Тема: Показательные уравнения *Профиль*

$$t^2-4t+1=0$$

$$D/4=4-1=3 \qquad t=2\pm\sqrt{3}$$

Вернёмся к замене:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3} \qquad \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(2+\sqrt{3}\right)^1 \quad \text{или} \quad \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{-1}$$

- Тематические курсы/Уравнения/Показательные/ Методы решения показательных уравнений (продолжение)
- Алгебра 11 / Показательные уравнения
- ЕГЭ Профиль/ *Задание №12* Показательные уравнения

Методы решения показательных уравнений (продолжение)

1. Однородные показательные уравнения 2-й степени

2. Сложные показатели степени

3. Сложные основания степени

4. Отбор корней показательных уравнений
Подготовка к ЕГЭ Задание №12

1. Однородные показательные уравнения 2-й степени

▪ *Примеры*

№1. Решите уравнение $4\cdot 25^{x}-9\cdot 20^{x}+5\cdot 16^{x}=0$

№2. Решите уравнение $2^{x+2}+\sqrt{2^{x+6}\cdot 5^{x}}=9\cdot 5^{x+1}$

№3. а) Решите уравнения $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0$;
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;2]$.

№4. а) Решите уравнения $3\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x}+3\cdot 4^{x+1}=0$;
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;3]$.

▪ *Тест* 1. Однородные показательные уравнения 2-й степени

Вариант 1

№1. Решите уравнение $9\cdot 16^x + 2\cdot 12^x - 32\cdot 9^x = 0$.

№2. Решите уравнение $9\cdot 5^{\frac{2}{\sqrt{x}}} + 2\cdot 15^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 75\cdot 3^{\frac{2}{\sqrt{x}}} = 0$.

№3. Решите уравнения $5^{x\sqrt{12}} - 5\sqrt{3}\cdot 15^{x\sqrt{3}} + 4\cdot 3^{1+x\sqrt{12}} = 0$.

№4. а) Решите уравнения $5\cdot 4^{x^2+4x} + 20\cdot 10^{x^2+4x-1} - 7\cdot 25^{x^2+4x} = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{\frac{2}{3}} 6; \log_{\frac{2}{3}} 1{,}5\right]$.

Вариант 2

№1. Решите уравнение $5\cdot 4^{x^2} + 3\cdot 10^{x^2} - 2\cdot 25^{x^2} = 0$.

№2. Решите уравнение $3^x + \sqrt{3^{x+2}\cdot 7^x} = 3\cdot 7^x + \sqrt{21^x}$.

№3. Решите уравнения $3^{x\sqrt{28}} - 3\sqrt{7}\cdot 21^{x\sqrt{7}} + 2\cdot 7^{1+x\sqrt{28}} = 0$.

№4. а) Решите уравнения $2\cdot 9^{x^2-4x+1} + 42\cdot 6^{x^2-4x} - 15\cdot 4^{x^2-4x+1} = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{1,5} 2; \log_{1,5} 6\right]$.

▪ *Ответы (тест)* 1. Однородные показательные уравнения 2-й степени

	№1	№2	№3	№4
Вар.1	***2***	***0,25***	$\frac{1}{\sqrt{3}}\log_{\frac{5}{3}} 4\sqrt{3}$ ***и*** $\frac{1}{\sqrt{3}}\log_{\frac{5}{3}} \sqrt{3}$	***а) -4 и 0; б) -4***
Вар.2	***-1 и 1***	***0***	$\frac{1}{\sqrt{7}}\log_{\frac{3}{7}} 2\sqrt{7}$ ***и*** $\frac{1}{\sqrt{7}}\log_{\frac{3}{7}} \sqrt{7}$	***а) 0 и 4; б) 4***

2. Сложные показатели степени

▪ *Примеры*

№1. Решите уравнение $3^{\frac{x+2}{4-x}}-7\cdot 3^{\frac{x-1}{4-x}}-6=0$.

№2. Решите уравнение $9\cdot 2^{x^2+6}-2^{2x^2-5x+13}=4\cdot 2^{5x}$.

№3. Решите уравнение $9^{-\frac{x}{6}+0,25}+2\cdot 3^{-\frac{2x}{3}}=3^{0,5-x}$.

№4. Решите уравнение $16^x-4^{x+\sqrt{3}}\left(1+4^{\sqrt{3}}\right)+4^{3\sqrt{3}}=0$.

▪ *Тест* 2. Сложные показатели степени

Вариант 1

№1. Решите уравнение $5^{\frac{x+1}{x-3}}-23\cdot 5^{\frac{x-1}{x-3}}-250=0$.

№2. Решите уравнение $4^x-7\cdot 2^{\frac{x-3}{2}}=2^{-x}$.

№3. Решите уравнения $244\cdot 3^{x^2+3}-3^{2x^2-4x+8}=27\cdot 3^{4x}$.

Вариант 2

№1. Решите уравнение $3^{\frac{2x+1}{2x-1}}-2\cdot 3^{\frac{2x}{2x-1}}-9=0$.

№2. Решите уравнение $2^{\frac{2x+3}{6}}-2^{\frac{-2x+1}{2}}=2^{-\frac{x}{3}}$.

№3. Решите уравнения $25^x-5^{x+2\sqrt{2}}\left(1+5^{\sqrt{2}}\right)+5^{5\sqrt{2}}=0$.

▪ *Ответы (тест)* 2. Сложные показатели степени

	№1	№2	№3
Вар.1	*4*	*1*	*0 и 4*
Вар.2	***1***	***0,75***	$2\sqrt{2}$ ***и*** $3\sqrt{2}$

3. Сложные основания степени

- ***Примеры***

№1. Решите уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$

- ***Тест*** 3. Сложные основания степени

№1. Решите уравнение $4\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-12}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-12}$.

№2. Решите уравнение $\left(\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

№3. Решите уравнения $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{\frac{x}{7}}+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{\frac{x}{7}}=8$.

- ***Ответы (тест)*** 3. Сложные основания степени

№1	№2	№3
14	± 4	± 14

4. Отбор корней показательных уравнений. Подготовка к ЕГЭ Задание №12

Примеры

№1. а) Решите уравнение $\dfrac{6^{8x^2+22x}-4}{6^{4x^2+11x}-2}=218$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 0,05;\log_{80} 3\right]$.

№2. а) Решите уравнение $36^{\sqrt{3x^2+5x+7}-3}=3^{\sqrt{3x^2+5x+7}-3}\cdot 2^{4\sqrt{3x^2+5x+7}-12}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_7\dfrac{1}{36};\log_{216} 7\right]$.

№3. а) Решите уравнение $9^{3x^2+4x}=9^{\frac{11x+3}{x+1}}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[3]{4}+1\right);\dfrac{2\sqrt{30}}{11}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\dfrac{13-9^{-x}}{4-3^{-x}}=12$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2;-\dfrac{3}{2}\right]$.

№5. а) Решите уравнение $5\cdot 8^{2\cdot 3^{|x|}+1}-5\cdot 64^{3^{|x|}+\frac{1}{3}}=9\cdot 8^{2\cdot 3^{|x|}+\frac{1}{3}}+1024$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1;\log_3\dfrac{5}{4}\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\dfrac{243^x-2\cdot 81^x-27}{3^x-3}=27$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right]$.

▪ *Тест* 4. Отбор корней показательных уравнений. Подготовка к ЕГЭ Задание №12

№1. а) Решите уравнение $\dfrac{4^{6x^2-10x-1}-25}{4^{3x^2-5x-0,5}-5}=13$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{63}\dfrac{1}{4};\log_8 63\right]$.

№2. а) Решите уравнение $20^{\sqrt{2x^2-5x+1}-2}=2^{\sqrt{2x^2-5x+1}-2}\cdot 5^{2\sqrt{2x^2-5x+1}-4}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{49}\dfrac{1}{3};\log_3 49\right]$.

№3. а) Решите уравнение $7^{2x^2+x}=49^{\frac{2x+1}{x+1}}$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{0,2}\left(\sqrt{5}+1\right);\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\dfrac{44-4^{-x}}{8-2^{-x}}=7$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\log_4 11;0\right]$.

№5. а) Решите уравнение $3\cdot 5^{3\cdot 2^{-|x|}+2}-8\cdot 125^{2^{-|x|}+\frac{1}{3}}=3\cdot 5^{3\cdot 2^{-|x|}+1}+500$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_2\dfrac{4}{5};1\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\dfrac{16^x-8^{x+\frac{2}{3}}+5}{2^x-3}=5$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{2}{3};1\right]$.

№7. а) Решите уравнение $\dfrac{\left(\sqrt{7}\right)^{2x}+5\cdot 7^{2-x}-54}{2^x-4}=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{2}{3};\log_7 50\right]$.

▪ *Ответы (тест)* 4. Отбор корней показательных уравнений. Подготовка к ЕГЭ Задание №12

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
а) 2 *и* $-\frac{1}{3}$ *б)* $-\frac{1}{3}$	*а)* 3 *и* $-\frac{1}{2}$ *б)* 3	*а)* -2; $-\frac{1}{2}$; 1 *б)* $-\frac{1}{2}$	*а)* -2 *и* $-\log_2 3$ *б)* $-\log_2 3$	*а)* $-\log_2\frac{3}{2}$ *и* $\log_2\frac{3}{2}$ *б)* $\log_2\frac{3}{2}$	*а)* $\frac{1}{3}\log_2 5$ *и* 2 *б)* $\frac{1}{3}\log_2 5$	*а)* $\log_2 5$ *б)* $\log_2\frac{3}{2}$

- *Уравнение вида* $m\cdot a^{2f(x)}+n\cdot a^{f(x)}\cdot b^{f(x)}+k\cdot b^{2f(x)}=0$ *называют* ***однородным показательным уравнением второй степени.***

  Сводим к квадратному уравнению делением на одно из выражений в квадрате: $a^{2f(x)}$ *или* $b^{2f(x)}$, *значения которых положительны при всех допустимых значениях* x.

$$m\cdot a^{2f(x)}+n\cdot a^{f(x)}\cdot b^{f(x)}+k\cdot b^{2f(x)}=0 \quad \Big|\ : b^{2f(x)}>0$$

$$m\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)}+n\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}+k=0$$

Пусть $t=\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$, *тогда уравнение примет вид* $m\cdot t^2+n\cdot t+k=0$

- *Свойства степеней*

$$a^0=1 \qquad a^{-1}=\frac{1}{a} \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m} \qquad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

- *Таблица степеней*

$2^1=2$	$4^1=4$	$3^1=3$	$5^1=5$
$2^2=4$	$4^2=\left(2^2\right)^2=2^4=16$	$3^2=9$	$5^2=25$
$2^3=8$	$4^3=2^6=64$	$3^3=27$	$5^3=125$
$2^4=16$	$4^4=2^8=256$	$3^4=81$	$5^4=625$
$2^5=32$	$4^5=2^{10}=1024$	$3^5=243$	
$2^6=64$		$3^6=729$	$6^1=6$
$2^7=128$	$8^2=\left(2^3\right)^2=2^6=64$		$6^2=36$
$2^8=256$	$8^3=2^9=512$	$9^2=\left(3^2\right)^2=3^4=81$	$6^3=216$
$2^9=512$		$9^3=3^6=729$	
$2^{10}=1024$			$7^1=7$
			$7^2=49$
			$7^3=343$