Тема: Рациональные уравнения

Профиль

1. Модуль в целых уравнений

2. Методы решения целых уравнений с модулем

3. Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

4. Модуль в дробно-рациональных уравнениях

Содержание сборника:

1. Модуль в целых уравнениях

▪ ***Примеры*** Решите уравнения:

№1

$$|2x+3|=5$$

№2

$$|2x+3|=0$$

№3

$$|2x+3|=-7$$

№4

$$|2x+3|=4x+1$$

№5

$$\left|\sqrt{\left(\sqrt{(x-3)^2}-7\right)^2}+5\right|=6$$

№6

$$2x+3+|x^2+x-3|=0$$

№7

$$\big|3x-9+|2-x|\big|=5$$

▪ ***Решение (примеры)*** 1. Модуль в целых уравнениях

№1.

$$|2x+3|=5$$

$$\left[\begin{array}{l}2x+3=5\\2x+3=-5\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x=2\\2x=-8\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4\end{array}\right.$$

Ответ: -4 и 1.

№2.

$$|2x+3|=0$$

$$2x+3=0$$

$$x=-1{,}5$$

Ответ: -1,5.

№3.

$$|2x+3|=-7$$

Т.к. $-7<0$, а $|2x+3|\ge 0$, то

$$x\in\varnothing$$

Ответ: нет решений.

№4.

$$|2x+3|=4x+1$$

$$\begin{cases}4x+1\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}2x+3=4x+1\\2x+3=-4x-1\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -0{,}25\\ \left[\begin{array}{l}-2x=-2\\6x=-4\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -0{,}25\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Ответ: 1.

№5.

$$\left|\sqrt{\left(\sqrt{(x-3)^2}-7\right)^2}+5\right|=6$$

$$\left|\left||x-3|-7\right|+5\right|=6$$

$$\left[\begin{array}{l}\left||x-3|-7\right|+5=6\\ \left||x-3|-7\right|+5=-6\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left||x-3|-7\right|=1\\ \left||x-3|-7\right|=-11,\ \varnothing\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}|x-3|-7=1\\ |x-3|-7=-1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}|x-3|=8\\ |x-3|=6\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x-3=8\\ x-3=-8\\ x-3=6\\ x-3=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=11\\ x=-5\\ x=9\\ x=-3\end{array}\right.$$

Ответ: -5; -3; 9 и 11.

№6.

$$2x+3+|x^2+x-3|=0$$

$$|x^2+x-3|=-2x-3$$

$$\left\{\begin{array}{l}-2x-3\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2+x-3=-2x-3\\ x^2+x-3=2x+3\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x\le -1{,}5\\ \left[\begin{array}{l}x^2+3x=0\\ x^2-x-6=0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x\le -1{,}5\\ \left[\begin{array}{l}x=0,\ x=-3\\ x=3,\ x=-2\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\underline{x=\{-3;-2\}}$$

Ответ: $\{-3;-2\}$.

№7.

$$\left|3x-9+|2-x|\right|=5$$

$$\left[\begin{array}{l}3x-9+|2-x|=5\\ 3x-9+|2-x|=-5\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}|x-2|=14-3x\\ |x-2|=4-3x\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x-2\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x-2=14-3x\\ x-2=4-3x\end{array}\right.\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}x-2<0\\ \left[\begin{array}{l}x-2=3x-14\\ x-2=3x-4\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x<2\\ \left[\begin{array}{l}x=6\\ x=1\end{array}\right.\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}x\ge 2\\ \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=1{,}5\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\underline{x=1}\qquad\qquad \underline{x=4}$$

Ответ:1 и 4 .

- ***Тест*** 1. Модуль в целых уравнениях

Вариант 1

Решите уравнения:

№1.	$\lvert 5x+3\rvert=2$	№2.	$4x+11-\lvert 2x+5\rvert=4$
№3.	$\lvert\lvert\lvert x-1\rvert+2\rvert-3\rvert=1$	№4.	$\lvert x^2-7x+12\rvert=x-4$
№5.	$\lvert\lvert x-1\rvert-3x\rvert=5$		

Вариант 2

Решите уравнения:

№1.	$\lvert 4x-3\rvert=5$	№2.	$\lvert 8x+1\rvert-4x-1=4$
№3.	$\left\lvert\sqrt{\left(\sqrt{(x+1)^2}-2\right)^2}+3\right\rvert=4$	№4.	$3x+4+\lvert x^2+5x-4\rvert=0$
№5.	$\lvert 2x-\lvert x+2\rvert\rvert=4$		

▪ *Ответы (тест)* 1. Модуль в целых уравнениях

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	*-1 и -0,2*	*-1*	*-1; 1 и 3*	*4*	*-1 и 2*
Вар.2	*-0,5 и 2*	*-0,5 и 1*	*-4; -2; 0 и 2*	*-8 и -4*	*-2 и 6*

▪ *Решение (тест)* 1. Модуль в целых уравнениях

Вариант 1

№1.

$$|5x+3|=2$$

$$\left[\begin{array}{l}5x+3=2\\5x+3=-2\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}5x=-1\\5x=-5\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{5}\\x=-1\end{array}\right.$$

Ответ: -1 и -0,2.

№2.

$$4x+11-|2x+5|=4$$

$$4x+11-4=|2x+5|$$

$$|2x+5|=4x+7$$

$$\begin{cases}4x+7\ge 0\\\left[\begin{array}{l}2x+5=4x+7\\2x+5=-4x-7\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -\dfrac{7}{4}\\\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$$

Ответ: -1.

№3.

$$\big||x-1|+2|-3\big|=1$$

$$\left[\begin{array}{l}\big||x-1|+2\big|-3=1\\\big||x-1|+2\big|-3=-1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\big||x-1|+2\big|=4\\\big||x-1|+2\big|=2\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}|x-1|+2=4\\|x-1|+2=2\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}|x-1|=2\\|x-1|=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=2\\x-1=-2\\x-1=0\end{array}\right.$$

$$x=3,\quad x=-1,\quad x=1$$

Ответ: -1; 1 и 3.

№4.

$$|x^2-7x+12|=x-4$$

$$\begin{cases}x-4\ge 0\\\left[\begin{array}{l}x^2-7x+12=x-4\\x^2-7x+12=4-x\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge 4\\\left[\begin{array}{l}(x-4)^2=0\\x=4\\x=2\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge 4\\\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=4$$

Ответ: 4.

№5.

$$\big||x-1|-3x\big|=5$$

$$\left[\begin{array}{l}|x-1|-3x=5\\|x-1|-3x=-5\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}|x-1|=5+3x\\|x-1|=3x-5\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x-1\ge 0\\\left[\begin{array}{l}x-1=5+3x\\x-1=3x-5\end{array}\right.\end{cases}\qquad\begin{cases}x-1\le 0\\\left[\begin{array}{l}x-1=-5-3x\\x-1=-3x+5\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge 1\\\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=2\end{array}\right.\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x\le 1\\\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$x=2\qquad\qquad x=-1$$

Ответ: -1 и 2.

Вариант 2

№1.

$$|4x-3|=5$$

$$\left[\begin{array}{l}4x-3=5\\4x-3=-5\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}4x=8\\4x=-2\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-0{,}5\end{array}\right.$$

Ответ: -0,5 и 2.

№2.

$$|8x+1|-4x-1=4$$

$$|8x+1|=4x+5$$

$$\begin{cases}4x+5\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}8x+1=4x+5\\8x+1=-4x-5\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -\dfrac{5}{4}\\ \left[\begin{array}{l}4x=4\\12x=-6\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -\dfrac{5}{4}\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: -0,5 и 1.

№3.

$$\left|\sqrt{\left(\sqrt{(x+1)^2}-2\right)^2}+3\right|=4$$

$$\big||x+1|-2\big|+3\big|=4$$

$$\big||x+1|-2\big|+3=4$$

$$\big||x+1|-2\big|=1$$

$$\left[\begin{array}{l}|x+1|-2=1\\|x+1|-2=-1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}|x+1|=3\\|x+1|=1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x+1=3\\x+1=-3\\x+1=1\\x+1=-1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-4\\x=0\\x=-2\end{array}\right.$$

Ответ: -4; -2; 0 и 2.

№4.

$$3x+4+|x^2+5x-4|=0$$

$$|x^2+5x-4|=-3x-4$$

$$\begin{cases}-3x-4\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2+5x-4=-3x-4\\x^2+5x-4=3x+4\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\le -\dfrac{4}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x(x+8)=0\\x=-4\\x=2\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\le -\dfrac{4}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-8\\x=-4\\x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-8\\x=-4\end{array}\right.$$

Ответ: -8 и -4.

№5.

$$\big|2x-|x+2|\big|=4$$

$$\left[\begin{array}{l}2x-|x+2|=4\\2x-|x+2|=-4\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}|x+2|=2x-4\\|x+2|=2x+4\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x+2\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x+2=2x-4\\x+2=2x+4\end{array}\right.\end{cases} \qquad \begin{cases}x+2\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x+2=-2x+4\\x+2=-2x-4\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -2\\ \left[\begin{array}{l}x=6\\x=-2\end{array}\right.\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x\le -2\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\x=-2\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=6\end{array}\right. \qquad x=-2$$

Ответ: -2 и 6.

2. Методы решения целых уравнений с модулем

▪ ***Примеры*** Решите уравнения:

№1. $x^2-3\sqrt{x^2}+2=0$.

№2. $x^2+6x-4|x+3|-12=0$.

№3. $|3x^2+5x-9|=|6x+15|$.

№4. $|x^4+6x^3+5x^2|=-x^4-6x^3-5x^2$.

№5. $|x^4-4x^3-5x^2|=45+36x-9x^2$.

▪ ***Решение (примеры)*** 2. Методы решения целых уравнений с модулем

№1.

$$x^2-3\sqrt{x^2}+2=0$$

$$x^2-3|x|+2=0$$

$$t=|x|,\quad t^2=x^2$$

$$t^2-3t+2=0$$

$$t_1+t_2=3\quad t_1=1$$
$$t_1+t_2=2\quad t_2=2$$

$$t\ge 0\Rightarrow t=1,\quad t=2$$

$$|x|=1\quad |x|=2$$

$$x=\pm1\quad x=\pm2$$

Ответ: $\pm1;\ \pm2$.

№2.

$$x^2+6x-4|x+3|-12=0$$

$$x^2+6x-4|x+3|-12=0$$

$$x^2+6x+9-4|x+3|-9-12=0$$

$$(x+3)^2-4|x+3|-21=0$$

$$t=|x+3|,\quad t^2=|x+3|^2=(x+3)^2$$

$$t^2-4t-21=0$$

$$t_1+t_2=4\qquad t_1=7$$
$$t_1\cdot t_2=-21\quad t_2=-3$$
$$t\ge0\Rightarrow t=7$$

$$|x+3|=7$$

$$\left[\begin{array}{l}x+3=7\\ x+3=-7\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-10\end{array}\right.$$

Ответ:-10 и 4.

№3.

$$|3x^2+5x-9|=|6x+15|$$

$$\left[\begin{array}{l}3x^2+5x-9=6x+15\\3x^2+5x-9=-6x-15\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}3x^2-x-24=0\\3x^2+11x+6=0\end{array}\right.$$

$$\underline{x=\left\{-3;-\frac{8}{3};-\frac{2}{3};3\right\}}$$

Ответ: $-3;-\frac{8}{3};-\frac{2}{3};3$

№4.

$$|x^4+6x^3+5x^2|=-x^4-6x^3-5x^2$$

1) $-x^4-6x^3-5x^2\ge 0 \,|\cdot(-1)$

$x^4+6x^3+5x^2\le 0$

$x^2\left(x^2+6x+5\right)\le 0$

$x^2(x+1)(x+5)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\(x+1)(x+5)\le 0\end{array}\right.$

$x\in[-5;-1]\cup\{0\}$

2) $|x^4+6x^3+5x^2|=-x^2\left(x^2+6x+5\right)$

$x^2|x^2+6x+5|=-x^2\left(x^2+6x+5\right)$

$\underline{x=0}$ является корнем уравнения

Т.к. $x^2+6x+5\le 0$, то

$|x^2+6x+5|=-\left(x^2+6x+5\right)$

$-\left(x^2+6x+5\right)=-\left(x^2+6x+5\right)$

$\underline{x\in R}$

3) $\left\{\begin{array}{l}x\in[-5;-1]\cup\{0\}\\x\in R\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-5;-1]\cup\{0\}$

Ответ: $[-5;-1]\cup\{0\}$.

№5.

$$|x^4-4x^3-5x^2|=45+36x-9x^2$$

1) $45+36x-9x^2\ge 0$

$x^2-4x-5\le 0$

$(x+1)(x-5)\le 0$

$-1\le x\le 5$

2) $x^2|x^2-4x-5|=-9\left(x^2-4x-5\right)$

Т.к. $x^2-4x-5\le 0$, то

$|x^2-4x-5|=-\left(x^2-4x-5\right)$

$-x^2\left(x^2-4x-5\right)+9\left(x^2-4x-5\right)=0$

$\left(x^2-4x-5\right)\left(x^2-9\right)=0$

$x_1=-1\quad x_2=5\quad x_3=3\quad x_4=-3$

С учетом, что $-1\le x\le 5$, получим

$\underline{x=-1}\quad \underline{x=3}\quad \underline{x=5}$

Ответ:-1; 3 и 5.

▪ ***Тест*** 2. Методы решения целых уравнений с модулем

Вариант 1

Решите уравнения:

№1.	$x^2+\lvert x\rvert-2=0$	№2.	$x^2+\sqrt{x^2}-12=0$
№3.	$2(x-3)^2-5\lvert x-3\rvert+2=0$	№4.	$\lvert x^4-5x^3+4x^2\rvert=20x-4x^2-16$
№5.	$\lvert x^4-9x^3+14x^2\rvert=9x^2-14x^2-x^4$	№6.	$\lvert x^2-5x+4\rvert=\lvert x^2-4\rvert$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1.	$x^2+\sqrt{x^2}-30=0$	№2.	$5(2x-1)^2-7\lvert 2x-1\rvert-6=0$
№3.	$x^2-4x-2\lvert x-2\rvert+1=0$	№4.	$\lvert x^4-6x^3+8x^2\rvert=54x-9x^2-72$
№5.	$\lvert x^4-7x^3+6x^2\rvert=7x^3-6x^2-x^4$	№6.	$\lvert x^2-8x+5\rvert=\lvert x^2-5\rvert$

▪ *Ответы (тест)* 2. Методы решения целых уравнений с модулем

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	±1	±3	*5; 1; 2,5 и 3,5*	*1; 2 и 4*	$\{0\}\cup[2;7]$	*0; 1,6 и 2,5*
Вар.2	±5	*-0,5 и 1,5*	*-1 и 5*	*2; 3 и 4*	$\{0\}\cup[1;6]$	*0; 1,25 и 4*

▪ *Решение (тест)* 2. Методы решения целых уравнений с модулем

Вариант 1

№1.

$$x^2+|x|-2=0$$

$t=|x|,\ \ t^2=|x|^2=x^2$

$t^2+t-2=0$

$t_1+t_2=-1 \quad t_1=-2$

$t_1\cdot t=-2 \quad t_2=1$

$t\ge0 \Leftrightarrow t=1$

$|x|=1 \Leftrightarrow x=\pm1$

Ответ: ±1.

№2.

$$x^2+\sqrt{x^2}-12=0$$

$x^2+|x|-12=0$

$|x|=t, t\ge0$

$x^2=|x|^2=t^2$

$t^2+t-12=0$

$t_1+t_2=-1$

$t_1\cdot t_2=-12$

$t_1=3 \quad t_2=-4$ (не подходит, т.к. $t\ge0$)

$|x|=3 \Leftrightarrow x=\pm3$

Ответ: ±3.

№3.

$$2(x-3)^2-5|x-3|+2=0$$

$|x-3|=t,\ \ t\ge0$

$|x-3|^2=(x-3)^2=t^2$

$2t^2-5t+2=0,\ \ t_1=2 \quad t_2=\frac{1}{2}$

$|x-3|=2$

$\left[\begin{array}{l} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.$

или

$|x-3|=\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x-3=\frac{1}{2} \\ x-3=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=3,5 \\ x=2,5 \end{array}\right.$

Ответ: $5;\ 1;\ 3,5;\ 2,5$.

№4.

$$\left|x^4-5x^3+4x^2\right|=20x-4x^2-16$$

1) $20x-4x^2-16\geq 0\,\Big|:(-4)$

$x^2-5x+4\leq 0$

$(x-1)(x-4)\leq 0$

$1\leq x\leq 4$

2) $x^2\left|x^2-5x+4\right|=-4\left(x^2-5x+4\right)$

Т.к. $x^2-5x+4\leq 0,$ то $\left|x^2-5x+4\right|=-\left(x^2-5x+4\right)$

$-x^2\left(x^2-5x+4\right)=-4\left(x^2-5x+4\right)$

$x^2\left(x^2-5x+4\right)-4\left(x^2-5x+4\right)=0$

$\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-4\right)=0$

$x_1=1\quad x_2=4\quad x_3=2\quad x_4=2$

С учетом, что $1\leq x\leq 4,$ получим

$x=1\quad x=4\quad x=2$

***Ответ:* 1; 2; 4.**

№5.

$$\left|x^4-9x^3+14x^2\right|=9x^3-14x^2-x^4$$

1) $9x^3-14x^2-x^4\geq 0$

$x^2\left(x^2-9x+14\right)\leq 0$

$x^2(x-2)(x-7)\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\(x-2)(x-7)\leq 0\end{array}\right.$

$x\in\{0\}\cup[2;7]$

2) $x^2\left|x^2-9x+14\right|=-x^2\left(x^2-9x+14\right)$

$x=0$ является корнем уравнения

$\left|x^2-9x+14\right|=-\left(x^2-9x+14\right)$

Т.к. $x^2-9x+14\leq 0,$ то $\left|x-9x+14\right|=-\left(x^2-9x+14\right)$

Получим уравнение

$-\left(x^2-9x+14\right)=-\left(x^2-9x+14\right),\quad x\in R$

С учетом (1), имеем $x\in\{0\}\cup[2;7]$

Ответ: $\{0\}\cup[2;7]$

№6.

$$\left|x^2-5x+4\right|=\left|x^2-4\right|$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2-5x+4=x^2-4\\x^2-5x+4=-x^2+4\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}-5x=-8\\2x^2-5x=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=1,6\\x=0\\x=2,5\end{array}\right.$$

***Ответ:* 0; 1,6; 2,5.**

Вариант 2

№1.

$$x^2+\sqrt{x^2}-30=0$$

$x^2+|x|-30=0$

$t=|x|,\ t\ge 0$

$t^2=|x|^2=x^2$

$t^2+t-30=0$

$t_1+t_2=-1 \quad t_1=-6$

$t_1\cdot t_2=-30 \quad t_2=5$

$|x|=-6,\ \varnothing$

$|x|=5 \Leftrightarrow x=\pm 5$

Ответ: ± 5.

№2.

$$5(2x-1)^2-7|2x-1|-6=0$$

$|2x-1|=t, t\ge 0$

$t^2=|2x-1|^2=(2x-1)^2$

$5t^2-7t-6=0$

$t=2$ или $\quad t=-0,6$

$|2x-1|=2 \quad |2x-1|=-0,6$

$\left[\begin{array}{l}2x-1=2\\2x-1=-2\end{array}\right. \quad \varnothing$

$\left[\begin{array}{l}2x=3\\2x=-1\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=1,5\\x=-0,5\end{array}\right.$

Ответ: -0,5 и 1,5.

№3.

$$x^2-4x-2|x-2|+1=0$$

$x^2-4x-2|x-2|+1=0$

$x^2-4x+4-2|x-2|-4+1=0$

$(x-2)^2-2|x-2|-3=0$

$t=|x-2|,\quad t^2=(x-2)^2=|x-2|^2$

$t^2-2t-3=0$

$t_1+t_2=2 \quad t_1=3$

$t_1\cdot t_2=-3 \quad t_2=-1$

$t\ge 0 \Rightarrow t=3$

$|x-2|=3$

$\left[\begin{array}{l}x-2=3\\x-2=-3\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-1\end{array}\right.$

Ответ:-1 и 5.

№4.

$$|x^4-6x^3+8x^2|=54x-9x^2-72$$

1) $54x-9x^2-72\ge 0 \,|:(-9)$

$x^2-6x+8\le 0$

$(x-2)(x-4)\le 0$

$2\le x\le 4$

2) $x^2|x^2-6x+8|=-9(x^2-6x+8)$

Т.к. $x^2-6x+8\le 0$,

то $|x^2-6x+8|=-(x^2-6x+8)$

$-x^2(x^2-6x+8)+9(x^2-6x+8)=0$

$(x^2-6x+8)(x^2-9)=0$

$x_1=2 \quad x_2=4 \quad x_3=3 \quad x_4=-3$

С учетом, что $2\le x\le 4$, получим

$x=2 \quad x=3 \quad x=4$

Ответ:2; 3 и 4.

№5.

$$|x^4-7x^3+6x^2|=7x^3-6x^2-x^4$$

1) $7x^3-6x^2-x^4\ge 0$

$x^4-7x^3+6x^2\le 0$

$x^2(x^2-7x+6)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=0\\(x-1)(x-6)\le 0\end{array}\right.$

$x\in\{0\}\cup[1;6]$

2) $x^2|x^2-7x+6|=-x^2(x^2-7x+6)$

$x=0$ является корнем

$|x^2-7x+6|=-(x^2-7x+6)$

Т.к. из (1) $x^2-7x+6\le 0$,

то $|x^2-7x+6|=-(x^2-7x+6)$

Получим уравнение

$-(x^2-7x+6)=-(x^2-7x+6),\ x\in R$

С учетом (1) имеем, что $x\in\{0\}\cup[1;6]$

Ответ: $\{0\}\cup[1;6]$

№6.

$$|x^2-8x+5|=|x^2-5|$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-8x+5=x^2-5 \\ x^2-8x+5=5-x^2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -8x=-10 \\ 2x^2-8x=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1,25 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Ответ:0; 1,25 и 4.

3. Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

- ***Примеры*** Решите уравнения:

№1. $|x+1|+|x-5|=8$.

№2. $|x^2-4x|-|x-3|=7$.

№3. $|x^2-25|+|100-x^2|=75$.

№4. $\sqrt{(5x-3)^2}-\sqrt{(7x-4)^2}=2x-1$.

№5. $|x^2+x-20|+|x^2-11x+28|=2|x^2-5x+4|$.

- ***Решение (примеры)*** 3. Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

№1.

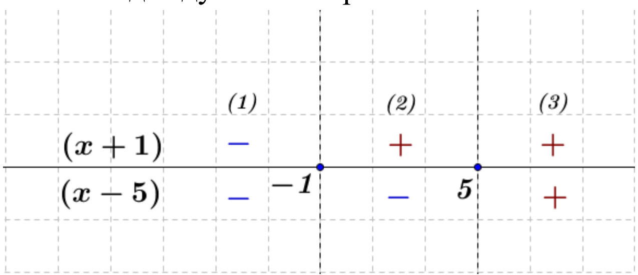
$$|x+1|+|x-5|=8$$

Нули подмодульных выражений:

$x+1=0 \quad x-5=0$

$x=-1 \quad x=5$

Знаки подмодульных выражений:



$$(1)\ \begin{cases} x\le -1 \\ -x-1-x+5=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ -2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$$

$$(2)\ \begin{cases} -1\le x\le 5 \\ x+1-x+5=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 5 \\ 6=8 \end{cases},\varnothing$$

$$(3)\ \begin{cases} x\ge 5 \\ x+1+x-5=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=6$$

Ответ: -2 и 6.

№2.

$$\left|x^2-4x\right|-\left|x-3\right|=7$$

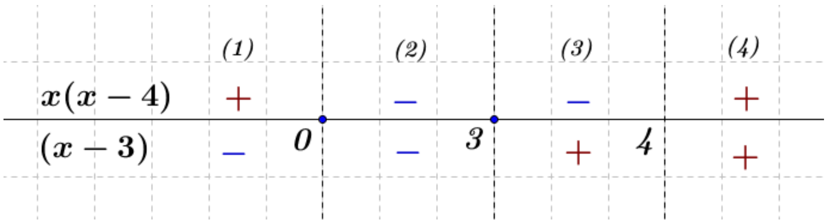
Нули подмодульных выражений:

$x^2-4x=0 \qquad\qquad x-3=0$

$x(x-4)=0 \qquad\qquad x=3$

$x=0$ или $x=4$

Знаки подмодульных выражений:



$$(1)\ \begin{cases} x\le 0 \\ x^2-4x+x-3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2-3x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x_1=5 \quad x_2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$$

$$(2)\ \begin{cases} 0<x\le 3 \\ -x^2+4x+x-3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\le 3 \\ -x^2+5x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\le 3 \\ x^2-5x+10=0, D<0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

$$(3)\ \begin{cases} 3<x\le 4 \\ -x^2+4x-x+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x\le 4 \\ -x^2+3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x\le 4 \\ x^2-3x+4=0, D<0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

$$(4)\ \begin{cases} x\ge 4 \\ x^2-4x-x+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x^2-5x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{41}}{2}$$

Ответ: $\left\{-2; \dfrac{5+\sqrt{41}}{2}\right\}$

№3.

$$\left|x^2-25\right|+\left|100-x^2\right|=75$$

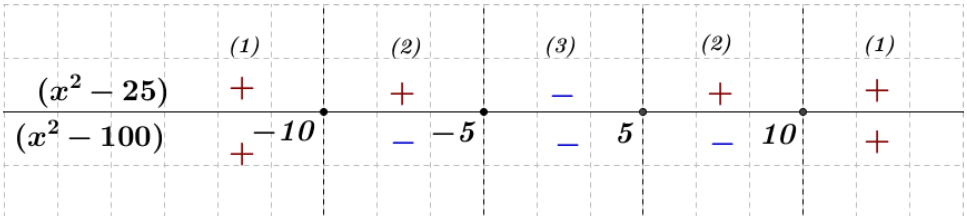
$$\left|x^2-25\right|+\left|x^2-100\right|=75$$

Нули подмодульный выражений:

$x^2-25=0 \quad x^2-100=0$

$x=\pm5 \qquad x=\pm10$

Знаки подмодульных выражений



1) $x\in(-\infty;-10]\cup[10;\infty)$, $\quad x^2-25+x^2-100=75$, $\quad x^2=100$

$\underline{x=\pm10}\in(-\infty;-10]\cup[10;\infty)$

2) $x\in(-10;-5)\cup(5;10)$, $\quad x^2-25-x^2+100=75$, $\quad 75=75$, $\quad x\in R$

$\underline{x\in(-10;-5)\cup(5;10)}$

3) $x\in[-5;5]$, $\quad -x^2+25-x^2+100=75$, $\quad x^2=25$

$\underline{x=\pm5}\in[-5;5]$

В объединении

$$\left[\begin{array}{l} x=\pm10 \\ x\in(-10;-5)\cup(5;10) \Leftrightarrow \underline{\underline{x\in[-10;-5]\cup[5;10]}} \\ x=\pm5 \end{array}\right.$$

Ответ: $[-10;-5]\cup[5;10]$

№4.

$$\sqrt{(5x-3)^2}-\sqrt{(7x-4)^2}=2x-1$$

$$|5x-3|-|7x-4|=2x-1$$

Нули подмодульных выражений:

$5x-3=0 \qquad 7x-4=0$

$x=0,6 \qquad x=\frac{4}{7}\ (\approx 0,57)$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)		(2)		(3)
$(5x-3)$	$-$		$-$		$+$
$(7x-4)$	$-$	$\frac{4}{7}$	$+$	$0,6$	$+$

1) $\begin{cases} x\le \frac{4}{7} \\ -5x+3+7x-4=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{4}{7} \\ 2x-1=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\le \frac{4}{7}$

2) $\begin{cases} \frac{4}{7}<x<0,6 \\ -5x+3-7x+4=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{7}<x<0,6 \\ x=\frac{4}{7} \end{cases}, \varnothing$

3) $\begin{cases} x\ge 0,6 \\ 5x-3-7x+4=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0,6 \\ x=0,5 \end{cases}, \varnothing$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{4}{7}\right]$

№5.

$$\left|x^2+x-20\right|+\left|x^2-11x+28\right|=2\left|x^2-5x+4\right|$$

Пусть $a=x^2+x-20,\ b=x^2-11x+28,$

тогда $a+b=x^2+x-20+x^2-11x+28=2x^2-10x+8=2\left(x^2-5x+4\right).$

Уравнение примет вид: $|a|+|b|=|a+b| \quad (1).$

По свойству модулей $\quad |a+b|\le|a|+|b|.$

Равенство (1) будет верным, если a и b одного знака, т.е. $ab\ge 0.$

$$\left(x^2+x-20\right)\left(x^2-11x+28\right)\ge 0$$

$$(x-4)(x+5)(x-7)(x-4)\ge 0$$

$$x\in(-\infty;-5]\cup\{4\}\cup[7;\infty)$$

Ответ: $(-\infty;-5]\cup\{4\}\cup[7;\infty)$

Вариант 1

Решите уравнения:

№1.	$\lvert x-1\rvert+\lvert x+7\rvert=12$	№2.	$\sqrt{x^2-4x+4}=\lvert 2x+2\rvert+1$
№3.	$2\lvert x^2+4x\rvert-\lvert x-5\rvert+5=0$	№4.	$3\lvert 1-x\rvert-x-12=\lvert 2x+3\rvert$
№5.	$\lvert x^2+3x-4\rvert+\lvert x^2+3x-28\rvert=24$		

Вариант 2

Решите уравнения:

№1.	$\lvert x+3\rvert+\lvert x-1\rvert=10$	№2.	$\sqrt{4x^2+4x+1}-3=\lvert x-2\rvert$
№3.	$\lvert x^2-64\rvert+\lvert 169-x^2\rvert=105$	№4.	$\lvert 5-2x\rvert+\lvert x+3\rvert=2-3x$
№5.	$\lvert x^2-16\rvert+\lvert x+4\rvert=x^2+x-12$		

▪ *Ответы (тест)* 3. Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	*-9 и 3*	*-3 и -1/3*	*-4,5; -3,5 и 0*	*-3*	$[-7;-4]\cup[1;4]$
Вар.2	*-6 и 4*	*-6 и 4/3*	$[-13;-8]\cup[8;13]$	$(-\infty;-3]\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}$	$\{-4\}\cup[4;\infty)$

▪ *Решение (тест)* 3. Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

Вариант 1

№1.

$$|x-1|+|x+7|=12$$

Нули подмодульных выражений:

$x-1=0 \quad x+7=0$

$x=1 \qquad x=-7$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)		(2)		(3)
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$
$(x+7)$	$-$	-7	$+$	1	$+$

$$(1)\ \begin{cases} x\le -7 \\ -x+1-x-7=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -7 \\ x=-9 \end{cases} \Leftrightarrow x=-9$$

$$(2)\ \begin{cases} -7\le x\le 1 \\ -x+1+x+7=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7\le x\le 1 \\ 0\cdot x=4 \end{cases}, \varnothing$$

$$(3)\ \begin{cases} x\ge 1 \\ x-1+x+7=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Ответ: -9 и 3.

№2.

$$\sqrt{x^2-4x+4}=|2x+2|+1$$

$$\sqrt{(x-2)^2}=|2x+2|+1$$

$$|x-2|=|2x+2|+1$$

Нули подмодульных выражений:

$x-2=0 \quad 2x+2=0$

$x=2 \qquad x=-1$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)		(2)		(3)
$(x-2)$	$-$		$-$		$+$
$(2x+2)$	$-$	-1	$+$	2	$+$

$$1)\ \begin{cases} x\le -1 \\ -x+2=-2x-2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x=-3}$$

$$2)\ \begin{cases} -1<x<2 \\ -x+2=2x+2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x=-\frac{1}{3}}$$

$$3)\ \begin{cases} x\ge 2 \\ x-2=2x+2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x=-5 \end{cases}, \varnothing$$

Ответ: -3 и -1/3.

№3.

$$2\left|x^2+4x\right|-\left|x-5\right|+5=0$$

Нули подмодульных выражений:

$x^2+4x=0 \qquad x-5=0$

$x=0 \quad x=-4 \qquad x=5$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	-4	(2)	0	(3)	5	(4)
$x(x+4)$	$+$		$-$		$+$		$+$
$(x-5)$	$-$		$-$		$-$		$+$

1) $x\in(-\infty;-4]\cup[0;5]$

$2\left(x^2+4x\right)+x-5+5=0, \quad x(2x+9)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=-4{,}5 \\ x=0 \end{array}\right. \in(-\infty;-4]\cup[0;5]$$

2) $x\in[-4;0]$

$-2\left(x^2+4x\right)+(x-5)+5=0, \quad x(2x+7)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3{,}5 \end{array}\right. \in[-4;0]$$

3) $x\in[5;\infty)$

$2\left(x^2+4x\right)-(x-5)+5=0, \quad 2x^2+7x+10=0$

$D<0, \ \varnothing$

Ответ: -4,5; -3,5 и 0.

№4.

$$3\left|1-x\right|-x-12=\left|2x+3\right|$$

$3\left|x-1\right|-x-12=\left|2x+3\right|$

Нули подмодульных выражений:

$x-1=0 \qquad 2x+3=0$

$x=1 \qquad x=-1{,}5$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	$-1,5$	(2)	1	(3)
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$
$(2x+3)$	$-$		$+$		$+$

1) $x\le-1{,}5$

$-3(x-1)-x-12=-(2x+3)$

$\underline{x=-3}\in(-\infty;-1{,}5]$

2) $-1{,}5\le x\le 1$

$-3(x-1)-x-12=2x+3$

$x=-2\notin[-1{,}5;1]$

3) $x\ge 1$

$3(x-1)-x-12=2x+3$

$-18=0,$

$x\in\varnothing$

***Ответ*: -3.**

№5.

$$\left|x^2+3x-4\right|+\left|x^2+3x-28\right|=24$$

Пусть $a=x^2+3x-4, \ b=x^2+3x-28$

$a-b=x^2+3x-4-x^2-3x+28=24$

Уравнение примет вид: $|a|+|b|=|a-b|$

Равенство будет, если a и b разных знаков.

$$a\cdot b\le 0$$

$$\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+3x-28\right)\le 0$$

$$(x-1)(x+4)(x-4)(x+7)\le 0$$

$$x\in[-7;-4]\cup[1;4]$$

Ответ: $[-7;-4]\cup[1;4]$

Вариант 2

№1.

$$|x+3|+|x-1|=10$$

Нули подмодульных выражений:

$x+3=0 \qquad x-1=0$

$x=-3 \qquad x=1$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	-3	(2)	1	(3)
$(x+3)$	$-$		$+$		$+$
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$

1) $x\le-3$

$-(x+3)-(x-1)=10$

$\underline{x=-6}\in(-\infty;-3]$

2) $-3\le x\le1$

$x+3-(x-1)=10$

$4=10,\quad\varnothing$

3) $x\ge1$

$x+3+x-1=10$

$\underline{x=4}\in[1;\infty)$

Ответ: -6 и 4.

№2.

$$\sqrt{4x^2+4x+1}-3=|x-2|$$

$\sqrt{(2x+1)^2}-3=|x-2|$

$|2x+1|-3=|x-2|$

Нули подмодульных выражений:

$2x+1=0 \qquad x-2=0$

$x=-0,5 \qquad x=2$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	$-0,5$	(2)	2	(3)
$(2x+1)$	$-$		$+$		$+$
$(x-2)$	$-$		$-$		$+$

1) $x\le-0,5$

$-2x-1-3=-x+2$

$\underline{x=-6}\in(-\infty;-0,5]$

2) $-0,5\le x\le2$

$2x+1-3=-x+2$

$\underline{x=\frac{4}{3}}\in[-0,5;2]$

3) $x\ge2$

$2x+1-3=x-2$

$x=0\notin[2;\infty)$

Ответ: -6 и 4/3.

№3.

$$\left|x^2-64\right|+\left|169-x^2\right|=105$$

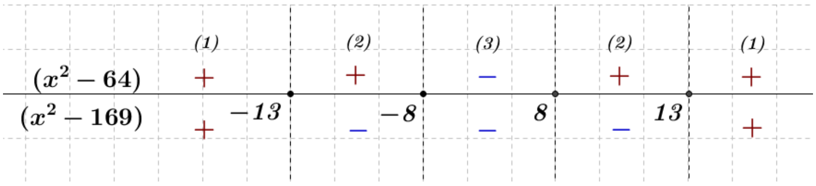
$$\left|x^2-64\right|+\left|x^2-169\right|=105$$

Нули подмодульных выражений:

$x^2-64=0 \qquad x^2-169=0$

$x=\pm 8 \qquad x=\pm 13$

Знаки подмодульных выражений:



1) $x\in(-\infty;-13]\cup[13;\infty)$

$x^2-64+x^2-169=105$

$x^2=169$

$\underline{x=\pm 13}\in(-\infty;-13]\cup[13;\infty)$

2) $x\in(-13;-8)\cup(8;13)$

$x^2-64-x^2+169=105$

$105=105$

$x\in R$

$\underline{x\in(-13;-8)\cup(8;13)}$

3) $x\in[-8;8]$

$-x^2+64-x^2+169=105$

$x^2=64$

$\underline{x=\pm 8}\in[-8;8]$

В объединении

$$\left[\begin{array}{l} x=\pm 13 \\ x\in(-13;-8)\cup(8;13) \\ x=\pm 8 \end{array}\right.$$

$\underline{x\in[-13;-8]\cup[8;13]}$

Ответ: $[-13;-8]\cup[8;13]$

№4.

$$|5-2x|+|x+3|=2-3x$$

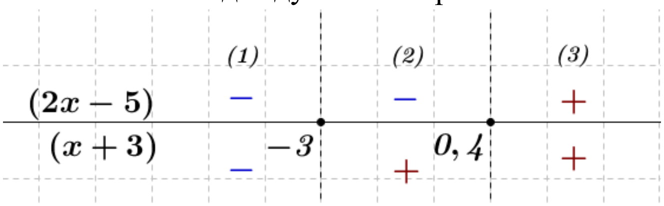
$$|2x-5|+|x+3|=2-3x$$

Нули подмодульных выражений:

$2x-5=0 \qquad x+3=0$

$x=0,4 \qquad x=-3$

Знаки подмодульных выражений:



1) $x\le -3$

$-2x+5-x-3=2-3x$

$2=2\Rightarrow \underline{x\in(-\infty;-3]}$

2) $-3\le x\le 0,4$

$-2x+5+x+3=2-3x$

$\underline{x=-3}\in[-3;0,4]$

3) $x\ge 0,4$

$2x-5+x+3=2-3x$

$\underline{x=\frac{2}{3}}\in[0,4;\infty)$

В объединении

$$\left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;-3] \\ x=-3 \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \underline{\underline{x\in(-\infty;-3]\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}}}$$

Ответ: $(-\infty;-3]\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}$

№5.

$$\left|x^2-16\right|+\left|x+4\right|=x^2+x-12$$

Пусть $a=x^2-16,\ b=x+4,$ тогда

$a+b=x^2-16+x+4=x^2+x-12$

Уравнение примет вид: $|a|+|b|=|a+b|$.

Равенство будет выполняться, если

a и b одного знака, т.е. $a\cdot b\geq 0$.

$$\left(x^2-16\right)\left(x+4\right)\geq 0$$

$$\left(x-4\right)\left(x+4\right)^2\geq 0$$

$$\underline{\underline{x\in\{-4\}\cup\left[4;\infty\right)}}$$

Ответ: $\{-4\}\cup\left[4;\infty\right)$

4. Модуль в дробно-рациональных уравнениях

▪ ***Примеры*** Решите уравнения:

№1. $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1}=1.$

№2. $\dfrac{3-|4-x|-|x-1|}{|5x^2-12x+4|}=0.$

№3. $x^2\left(21-9\left|\dfrac{x+3}{x}\right|\right)+6x+9=0.$

№4. $\dfrac{5|x+7|}{x+7}+\dfrac{6|x+5|}{x+5}+\dfrac{10|x+4|}{x+4}+\dfrac{7|x+1|}{x+1}=-6.$

№1.

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1$$

Нули подмодульных выражений:

$x-2=0 \qquad x-1=0$

$x=2 \qquad x=1$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)		(2)		(3)
$(x-2)$	$-$		$-$		$+$
$(x-1)$	$-$	1	$+$	2	$+$

1) $x\le 1$

$\dfrac{-x+2}{-x+1-1}=1$

$\dfrac{-x+2}{-x}=1$

$\dfrac{x-2}{x}=1$

$\begin{cases} x-2=x \\ x\ne 0 \end{cases}$

$-2=0\cdot x$

$\varnothing$

2) $1\le x\le 2$

$\dfrac{-x+2}{x-1-1}=1$

$\dfrac{-x+2}{x-2}=1$

$\begin{cases} -x+2=x-2 \\ x\ne 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ x\ne 2 \end{cases}$

$\varnothing$

3) $x\ge 2$

$\dfrac{x-2}{x-1-1}=1$

$\dfrac{x-2}{x-2}=1$

$\begin{cases} 1=1 \\ x\ne 2 \end{cases}$

$\underline{x>2}$

Ответ: $(2;\infty)$.

№2.

$$\frac{3-|4-x|-|x-1|}{|5x^2-12x+4|}=0$$

$$\frac{|x-1|+|x-4|-3}{|5x^2-12x+4|}=0$$

ОДЗ: $|5x^2-12x+4|\ne 0$

$5x^2-12x+4\ne 0$

$x\ne 2 \quad x\ne 0,4$

$|x-1|+|x-4|-3=0$

Нули подмодульных выражений:

$x-1=0 \qquad x-4=0$

$x=1 \qquad x=4$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)		(2)		(3)
$(x-1)$	$-$		$+$		$+$
$(x-4)$	$-$	1	$-$	4	$+$

1) $x\le 1,\quad -x+1-x+4-3=0$

$\underline{x=1}\in(-\infty;1]$

2) $1\le x\le 4,\quad x-1-x+4-3=0$

$0\cdot x=0\Rightarrow \underline{x\in[1;4]}$

3) $x\ge 4,\quad x-1+x-4-3=0$

$\underline{x=4}\in[4;\infty)$

В объединении

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x\in[1;4] \\ x=4 \end{array}\right.\Leftrightarrow x\in[1;4]$

С учетом ОДЗ

$\underline{\underline{x\in[1;2)\cup(2;4]}}$

Ответ: $[1;2)\cup(2;4]$.

№3.

$$x^2\left(21-9\left|\frac{x+3}{x}\right|\right)+6x+9=0$$

$$x^2\left(21-9\left|\frac{x+3}{x}\right|\right)+6x+9=0 \quad \Big| : x^2\neq 0$$

$$21-9\left|1+\frac{3}{x}\right|+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}=0$$

$$\left| \begin{array}{l} t=1+\dfrac{3}{x}\to t^2=1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{9}{x^2}\to t^2-1=\dfrac{6}{x}+\dfrac{9}{x^2} \\ |t|^2=t^2 \end{array} \right.$$

$$21-9|t|+t^2-1=0$$

$$|t|^2-9|t|+20=0$$

$$|t|=4 \qquad |t|=5$$

$$1+\frac{3}{x}=4 \quad \text{или} \quad 1+\frac{3}{x}=-4 \quad \text{или} \quad 1+\frac{3}{x}=5 \quad \text{или} \quad 1+\frac{3}{x}=-5$$

$$x=1 \qquad x=-\frac{3}{5} \qquad x=\frac{3}{4} \qquad x=-\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{3}{5};-\frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ 1$.

№4.

$$\frac{5|x+7|}{x+7}+\frac{6|x+5|}{x+5}+\frac{10|x+4|}{x+4}+\frac{7|x+1|}{x+1}=-6$$

ОДЗ: $x\neq -7\ \ x\neq -5\ \ x\neq -4\ \ x\neq -1$

Нули подмодульных выражений:

$x=-7\ \ x=-5\ \ x=-4\ \ x=-1$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	-7	(2)	-5	(3)	-4	(4)	-1	(5)
$(x+7)$	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$
$(x+5)$	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$(x+4)$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$(x+1)$	$-$		$-$		$-$		$-$		$+$

(1) $-5-6-10-7=-6$, неверно

(2) $5-6-10-7=-6$, неверно

(3) $5+6-10-7=-6$, $-6=-6$, верно

$\Rightarrow x\in(-5;-4)$

(4) $5+6+10-7=-6$, неверно

(5) $5+6+10+7=-6$, неверно

Ответ: $(-5;-4)$.

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $$\frac{|x+1|}{|x+2|-1}=1$$

№2. $$\frac{|x-5|+|2-x|-3}{|2x^2-15x+28|}=0$$

№3. $$\frac{|x^2-25|-|81-x^2|-56}{\sqrt{182-x-x^2}}=0$$

№4. $$\frac{6|x+2|}{x+2}+\frac{4|x-2|}{x-2}+\frac{8|x-5|}{x-5}+\frac{3|x-9|}{x-9}=-1$$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $$\frac{5}{3-|x-1|}=|x|+2$$

№2. $$\frac{5-|x+2|-|3-x|}{|2+3x-2x^2|}=0$$

№3. $$x^2\left(22-10\left|\frac{x+8}{x}\right|\right)+16x+64=0$$

№4. $$\left|\frac{3x^2-2x-5}{x-2}\right|+|x^2-x|=\left|\frac{x^3-5}{x-2}\right|$$

▪ *Ответы (тест)* 4. Модуль в дробно-рациональных уравнениях

	№1	№2	№3	№4
Вар.1	$(-1;\infty)$	$[2;3{,}5)\cup(3{,}5;4)\cup(4;5]$	$(-14;-9]\cup[9;13)$	$(2;5)$
Вар.2	$\sqrt{5}-2;\ 3$	$\left[-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};2\right)\cup(2;3]$	$-2;\ -1;\ \frac{4}{3};\ 4$	$[-1;0]\cup\left[1;1\frac{2}{3}\right]\cup(2;\infty)$

▪ *Решение (тест)* 4. Модуль в дробно-рациональных уравнениях

Вариант 1

№1.

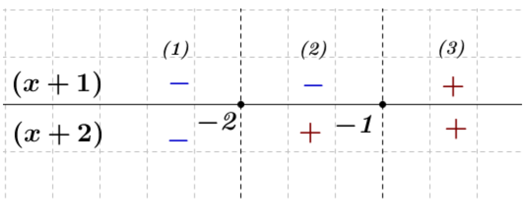
$$\frac{|x+1|}{|x+2|-1}=1$$

Нули подмодульных выражений:

$x+1=0 \quad x+2=0$

$x=-1 \quad\quad x=-2$

Знаки подмодульных выражений:



1) $x\le -2$

$$\frac{-x-1}{-x-2-1}=1$$

$$\frac{-x-1}{-x-3}=1$$

$$\frac{x+1}{x+3}=1$$

$$x+1=x+3$$

$$1=3$$

$$\varnothing$$

2) $-2\le x\le -1$

$$\frac{-x-1}{x+2-1}=1$$

$$\frac{-x-1}{x+1}=1$$

$$\begin{cases}-x-1=x+1\\ x\ne -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2x=2\\ x\ne -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1\\ x\ne -1\end{cases}$$

$$\varnothing$$

3) $x\ge -1$

$$\frac{x+1}{x+2-1}=1$$

$$\begin{cases}x+1=x+1\\ x\ne -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in R\\ x\ge -1\\ x\ne -1\end{cases}$$

$\underline{x>-1}$

Ответ: $x>-1$.

№2.

$$\frac{|x-5|+|2-x|-3}{|2x^2-15x+28|}=0$$

$$\frac{|x-5|+|x-2|-3}{|2x^2-15x+28|}=0$$

ОДЗ: $|2x^2-15x+28|\neq 0$

$2x^2-15x+28\neq 0$

$x\neq 4 \quad x\neq 3{,}5$

$|x-5|+|x-2|-3=0$

Нули подмодульных выражений

$x-5=0 \quad x-2=0$

$x=5 \quad\quad x=2$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	2	(2)	5	(3)
$(x-5)$	−		−		+
$(x-2)$	−		+		+

1) $x\le 2$

$-x+5-x+2-3=0$

$-2x+4=0$

$\underline{x=2}\in(-\infty;2]$

2) $2\le x\le 5$

$-x+5+x-2-3=0$

$0=0$

$\underline{x\in[2;5]}$

3) $x\ge 5$

$x-5+x-2-3=0$

$2x-10=0$

$\underline{x=5}\in[5;\infty)$

В объединении $x\in[2;5]$

С учетом ОДЗ: $\underline{\underline{x\in[2;3{,}5)\cup(3{,}5;4)\cup(4;5]}}$

Ответ: $[2;3{,}5)\cup(3{,}5;4)\cup(4;5]$

№3.

$$\frac{|x^2-25|-|81-x^2|-56}{\sqrt{182-x-x^2}}=0$$

ОДЗ: $182-x-x^2>0$

$x^2+x-182<0$

$(x+14)(x-13)<0$

$-14<x<13$

$|x^2-25|-|x^2-81|-56=0$

Нули подмодульных выражений: $x=\pm 5$, $x=\pm 9$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	−9	(2)	−5	(3)	5	(2)	9	(1)
(x^2-25)	+		+		−		+		+
(x^2-81)	+		−		−		−		+

1) $x\in(-\infty;-9]\cup[9;\infty)$

$x^2-25-x^2+81-56=0$

$0=0$

$\underline{x\in(-\infty;-9]\cup[9;\infty)}$

2) $x\in(-9;-5)\cup(5;9)$

$x^2-25+x^2-81-56=0$

$x^2=81$

$x=\pm 9\notin(-9;-5)\cup(5;9)$

3) $x\in[-5;5]$

$-x^2+25+x^2-81-56=0$

$-112=0, \quad \varnothing$

В объединении: $x\in(-\infty;-9]\cup[9;\infty)$

С учетом ОДЗ: $\underline{\underline{x\in(-14;-9]\cup[9;13)}}$

Ответ: $(-14;-9]\cup[9;13)$

№4.

$$\frac{6|x+2|}{x+2}+\frac{4|x-2|}{x-2}+\frac{8|x-5|}{x-5}+\frac{3|x-9|}{x-9}=-1$$

ОДЗ: $x\neq-2,\ x\neq2,\ x\neq5,\ x\neq9$

Нули подмодульных выражений:

$x=-2,\ x=2,\ x=5,\ x=9$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	-2	(2)	2	(3)	5	(4)	9	(5)
$(x+2)$	−		+		+		+		+
$(x-2)$	−		−		+		+		+
$(x-5)$	−		−		−		+		+
$(x-9)$	−		−		−		−		+

1) $x<-2$

$-6-4-8-3=-1$, неверно $\varnothing$

2) $-2<x<2$

$6-4-8-3=-1$, неверно $\varnothing$

3) $2<x<5$

$6+4-8-3=-1$

$10=10$, верно

$\begin{cases} x\in R \\ 2<x<5 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x\in(2;5)}$

4) $5<x<9$

$6+4+8-3=-1$, неверно $\varnothing$

5) $x>9$

$6+4+8+3=-1$, неверно $\varnothing$

Ответ: $(2;5)$.

Вариант 2

№1.

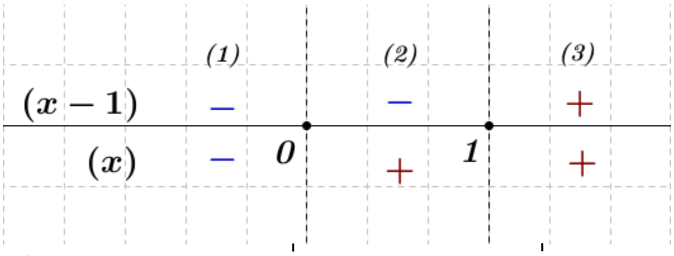
$$\frac{5}{3-|x-1|}=|x|+2$$

Нули подмодульных выражений:

$x-1=0 \quad x=0$

$x=1$

Знаки подмодульных выражений:



1) $x\le 0$

$$\frac{5}{3+x-1}=-x+2$$

$$\frac{5}{x+2}=-x+2$$

$$\begin{cases}5=-(x-2)(x+2)\\ x\ne -2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-(x^2-4)=5\\ x\ne -2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-x^2+4=5\\ x\ne -2\end{cases}$$

$$x^2=-1$$

$$\varnothing$$

2) $0\le x\le 1$

$$\frac{5}{3+x-1}=x+2$$

$$\frac{5}{x+2}=x+2$$

$$\begin{cases}5=(x+2)^2\\ x\ne -2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+2=\sqrt{5}\\ x+2=-\sqrt{5}\end{array}\right.\\ x\ne -2\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{5}-2\\ x=-\sqrt{5}-2\end{array}\right.$$

$$\underline{x=\sqrt{5}-2}\in[0;1]$$

3) $x\ge 1$

$$\frac{5}{3-x+1}=x+2$$

$$\frac{5}{4-x}=x+2$$

$$\begin{cases}5=(x+2)(4-x)\\ x\ne 4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1\end{array}\right.\\ x\ne 4\end{cases}$$

$$\underline{x=3}\ge 1$$

Ответ: $\sqrt{5}-2;\ 3$

№2.

$$\frac{5-|x+2|-|3-x|}{|2+3x-2x^2|}=0$$

$$\frac{|x+2|+|x-3|-5}{|2x^2-3x-2|}=0$$

ОДЗ: $|2x^2-3x-2|=0$

$$2x^2-3x-2=0$$

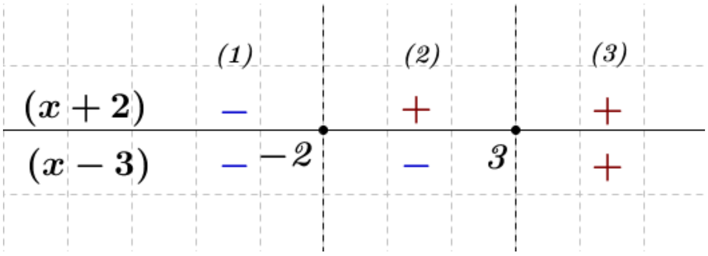
$$x\neq 2 \quad x\neq -\frac{1}{2}$$

$$|x+2|+|x-3|-5=0$$

Нули подмодульных выражений:

$$x=-2 \quad x=3$$

Знаки подмодульных выражений:



$x\le -2$

$-x-2-x+3-5=0$

$-2x=4$

$\underline{x=-2}\in(-\infty;-2]$

$-2\le x\le 3$

$x+2-x+3-5=0$

$5-5=0$

$0=0$

$\begin{cases} x\in R \\ -2\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x\in[-2;3]}$

$x\ge 3$

$x+2+x-3-5=0$

$2x-6=0$

$\underline{x=3}\in[3;\infty)$

В объединении $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x\in[-2;3] \Leftrightarrow x\in[-2;3] \\ x=3 \end{array}\right.$

С учетом ОДЗ: $\underline{\underline{x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};2\right)\cup(2;3]}}$

Ответ: $\left[-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};2\right)\cup(2;3]$

№3.

$$x^2\left(22-10\left|\frac{x+8}{x}\right|\right)+16x+64=0$$

1) $\dfrac{x+8}{x}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -8 \\ x>0 \end{array}\right.$

$$x^2\left(22-10\cdot\frac{x+8}{x}\right)+16x+64=0$$

$$22x^2-10x(x+8)+16x+64=0$$

$$22x^2-10x^2-80x+16x+64=0$$

$$12x^2-64x+64=0$$

$$6x^2-32x+32=0$$

$$3x^2-16x+16=0$$

$$D/4=64-48=16$$

$x=\dfrac{8\pm 4}{3}=\left|\begin{array}{l} 4 \\ \frac{4}{3}, \end{array}\right.$ удовлетворяют условию $x\in(-\infty;-8]\cup(0;\infty)$

2) $\dfrac{x+8}{x}<0 \Rightarrow x\in(-8;0)$

$$x^2\left(22+10\cdot\frac{x+8}{x}\right)+16x+64=0$$

$$22x^2+10x(x+8)+16x+64=0$$

$$22x^2+10x^2+80x+16x+64=0$$

$$32x^2+96x+64=0$$

$$x^2+3x=2=0$$

$x_1=-1$, $x_2=-2$ удовлетворяют условию $x\in(-8;0)$

Ответ: $-2;\ -1;\ \dfrac{4}{3};\ 4$

№4.

$$\left|\frac{3x^2-2x-5}{x-2}\right|+\left|x^2-x\right|=\left|\frac{x^3-5}{x-2}\right|$$

Заметим, что $\dfrac{3x^2-2x-5}{x-2}+x^2-x=\dfrac{3x^2-2x-5+x^3-2x^2+2x}{x-2}=\dfrac{x^3-5}{x-2}$.

Пусть $a=\dfrac{3x^2-2x-5}{x-2}$, $b=x^2-x$.

Уравнение примет вид $|a|+|b|=|a+b|$.

По свойствам модулей имеем $|a+b|\le|a|+|b|$.

Равенство верно, если $ab\ge 0$.

$$\frac{3x^2-2x-5}{x-2}\cdot\left(x^2-x\right)\ge 0$$

$$\frac{(x+1)\left(x-\frac{5}{3}\right)\cdot x\cdot(x-1)}{x-2}\ge 0$$

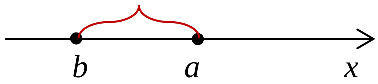
$$x\in[-1;0]\cup\left[1;1\frac{2}{3}\right]\cup(2;\infty)$$

Ответ: $[-1;0]\cup\left[1;1\frac{2}{3}\right]\cup(2;\infty)$

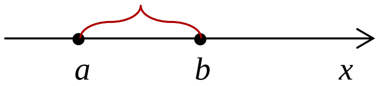
✓ *Модуль - это расстояние между точками a и b*

$$\boxed{|a-b|=\rho(a;b)}$$

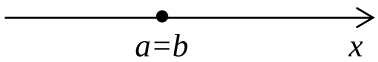
$|a-b|=a-b$, если $a>b$



$|a-b|=b-a$, если $b>a$



$|a-b|=0$, если $b=a$



Т.к. расстояние - это геометрическая величина, и оно принимает только неотрицательные значения, то $\boxed{|a-b|\geq 0}$

✓ *Правило раскрытия модуля*

$$\boxed{|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}}$$

Если подмодульное выражение больше или равно нулю, то модуль раскрываем со знаком «плюс»;

Если подмодульное выражение меньше нуля, то модуль раскрываем со знаком «минус».

✓ *Некоторые свойства модуля*

$$|x|^2=x^2$$
$$\sqrt{x^2}=|x|$$
$$|x|=|-x|$$
$$|x|\geq 0$$

✓ *Основные эквивалентности*

1.

$$\boxed{|f(x)| = a}$$

$\underline{a > 0}$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$$

$\underline{a = 0}$

$$f(x) = 0$$

$\underline{a < 0}$

$$x \in \varnothing$$

2.

$$\boxed{|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.}$$

3.

$$\boxed{|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}}$$

или

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$