_x^4 y+\dfrac{1}{\log_x^4 y}+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{2\log_x y-\dfrac{2}{\log_x y}}=$$

$$1<y<x$$

$$\log_x^{-4} y=\left(\log_x y\right)^{-4}=$$

$$=\left(\log_y x\right)^4=\log_y^4 x$$

$$=\frac{\left(\left(\dfrac{\log_x^8 y+2\log_x^4 y+1}{\log_x^4 y}\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{2\cdot\left(\log_x^2 y-1\right)}{\log_x y}}=\left(\frac{\log_x^4 y+1}{\log_x^2 y}-1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\log_x y}{2\left(\log_x^2 y-1\right)}=$$

$$=\left(\frac{\log_x^4 y-2\log_x^2 y+1}{\log_x^2 y}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\log_x y}{2\left(\log_x^2 y-1\right)}=\frac{\left|\log_x^2 y-1\right|}{\left|\log_x y\right|}\cdot\frac{\log_x y}{2\left(\log_x^2 y-1\right)}=-\frac{1}{2}$$

Т.к. $1<y<x$, то $\log_x y-$ возрастающая, $y>1\Rightarrow\log_x y>0$

$\log_x 1<\log_x y<\log_x x;\quad 0<\log_x y<1;\quad 0<\log_x^2 y<1;\quad \left|\log_x^2 y-1\right|=-\left(\log_x^2 y-1\right)$

№24. Вычислить $\log_x\left(x^8-27x^5+3\right)$, если $x^{21}-3x^{13}+9x^5-1=0$.

1) $x^{21}-3x^{13}+9x^5-1=0;\quad 1=x^{21}-3x^3+9x^5;\quad x^{21}=3x^{31}-9x^5+1$

2) $\log_x\left(x^8-27x^5+3\cdot 1\right)=\log_x\left(x^8-27x^5+3\left(x^{21}-3x^{13}+9x^5\right)\right)=$

$=\log_x\left(x^8-27x^5+3x^{21}-9x^{13}+27x^5\right)=\log_x\left(3x^{21}-9x^{13}+x^8\right)=$

$=\log_x x^8\left(3x^{13}-9x^5+1\right)=\log_x x^8\cdot x^{21}=\log_x x^{29}=29$

№25. Вычислить $\log_x\left(5x^5-125x^2+25\right)$, если $x^{12}-5x^7+25x^2-5=0$.

$x^{12}-5x^7+25x^2-5=0;\quad x^{12}-5x^7+25x^2=5;\quad x^{12}-5=5x^7-25x^2;\quad \dfrac{x^{12}-5}{5}=x^7-5x^2$

$\log_x\left(5x^5-125x^2+25\right)=\log_x 5\cdot\left(x^5-25x^2+5\right)=\log_x 5\cdot\left(x^5-25x^2+x^{12}-5x^7+25x^2\right)=$

$=\log_x 5\cdot\left(x^5+x^{12}-5x^7\right)=\log_x 5\cdot x^5\cdot\left(1+x^7-5x^2\right)=\log_x 5x^5\cdot\left(\dfrac{x^{12}-5}{5}+1\right)=\log_x\dfrac{5\cdot x^5\cdot x^{12}}{5}=$

$=\log_x x^{17}=17$

№26. Вычислить $\log_x\left(2x-1\right)$, если $x^5+x^4+x^3+x^2+x=1$.

$x^5+x^4+x^3+x^2+x=1;\quad x^5=1-x^4-x^3-x^2-x$

$\log_x\left(2x-1\right)=\log_x\left(2x-x^5-x^4-x^3-x^2-x\right)=\log_x\left(x-x^5-x^4-x^3-x^2\right)=$

$=\log_x x\cdot\left(1-x^4-x^3-x^2-x\right)=\log_x x\cdot x^5=\log_x x^6=6$

№27. Вычислить $\log_x\left(4x^7-125x^3+20\right)$, если $25x^3-5x^{10}+x^{17}-4=0$.

1) $25x^3-5x^{10}+x^{17}-40=0;\quad 4=25x^3-5x^{10}+x^{17};\ x^{17}=4-25x^3+5x^{10}$

2) $\log_x\left(4x^7-125x^3+5\cdot 4\right)=\log_x\left(4x^7-125x^3+5\cdot\left(25x^3-5x^{10}+x^{17}\right)\right)=$

$=\log_x\left(4x^7-125x^3+125x^3-25x^{10}+5x^{17}\right)=\log_x\left(4x^7-25x^{10}+5x^{17}\right)=$

$=\log_x x^7\left(4-25x^3+5x^{10}\right)=\log_x x^7\cdot x^{17}=\log_x x^{24}=24$

№28. Вычислить $\log_{|x|}\left(-6x^3-1+4x\right)$, если $x^3+5x^2-5x+1=0$.

1) $x^3+5x^2-5x+1=0;\quad 1=-x^3-5x^2+5x;\ x^3=-5x^2+5x-1$

2) $\log_{|x|}\left(-6x^3+4x-1\right)=\log_{|x|}\left(-6x^3+4x-\left(-x^3-5x^2+5x\right)\right)=$

$=\log_{|x|}\left(-6x^3+4x+x^3+5x^2-5x\right)=\log_{|x|}\left(-5x^3-x+5x^2\right)=$

$=\log_{|x|}\cdot x\left(-5x^2+5x-1\right)=\log_{|x|}x\cdot x^3=\log_{|x|}x^4=4\cdot\log_{|x|}|x|=4$

№29. Найти знаменатель геометрической прогрессии $b_1,b_2,b_3,\ldots$ с положительными членами, если ее члены связаны с членами арифметической прогрессии $a_1,a_2,a_3,\ldots$, разность которой $d=\log_8 15$, соотношением $\log_{27} b_n\cdot\log_8 27-a_n=\log_{30} b_m\log_8 30-a_m$ для некоторых $m\neq n$.

$d=\log_8 15,\quad \log_{27} b_n\cdot\log_8 27-a_n=\log_{30} b_m\cdot\log_8 30-a_m;\quad m\neq n$

$$\frac{\log_8 b_n}{\log_8 27}\cdot\log_8 27-\frac{\log_8 b_m}{\log_8 30}\cdot\log_8 30=a_n-a_m$$

$a_n-a_m=d\left(m-n\right)=\left(\log_8 15\right)\cdot\left(n-m\right)$

$$\log_8\frac{b_n}{b_m}=\log_8\frac{b_1q^{n-1}}{b_1q^{m-1}}=\log_8 q^{n-m}=\left(n-m\right)\log_8 q$$

$\left(\log_8 15\right)\left(n-m\right)=\left(n-m\right)\cdot\log_8 q;\quad q=15\quad\left(m\neq n\right)$

№30. Найти $\log_2\left(\lg^2 x_{65}-\lg x_1\lg x_{129}\right)-\log_2\left(\lg^2 x_2-\lg x_1\lg x_3\right)$, если $x_1,x_2,x_3,\ldots$ - геометрическая прогрессия.

1) $\log^2 x_{65}=\left(\lg x_1q^{64}\right)^2=\left(\lg x_1+\lg q^{64}\right)^2=\lg^2 x_1+128\lg x_1\cdot\lg q+64^2\cdot\lg^2 q$

2) $\lg x_1\cdot\lg x_{129}=\lg x_1\cdot\left(\lg x_1+128\lg q\right)=\lg^2 x_1+128\lg x_1\cdot\lg q$

3) $\lg^2 x_{65}-\lg x_1\cdot\lg x_{129}=64^2\cdot\lg^2 q$

4) $\log_2\left(64^2\cdot\lg^2 q\right)=\log_2 2^{12}+\log_2\lg^2 q=12+\log_2\lg^2 q$

5) $\lg^2 x_1q-\lg x_1\cdot\lg xq^2=\left(\lg x_1+\lg q\right)^2-\lg x_1\left(\lg x_1+\lg q^2\right)=$

$=\lg^2 x_1+2\lg x_1\cdot\lg q+\lg^2 q-\lg x_1-2\lg x_2\lg q=\lg^2 q$

6) $12+\log_2\lg^2 q-\log_2\lg^2 q=12$

№31. Для некоторой геометрической прогрессии выполняется соотношение $2\log_{b_1} b_2 = 1 + \log_{b_1}\frac{b_4}{5}$.

Найти отношение $\frac{b_{11}}{b_8}$.

$$2\log_{b_1} b_2 = 1 + \log_{b_1}\frac{b_4}{5}$$

$$b_2 = b_1 q;\ b_4 = b_1 \cdot q^3;\ \frac{b_{11}}{b_8} = \frac{b_1 q^{10}}{b_1 q^7} q^3$$

$$2\log_{b_1} b_1 q = 1 + \log_{b_1}\frac{b_1 \cdot q^3}{5}$$

$$2\left(1 + \log_{b_1} q\right) = 1 + \log_{b_1} b_1 q^3 - \log_{b_1} 5$$

$$2 + 2\log_{b_1} q = 1 + 1 + 3\log_{b_1} q - \log_{b_1} 5$$

$$\log_{b_1} q = \log_{b_1} 5;\ \ q = 5;\ \ q^3 = 5^3 = 125$$

№32. Сумма членов геометрической прогрессии $x_1, x_2, \ldots, x_{81}$ равна 8. Вычислить $\log_3\left|\log_2(8x_2 - 7)\right| - \log_3\left|\log_2 x_4\right|$, если $x_{53}x_{129} = x_{61}^3$.

$$1)\ \ S_{81} = \frac{x_1 q^{81} - x_1}{q - 1} = \frac{x_1\left(q^{81} - 1\right)}{1 - 1}$$

$$\frac{x_1\left(q^{81} - 1\right)}{q - 1} = 8;\ \ x_1 = 1;\ \ q^{81} - 1 = 8(q - 1);\ \ q^{81} = 8q - 7$$

$$2)\ \ x_1 q^{52} \cdot x_1 q^{128} = x_1^3 q^{60\cdot 3};\ \ x_1^2 \cdot q^{180} = x_1^3 = q^{180};\ \ x_1 = 1$$

$$3)\ \ \log_3\frac{\left|\log_2(8x_1 q - 7)\right|}{\left|\log_2 x_1 q^3\right|} = \log_3\frac{\left|\log_3(8q - 7)\right|}{\left|\log_2 q^3\right|} = \log_3\frac{\left|\log_2 q^{81}\right|}{\left|\log_2 q^3\right|} = \log_3\frac{81}{3} = \log_3 27 = 3$$

№33. Сумма членов геометрической прогрессии $x_1, x_2, \ldots, x_{36}$ равна 11. Вычислить $\log_3\left|\log_2(11x_2 - 10)\right| - \log_3\left|\log_2 x_5\right|$, если $x_{82}x_{184} = x_{89}^3$.

$$1)\ S_{36} = 11;\ S_{36} = \frac{x_1 \cdot \left(1 - q^{36}\right)}{1 - q};\ \ \frac{x_1\left(1 - q^{36}\right)}{1 - q} = 11;\ \ \frac{1 - q^{36}}{1 - q} = \frac{11}{x_1}$$

$$2)\ x_{82} \cdot x_{184} = x_{89}^3;\ \ x_1 \cdot q^{81} \cdot x_1 \cdot q^{183} = \left(x_1 q^{88}\right)^3;\ \ x_1^2 \cdot q^{264} = x_1^3 \cdot q^{264};\ \ x_1 = 1$$

$$3)\ \ \frac{1 - q^{36}}{1 - q} = 11;\ 1 - q^{36} = 11 - 11q;\ \ 11q - q^{36} = 10;\ \ 11q - 10 = q^{36}$$

$$4)\ 11x_2 - 10 = 11 \cdot x_1 q - 10 = 11q - 10 = q^{36};\ \ \ \log_2 q^{36} = 36\log_2|q|$$

$$5)\ \ \log_2 x_5 = \log_2 x_1 q^4 = \log_2 q^4 = 4\log_2|q|$$

$$6)\ \ \log_3\left|36\log_2|q|\right| - \log_3\left|4 \cdot \log_2|q|\right| = \log_3\left|\frac{36\log_2|q|}{4\log_2|q|}\right| = \log_3 9 = 2$$

✓ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1. *Логарифм - это показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.*

$$a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b$$

$$b>0,\ a>0,\ a\neq 1$$

2. *Основное логарифмическое тождество:* $a^{\log_a b} = b,\quad b>0$

3. $\log_a a = 1$

4. $\log_a 1 = 0$

5. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y;\ \ x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1$

6. $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|;\ \ x\neq 0,\ y\neq 0,\ xy>0,\ a>0,\ a\neq 1$

7. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;\quad x>0,\ y>0,\ \ a>0,\ a\neq 1$

8. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|;\ \ x\neq 0,\ y\neq 0,\ xy>0\quad a>0,\ a\neq 1$

9. $\log_a \left(x^k\right) = k\log_a x\ ;\ \ x>0,\ \ a>0,\ \ a\neq 1$

10. $\log_a \left(x^{2k}\right) = 2k\log_a |x|;\ \ x\neq 0,\ \ a>0,\ \ a\neq 1$

11. $\log_{a^m} x^n = \dfrac{n}{m}\log_a x;\ \ x>0,\ a>0,\ a\neq 1$

12. *Формула перехода к новому основанию* $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ *или* $\log_c b = \log_c a\cdot\log_a b$

$$a>0,\ b>0,\ c>0\ \ a\neq 1,\ c\neq 1$$

13. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a};\qquad a>0,\ \ b>0,\ \ a\neq 1,\ \ b\neq 1$

14. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}\ ;\qquad a>0,\ b>0,\ c>0,\ b\neq 1$