- 11 класс/Показательные неравенства
- ЕГЭ Профиль/ *Задание №15*

Методы решения показательных неравенств

1. Сведение к одному основанию

2. Группировка, разложение на множители

3. Неравенства, содержащие иррациональное выражение

1. Сведение к одному основанию

- ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $2^{-x} < \sqrt{2}$

№2. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[5]{6}$

№3. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

№4. $3 \cdot 5^{x+1} + 6 \cdot 5^{-(x+1)} < \frac{81}{5^{x+1}}$

№5. $162 \cdot 3^{5-x} - 2 \cdot 3^{x-5} > 0$

№6. $\sqrt[3]{27^{2x-3}} > \sqrt{81^{\frac{6-4x}{x+1}}}$

№7. $7^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-8x+16}} \le 1$

№8. $0,2^{-\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 15^{2x} \cdot 25x^{-2} \ge \frac{25^{-\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 9^x}{5x^2}$

№9. $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}} \ge \frac{2}{3} \cdot 3,5^{x+1-\frac{3}{x+2}}$

№10. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{6-5x}{x}} \le \left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}$

▪ *Тест* 1. Сведение к одному основанию

Вариант 1

Решите неравенства:

№1.	$4^{-\frac{x}{2}}<8$	№2.	$0,8^{\frac{x(x-3)}{2}}>0,64$
№3.	$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$	№4.	$2^{10x^2-x-1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{10x^2}$
№5.	$4\cdot 3^{x+4}+19\cdot 3^{-(x+4)}<\frac{31}{3^{x+4}}$	№6.	$\sqrt[6]{64^{3x-1}}>\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1-3x}{x-1}}}$
№7.	$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}}\ge\frac{2}{3}\cdot 2,5^{x-\frac{3}{x+1}}$	№8.	$\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{10x-12}{x+3}}\le\frac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^x}$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1.	$10^{\frac{2x}{7}}>0,1$	№2.	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-25x^2+20x+10}<\frac{25}{4}$
№3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x-2}{3-3x}}>\frac{9}{4}$	№4.	$(0,4)^{\frac{x+7}{x+3}}>(2,5)^{-x-1}$
№5.	$2\cdot 3^x+\frac{7}{3^x}<61\cdot 3^{-x}$	№6.	$5^{\frac{x^2-7\lvert x\rvert+10}{x^2-6x+9}}\le 1$
№7.	$0,25^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 30^x\cdot x^{-2}\le\frac{16^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 15^x}{8x^2}$	№8.	$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\frac{6-x}{x}}\le\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-x}$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1.	$4^{\frac{3x}{5}}<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	№2.	$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$
№3.	$\sqrt{3}\cdot 4^x\le\sqrt{2}\cdot 9^x$	№4.	$27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x^2+6x}<8$
№5.	$54\cdot 3^{3-x}-2\cdot 3^{x-3}>0$	№6.	$0,25^{-\frac{3x-2}{x+2}}\cdot 14^x\cdot x^{-2}\le\frac{2^{-\frac{3x-2}{x+2}}\cdot 112^x}{4x^2}$
№7.	$\sqrt{625^{\frac{4-2x}{x-1}}}>\sqrt[3]{125^{2x+1}}$	№8.	$4\left(\sqrt{5}+1\right)^{\frac{6x-3}{x-2}}\ge\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^{2x+1}}{16^x}$

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

Вариант 4

Решите неравенства:

№1. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{5}} > 3$

№2. $0,2^{\frac{3x-3}{x-2}} > \frac{1}{5}$

№3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^3+5}{x+5}} < 0,5$

№4. $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} < \frac{2}{3}$

№5. $7 \cdot 2^{x+4} - 448 \cdot 2^{-x-4} < 0$

№6. $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$

- ***Ответы (тест)*** 1. Сведение к одному основанию

	Вар.1	Вар.2	Вар.3	Вар.4
№1	$x > -3$	$x > -3,5$	$x < -\frac{5}{9}$	$x < -2,5$
№2	$-1 < x < 4$	$-0,4 < x < 1,2$	$0 < x < 0,5$	$0,5 < x < 2$
№3	$1 < x < 4$	$0,8 < x < 1$	$x \ge \frac{1}{4}$	$(-\infty;-5) \cup (-1;0) \cup (1;\infty)$
№4	$-\frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{4}$	$(-4;-3) \cup (1;\infty)$	$-1 < x < 7$	$x < 2$
№5	$x < -3,5$	$x < 1,5$	$x < 4,5$	$x < -1$
№6	$\left(\frac{1}{3};1\right) \cup (3;\infty)$	$[-5;-2] \cup [2;3) \cup (3;5]$	$(-2;0) \cup \left(0;\frac{2}{3}\right] \cup [1;\infty)$	$(-1;2] \cup [3;\infty)$
№7	$(-\infty;-2] \cup (-1;2]$	$(-\infty;-4];[-3;0);(0;2)$	$(-\infty;-3);\left(1;\frac{3}{2}\right)$	
№8	$(-3;3] \cup [4;\infty)$	$(-\infty;-3] \cup (0;2]$	$[-2,5;1] \cup (2;\infty)$	

2. Группировка, разложение на множители

- ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $2^{2x}+2^{2x-1}>\sqrt{3}\cdot 3^{x}+3^{x-0,5}$

№2. $-3\cdot 2^{x+3}+2^{x+4}-2^{x+5}>5^{x+2}-5^{x+3}$

№3. $x^{2}\cdot 4^{x}+36>4x^{2}+9\cdot 4^{x}$

№4. $48^{x}-\sqrt{6}\cdot 2^{3x}-\sqrt{8}\cdot 6^{x}+\sqrt{48}\le 0$

№5. $5^{(x+1)^{2}}+625\le 5^{x^{2}+2}+5^{2x+3}$

№6. $4^{x-3}-2^{x-3}\left(16-x^{2}\right)-16x^{2}\ge 0$

№7. $3^{x+3}+3^{x+2}-3^{x}<2^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}-1}+2^{\frac{x}{2}-2}$

№8. $12^{x}-729\cdot 4^{x}+364,5<\dfrac{3^{x}}{2}$

№9. $4^{\frac{2x+2}{x}}-\dfrac{4}{3}\cdot 12^{\frac{x+1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x}}\ge 0$

№10. $2^{-2\sqrt{x}}+32\cdot 10^{2-\sqrt{x}}>2^{9-2\sqrt{x}}+625\cdot 10^{-2-\sqrt{x}}$

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $2\cdot 3^{x+1}-9\cdot 2^{x+1}>9\cdot 2^{x}-2\cdot 3^{x}$

№2. $15^{x}-9\cdot 5^{x}-3^{x}+9\le 0$

№3. $x^{2}\cdot 3^{x}+4>x^{2}+4\cdot 3^{x}$

№4. $9^{x-4}-3^{x-4}\left(9-x^{2}\right)-9x^{2}\ge 0$

№5. $3^{(x+2)^{2}}+1\ge 3^{x^{2}-1}+3\cdot 81^{x+1}$

№6. $5^{x+2}-5^{x+1}-15\cdot 5^{x}<3^{\frac{x}{2}+1}-3^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{x}{2}-1}$

№7. $3^{2\sqrt{x}-10}+6561\cdot 12^{\sqrt{x}-4}<3^{2\sqrt{x}}+16\cdot 12^{\sqrt{x}-6}$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $2^{2x}-15\cdot 11^{x}<11^{x}-15\cdot 2^{2x+3}$

№2. $10\cdot 3^{x+2}-4\cdot 10^{x+2}<3^{x+4}-3\cdot 10^{x+2}$

№3. $5+2\cdot 10^{x}-10\cdot 2^{x}-5^{x}\ge 0$

№4. $3^{\frac{x+2}{x}}+3^{\frac{1}{x}+2}-3^{\frac{1}{x}}\ge 3$

№5. $3^{x+3}-x^{3}\cdot 3^{x}\le 81-3x^{3}$

№6. $7^{x+2}-7^{x+1}-2\cdot 7^{x}>2^{\frac{x}{3}+1}+2^{\frac{x}{3}-1}$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1. $6\cdot 5^{x}-6^{x}<4\cdot 6^{x+1}-6\cdot 5^{x+1}$

№2. $-4\cdot 3^{x}+3^{x+1}-3^{x+2}<10^{x-1}-10^{x}$

№3. $4^{x+3}-x^{3}\cdot 4^{x}\le 256-4x^{3}$

№4. $5^{2x+4}-25\cdot 5^{x+4}-5^{x}+25\le 0$

№5. $250^{x}-5\cdot 2^{x}+1{,}25<\dfrac{5^{3x}}{4}$

№6. $5^{x+3}-5^{x+2}-5^{x}<6^{\frac{x}{2}+3}-6^{\frac{x}{2}+2}+3\cdot 6^{\frac{x}{2}+1}$

- ***Ответы (тест)*** 2. Группировка, разложение на множители

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
Вар.1	$x>3$	$[0;2]$	$(-2;0)$; $(2;\infty)$	$[6;\infty)$	$\left[-\frac{5}{4};-1\right]$; $[1;\infty)$	$x<-\frac{\lg 3}{\lg 5-\lg\sqrt{3}}$	$[0;\ 16)$
Вар.2	$x>2$	$(-2;\infty)$	$(-\infty;-1]$; $[1;\infty)$	$(-\infty;-1]$; $(0;\infty)$	$(-\infty;1]$; $[3;\infty)$	$x>-\frac{\lg 16}{\lg 7-\lg\sqrt[3]{2}}$	
Вар.3	$x>2$	$(-\infty;2)$	$(-\infty;1]$; $[4;\infty)$	$[-4;2]$	$\left(-2;\frac{1}{3}\right)$	$x<\log_{\frac{25}{6}}4$	

3. Неравенства, содержащие иррациональное выражение

- ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $\dfrac{6^{\sqrt{x}}}{x+1} > 6^{\sqrt{x}-1}$

№2. $x^2 \cdot 27^{\sqrt{x}} \le 3^{3\left(\sqrt{x}+\frac{2}{3}\right)}$

№3. $2x^2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 4 < x^2 + 8 \cdot 2^{\sqrt{x}}$

№4. $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$

№5. $\dfrac{10^x - 2 \cdot 5^x - 25 \cdot 2^x + 50}{\sqrt{x+3}} \ge 0$

№6. $\dfrac{\sqrt{4-x}}{2^{x^2-5} - 17 \cdot 2^{0,5x^2-4,5} + 1} \le 0$

▪ *Тест* 3. Неравенства, содержащие иррациональное выражение

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $0,3^{3\sqrt{4-x}} \geq 0,3^{5-2\sqrt{4-x}}$

№2. $\dfrac{3^{\sqrt{x}+1}}{x} > 3^{\sqrt{x}-1}$

№3. $0,125^{\sqrt{x}} \geq \dfrac{x^2}{8^{\sqrt{x}}}$

№4. $5^{\sqrt{x}} + (0,2)^{-\sqrt{x}-2} - 5^{2\sqrt{x}+1} \geq 5$

№5. $\dfrac{2\cdot 14^x - 14\cdot 2^x - 7^x + 7}{\sqrt{x+5}} \geq 0$

№6. $\dfrac{\sqrt{x+5}}{2^{x^2-6} - 9\cdot 2^{0,5x^2-4,5} + 1} \geq 0$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $\dfrac{2^{\sqrt{x-1}}}{4x} > 2^{\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{1}{8}$

№2. $\dfrac{10^{\sqrt{x-1}+2}}{x+1} > 10^{\sqrt{x-1}+1}$

№3. $\dfrac{x^2}{4^{\sqrt{x}}} \leq 2^{2(2-\sqrt{x})}$

№4. $\dfrac{x^2 - x}{2^{\sqrt{x}}} < 0,5^{\sqrt{x}-1}$

№5. $3^{2\sqrt{x}} + 3^{2\sqrt{x}-1} - 3^{2\sqrt{x}-2} \leq 11$

▪ *Ответы (тест)* 3. Неравенства, содержащие иррациональное выражение

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	$3 \leq x \leq 4$	$x \in (0;9)$	$0 \leq x \leq 1$	$x \in [0;1]$	$(-5;-1];[1;\infty)$	$[-5;-3)$; $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(3;\infty)$
Вар.2	$x \in [1;2)$	$1 \leq x < 9$	$0 \leq x \leq 4$	$0 \leq x < 2$	$0 \leq x \leq 1$	

1. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$, *если* $a > 1$, *функция возрастающая; знак неравенства сохраняется.*

2. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x)$, *если* $0 < a < 1$, *функция убывающая; знак неравенства меняется на противоположный.*

3. $a^{f(x)} \vee b$, *где* $a, b > 0,\ a \neq 1$ *неравенство сводится к неравенствам вида (1) или (2) с помощью основного логарифмического тождества* $b = a^{\log_a b}$.

4. *К неравенствам вида* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right) \cdot h \vee 0$ *применим метод замены множителя:*

   пусть $a > 1$, *тогда множитель* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right)$ *можно заменить множителем* $\left(f(x) - g(x)\right)$ *того же знака;*

   если $0 < a < 1$, *то множитель* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right)$ *можно заменить противоположным множителем* $\left(g(x) - f(x)\right)$.

5. *Неравенства вида* $f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)}$ *можно логарифмировать по основанию больше 1*

$$\lg f(x)^{g(x)} \vee \lg f(x)^{h(x)}$$
$$g(x)\lg f(x) \vee h(x)\lg f(x)$$
$$\left(g(x) - h(x)\right) \cdot \lg f(x) \vee 0$$

✓ *Свойства степеней*

$a^0 = 1$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$