

Сведение к квадратным неравенствам

■ **Примеры** Решите неравенства:

№1. $3^{8x} - 4 \cdot 3^{4x} < -3$

№2. $2^{-x} \cdot (0,5^x + 2^{x+3} - 6) < 0$

№3. $2^{2x+3} + 2 < 2^{x+4} + 2^x$

№4. $2^{1+x^2} + 2^{1-3x^2} < 5 \cdot 2^{-x^2}$

№5. $6^{\sqrt{x-2}} - 2 < \frac{24}{6^{\sqrt{x-2}}}$

№6. $9^{\sqrt{x^2-1}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-1}-1}$

№7. $2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}$

№8. $(9 \cdot 5^{x^2})^{\frac{1}{x}} - 50 \left(5 \cdot 3^{\frac{1}{x}}\right)^{x-2} \geq 5^x$

№9. $(4^x - 2^{x+2})^2 - 28(4^x - 2^{x+2}) - 128 \geq 0$

№10. $27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $11^{\sqrt{x}} - 10 < \frac{11}{11^{\sqrt{x}}}$

№2. $5^{4x-1} + 1 < 6 \cdot 5^{2x-1}$

№3. $3^{1+3x^2} + 3^{1-x^2} \leq 10 \cdot 3^{x^2}$

№4. $2^{\sqrt{x-1,5}} + 2^{3-\sqrt{x-1,5}} < 6$

№5. $9^{x+\frac{1}{9}} - 4 \cdot 3^{x+\frac{10}{9}} + 27 \geq 0$

№6. $(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62(9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $0,1^{x+1} \cdot (0,1^x + 0,1^{-x-1} - 11) < 0$

№2. $4^x + 85 < 11 \cdot 2^{x+1}$

№3. $3^{2x^2+1} + 3^{4x} < 4 \cdot 3^{x^2+2x}$

№4. $16^{\sqrt{x^2-2}} + 4 > 65 \cdot 4^{\sqrt{x^2-2-1}}$

№5. $81^{\frac{3}{4-x}} - 730 \cdot 9^{-x} + 27 \leq 0$

№6. $9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1. $5^x (5^x + 5^{4-x} - 130) < 0$

№2. $2 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{1-x} < 5$

№3. $3^{-\sqrt{x}} (3^{1-\sqrt{x}} + 6) + 8 \cdot 9^{-\sqrt{x}+0,5} \geq 1$

№4. $(7 \cdot 6^{x^2})^{\frac{1}{x}} - 6 \left(6 \cdot 7^{\frac{1}{x}}\right)^{x-1} \geq 6^{x+1}$

№5. $25^{2-3x} - 7 \cdot 5^{2-3x} + 6 \leq 0$

№6. $4^{x-\frac{1}{2}} - 17 \cdot 2^{x-2} + 2 \leq 0$

Вариант 4

Решите неравенства:

№1. $2 \cdot 16^{-x} - 17 \cdot 4^{-x} + 8 \leq 0$

№2. $6^x \left(\left(\frac{1}{6} \right)^{-x} + 6^{2-x} - 37 \right) \leq 0$

№3. $9^{\frac{3}{2-x}} - 244 \cdot 3^{-x} + 9 \leq 0$

№4. $4^{2x-3} - 4 \cdot 2^{2x-1} + 48 \leq 0$

№5. $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{-x} \leq 16$

№6. $(4^x - 5 \cdot 2^x)^2 - 20(4^x - 5 \cdot 2^x) \leq 96$

Вариант 5

Решите неравенства:

№1. $9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81 \geq 0$

№2. $(0,2)^{\frac{2}{x}} \cdot \left(5^{1-\frac{2}{x}} + 24\right) \geq 5$

№3. $2^x + 3 \cdot 2^{-x} \leq 4$

№4. $4^{x-3} - 71 \cdot 2^{x-6} + 7 \leq 0$

№5. $(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 + 8 \cdot 5^x < 2 \cdot 25^x + 15$

№6. $0,5^{2x+5} - 2 \cdot 0,5^{x+3} - 64 \cdot 0,5^{x+2} + 128 \leq 0$

▪ **Ответы (тест)** **Сведение к квадратным неравенствам**

	Вар. 1	Вар. 2	Вар. 3	Вар. 4	Вар. 5
№1	$[0;1)$	$(-1;0)$	$(1;3)$	$[-1,5;0,5]$	$(-\infty;1]; [3;\infty)$
№2	$(0;0,5)$	$(\log_2 5; \log_2 17)$	$(-\infty; \log_3 4)$	$[0;2]$	$(-\infty;0); [2;\infty)$
№3	$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	$(0;1); (1;2)$	$[0;4]$	$[-2;3]$	$[0; \log_2 3]$
№4	$(2,5;5,5)$	$(-\infty; -\sqrt{6}); (\sqrt{6}; \infty)$	$(0;1)$	$\left[\frac{5}{2}; \frac{5}{2} + \frac{\log_2 3}{2}\right]$	$[\log_2 7; 6]$
№5	$\left(-\infty; \frac{8}{9}\right]; \left[\frac{17}{9}; \infty\right)$	$[-1,5; 1,5]$	$\left[\frac{2 - \log_5 6}{3}; \frac{2}{3}\right]$	$[-1; \log_5 3]$	$(-\infty; 0); (\log_5 3; 1)$
№6	$0; [2; \infty)$	$(-\infty; 1]; 2; [3; \infty)$	$[-1; 3]$	$(-\infty; 0]; [2; 3]$	$[-9; -3]$

1. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$, если $a > 1$, функция возрастающая; знак неравенства сохраняется.
2. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x)$, если $0 < a < 1$, функция убывающая; знак неравенства меняется на противоположный.
3. $a^{f(x)} \vee b$, где $a, b > 0$, $a \neq 1$ неравенство сводится к неравенствам вида (1) или (2) с помощью основного логарифмического тождества $b = a^{\log_a b}$.
4. К неравенствам вида $(a^{f(x)} - a^{g(x)}) \cdot h \vee 0$ применим метод замены множителя:

пусть $a > 1$, тогда множитель $(a^{f(x)} - a^{g(x)})$ можно заменить

множителем $(f(x) - g(x))$ того же знака;

если $0 < a < 1$, то множитель $(a^{f(x)} - a^{g(x)})$ можно заменить

противоположным множителем $(g(x) - f(x))$.

5. Неравенства вида $f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)}$ можно логарифмировать по основанию больше 1

$$\begin{aligned} \lg f(x)^{g(x)} \vee \lg f(x)^{h(x)} \\ g(x) \lg f(x) \vee h(x) \lg f(x) \\ (g(x) - h(x)) \cdot \lg f(x) \vee 0 \end{aligned}$$

✓ Свойства степеней

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$