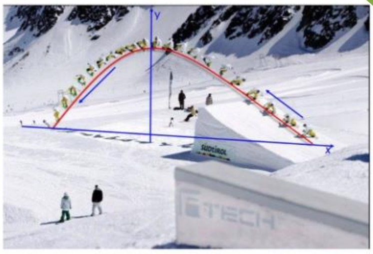


"Экстремальные виды спорта" или "экстрим"?
(Текст Эксперт http://textexpert.ru)

- *10 класс Алгебра*

Числовые функции

1. Область определения функции
2. Графики функций. Область значений функции
3. Свойства функции
4. Тесты Числовые функции
5. Дополнительные задачи на свойства четности и периодичности функций

Содержание сборника:

1. Область определения функции

✓ Задать функцию – это значит указать **правило**, которое позволяет по произвольно выбранному значению $x \in D(f)$ вычислить соответствующее значение y.

$$x \xrightarrow{f} y \text{ или } y = f(x)$$

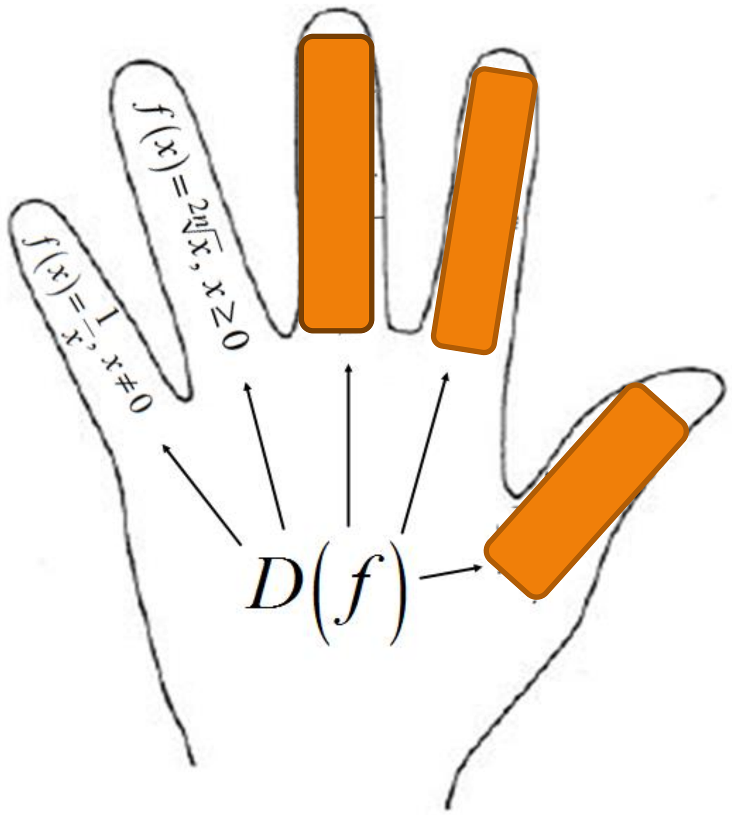
x - независимая переменная (аргумент);
y - зависимая переменная (значение функции);

$D(f)$ - область определения функции, множество допустимых значений независимой переменной;

$E(f)$ - область значений функции, множество значений зависимой переменной при допустимых значениях независимой переменной.

✓ Способы задания функции:

- аналитический (с помощью формул)
- графический
- табличный
- словесный (описание)



Примеры

(учебник «Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Часть 2 Задачник 10 класс» Мордкович А.Г. и др.)

№П.3 Докажите, что заданная функция является линейной, и найдите ее область определения:

б)

$$u=\frac{t^4-8t^2+16}{(t+2)(t^2-4)}$$

$$D(u):\begin{cases}t+2\neq 0\\ t^2-4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\neq -2\\ t\neq 2\end{cases}$$

$$u=\frac{(t^2-4)^2}{(t+2)(t^2-4)}$$

$u=t-2$ линейная функция, $t\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$.

в)

$$z=\frac{p^3-4p^2-5p+20}{p^2-5}$$

$$D(z):\ p^2-5\neq 0,\ p\neq\sqrt{5},\ p\neq -\sqrt{5}$$

$$z=\frac{p^2(p-4)-5(p-4)}{p^2-5}$$

$$z=\frac{(p^2-5)(p-4)}{p^2-5}$$

$z=p-4$ линейная функция, $p\in(-\infty;-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5};\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\infty)$.

№П.4 Докажите, что график данной функции принадлежит прямой, параллельной оси абсцисс; найдите область определения этой функции:

а)

$$y=\frac{4x-5}{7x-21}-\frac{x-1}{2x-6}$$

$$D(y):\begin{cases}7x-21\neq 0\\ 2x-6\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq 3$$

$$y=\frac{4x-5}{7(x-3)}-\frac{x-1}{2(x-3)}$$

$y=\frac{1}{14}$ прямая, параллельная оси абсцисс, $x\in(-\infty;3)\cup(3;\infty)$.

№П.5 **Докажите, что график данной функции принадлежит прямой, параллельной оси абсцисс; найдите область определения этой функции и постройте ее график:**

а) $$y=\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10}$$

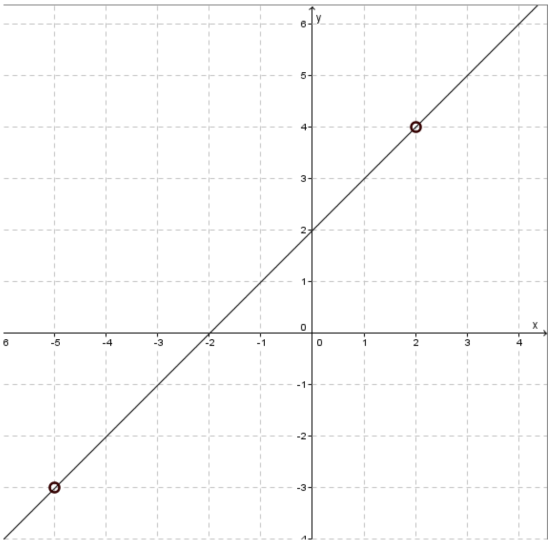
$D(y)$: $x^2+3x-10\neq 0,\ x\neq -5,\ x\neq 2$

$$y=\frac{x^2(x+5)-4(x+5)}{(x+5)(x-2)}$$

$y=x+2$ линейная функция

$x\neq -5,\ y(-5)\neq -3$

$x\neq 2,\ y(2)\neq 4$



№7.23 **Найдите область определения функции:**

г) $$y=\frac{x+2}{x^2+x+12}$$

$D(y)$: $x^2+x+12\neq 0$, верно при любых x, т.к. $D<0$ и $x^2+x+12>0$.

$D(y)=R$ или $x\in R$.

№7.24 **Найдите область определения функции:**

в) $$y=\frac{\sqrt{x+12}}{x^2-1}$$

$$D(y):\ \begin{cases} x+12\geq 0 \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -12 \\ x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{cases} \qquad D(y)=[-12;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty).$$

г) $$y=\frac{x-\sqrt{-x^2-7x+8}}{1+\sqrt{x+3}}$$

$$D(y):\ \begin{cases} -x^2-7x+8\geq 0 \\ 1+\sqrt{x+3}\neq 0 \\ x+3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)(x-1)\leq 0 \\ x\geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3\leq x\leq -1 \qquad D(y)=[-3;-1].$$

№7.30

Пусть $f(x)=2-\sqrt{1-x};\ g(x)=\dfrac{1+2x}{3+x}$. **Найдите область определения функции:**

а)

$$y=f(x)+g(x)$$

$$y=2-\sqrt{1-x}+\frac{1+2x}{3+x}$$

$$D(y):\ \begin{cases}1-x\geq 0\\ 3+x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ x\neq -3\end{cases}\qquad D(y)=(-\infty;-3)\cup(-3;1].$$

в)

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$y=\frac{2-\sqrt{1-x}}{\dfrac{1+2x}{3+x}}$$

$$D(y):\ \begin{cases}1-x\geq 0\\ 1+2x\neq 0\\ 3+x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ x\neq -\dfrac{1}{2}\\ x\neq -3\end{cases}\qquad D(y)=(-\infty;-3)\cup\left(-3;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};1\right].$$

№7.31

Пусть $f(x)=x^2-3x-4;\ g(x)=5x-x^2$. **Найдите область определения функции:**

в)

$$y=\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$$

$$y=\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{\sqrt{5x-x^2}}$$

$$D(y):\ \begin{cases}x^2-3x-4\geq 0\\ 5x-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)(x+1)\geq 0\\ x(x-5)<0\end{cases}\Leftrightarrow 4\leq x<5\qquad D(y)=[4;5)\ .$$

г)

$$y=\sqrt{\frac{g(x)}{f(x)}}$$

$$y=\sqrt{\frac{5x-x^2}{x^2-3x-4}}$$

$$D(y):\ \frac{5x-x^2}{x^2-3x-4}\geq 0\Leftrightarrow\frac{x(x-5)}{(x-4)(x+1)}\leq 0\quad D(y)=(-1;0]\cup(4;5].$$

2. Графики функций. Область значений функции

Если известен график функции $y = f(x)$, $x \in X$, то область значений функции $E(f)$ можно найти, спроецировав график на ось ординат.

Основные функции: $y = kx + m$ (линейная); $y = ax^2 + bx + c$ (квадратичная); $y = \frac{k}{x}$ (обратная пропорциональная зависимость; $y = \sqrt{x}$; $y = |x|$.

Зная шаблон графика функции $y = f(x)$, можно с помощью геометрических преобразований построить некоторые другие графики.

График функции $y = f(x+a)+b$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом:

на $|a|$ вправо, если $a < 0$; на $|a|$ влево, если $a > 0$;

на $|b|$ вверх, если $b > 0$; на $|b|$ вниз, если $b < 0$

▪ *Примеры*

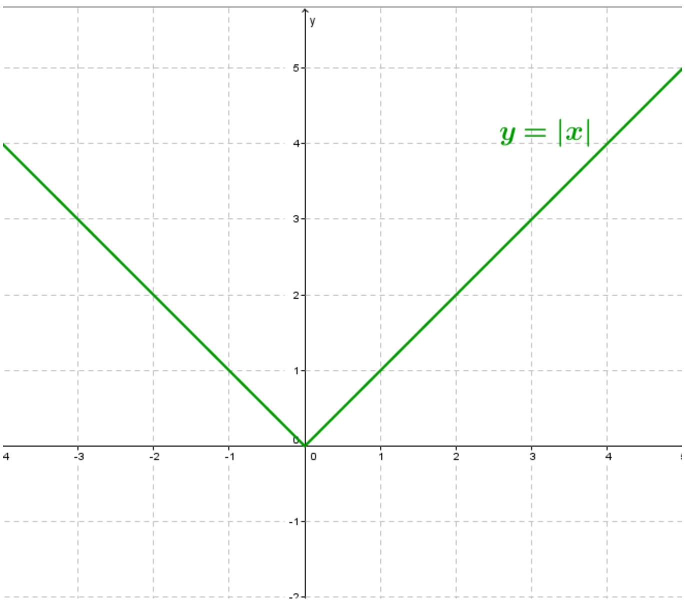
(учебник «Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Часть 2 Задачник 10 класс» Мордкович А.Г. и др.)

№7.18 **Постройте график функции:**

а) $y = |x|$

$a = 0,\ b = 0$

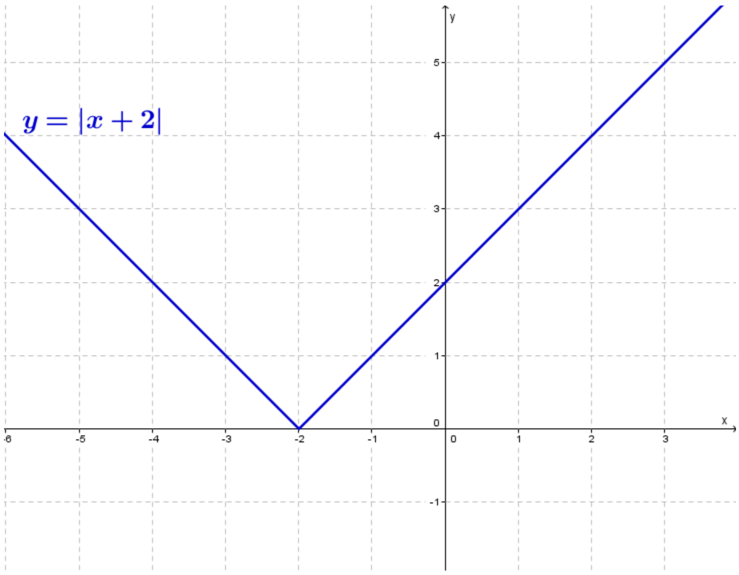
Вершина: $(0;0)$



б) $y=|x+2|$

$a=2,\ b=0$

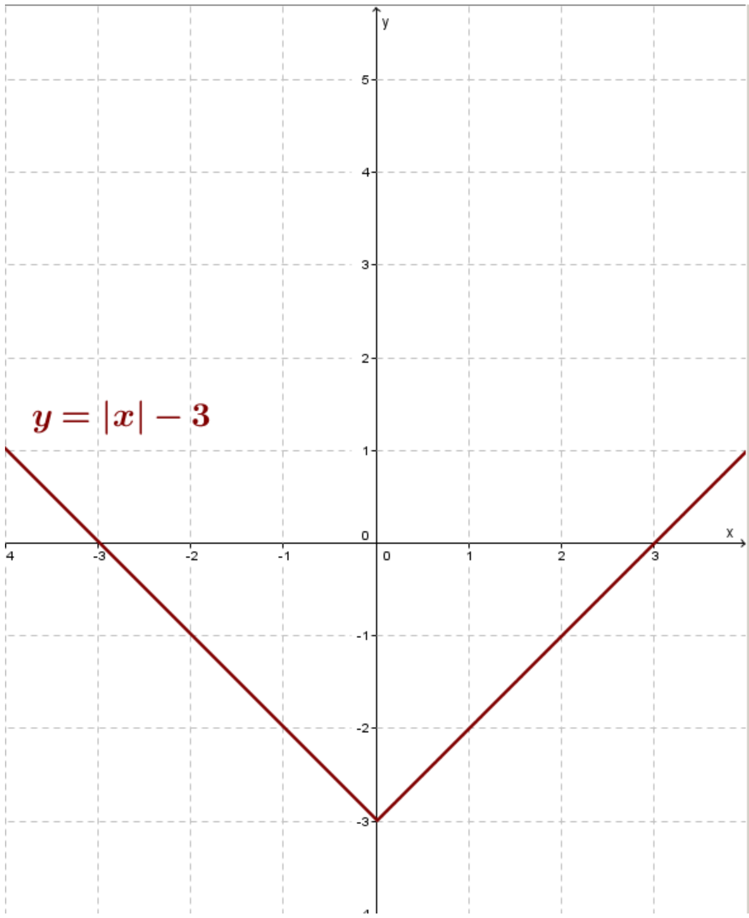
Вершина: $(-2;0)$



в) $y=|x|-3$

$a=0,\ b=-3$

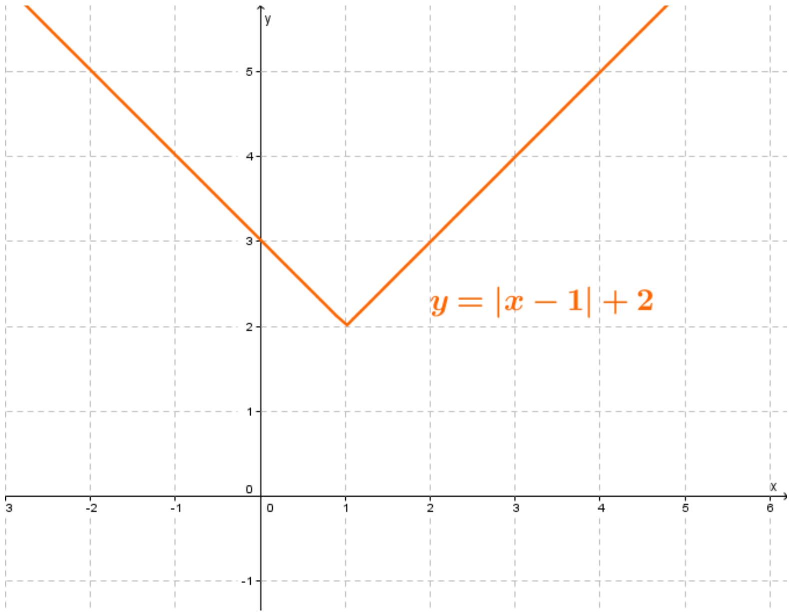
Вершина: $(0;-3)$



г) $y=|x-1|+2$

$a=-1,\ b=2$

Вершина: $(1;2)$



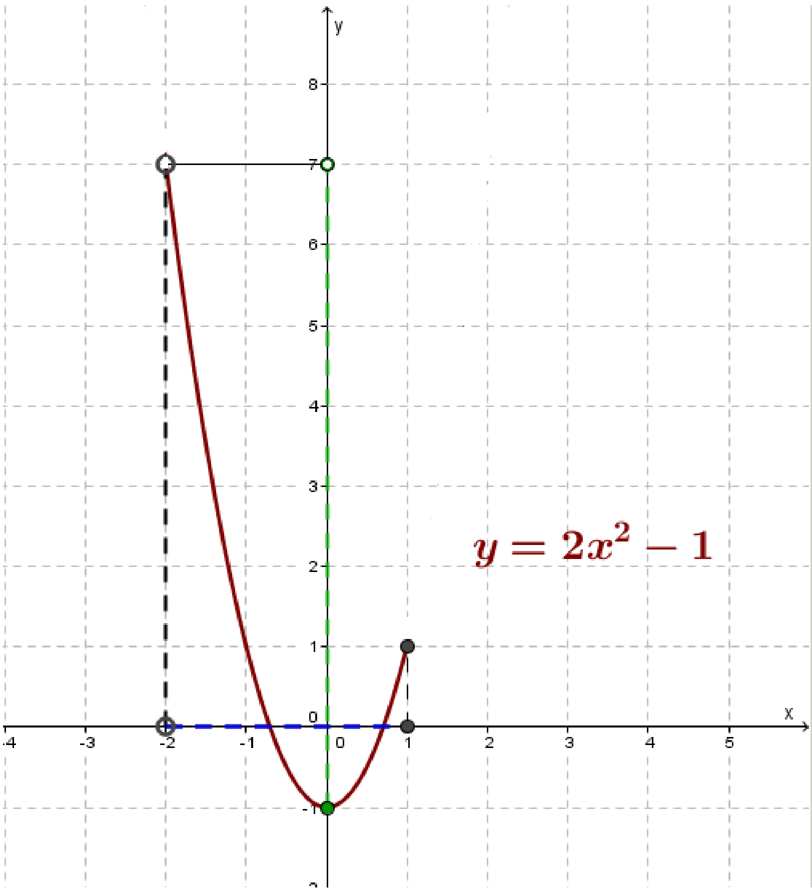
№7.21 **Постройте график функции и найдите область ее значений:**

а) $y=2x^2-1$

$x\in(-2;1]$

Парабола $y=2x^2$ смещена на 1 вниз.

$E(y)=[-1;7)$



б)

$$y=\frac{x+1}{x-1}$$
$$x\in[0;\infty)$$

$$D(y): x\neq 1$$
$$y=\frac{x-1+2}{x-1}$$
$$y=1+\frac{2}{x-1}$$

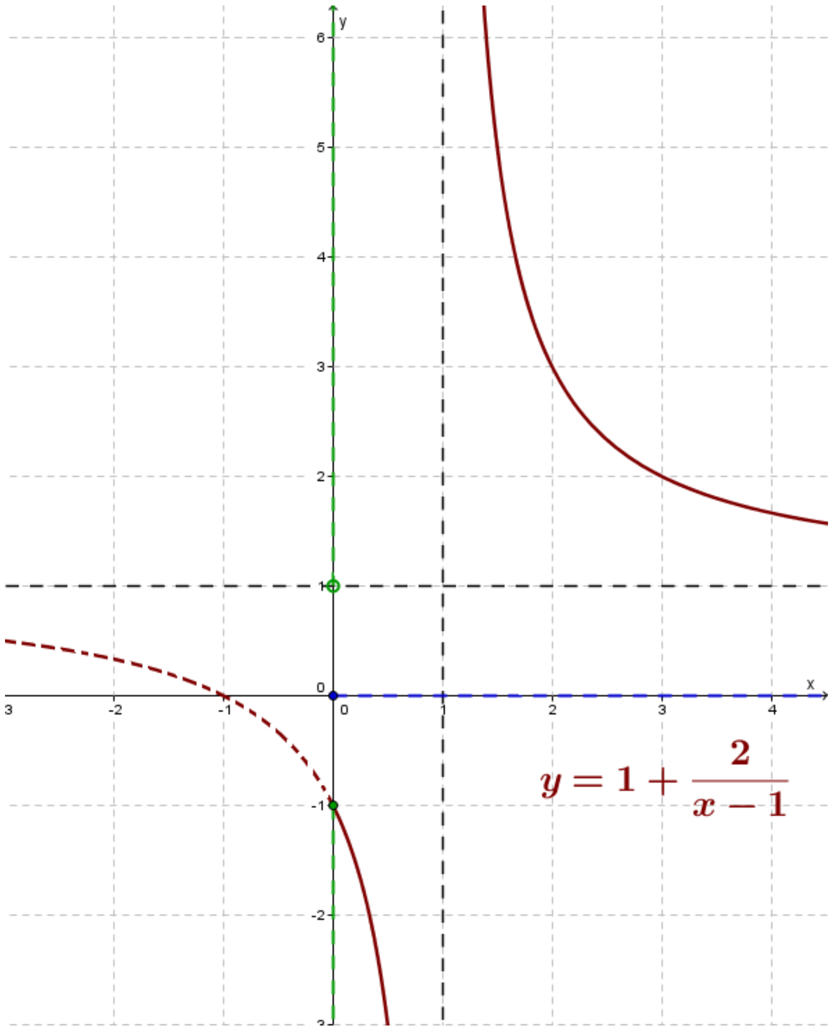
Вертикальная асимптота:

$x=1$

Горизонтальная асимптота:

$y=1$

$$E(y)=(-\infty;-1]\cup(1;\infty)$$



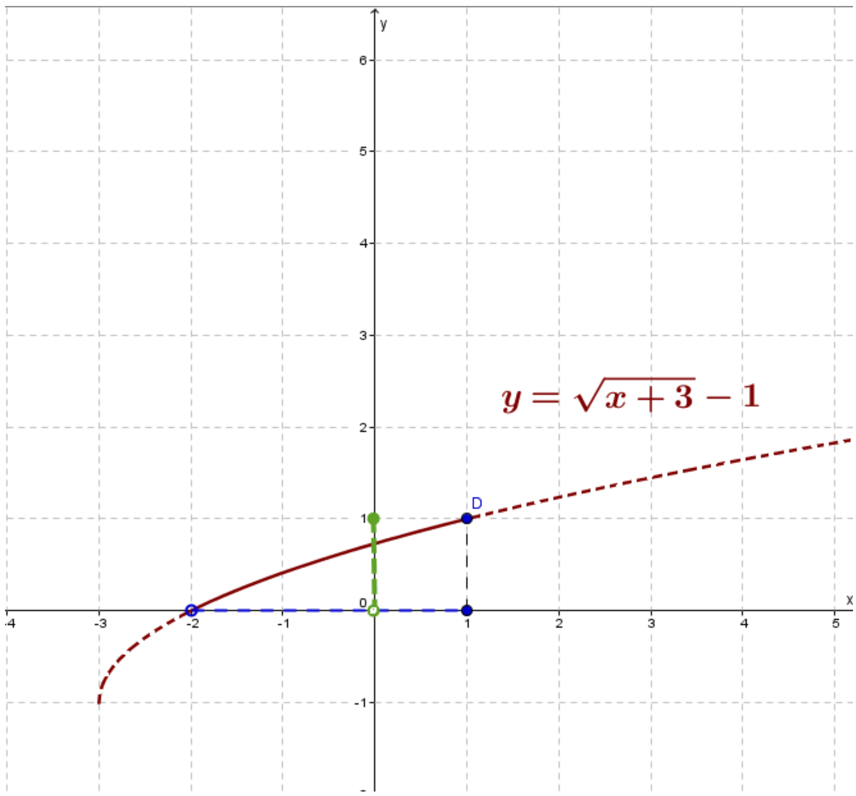
в)

$$y=\sqrt{x+3}-1$$
$$x\in(-2;1]$$

$$D(y)=[-3;\infty)$$

$$y=\sqrt{x}$$
$$a=-3,\ b=-1$$

$$E(y)=(0;1]$$



№8.12 Найдите область значений функции:

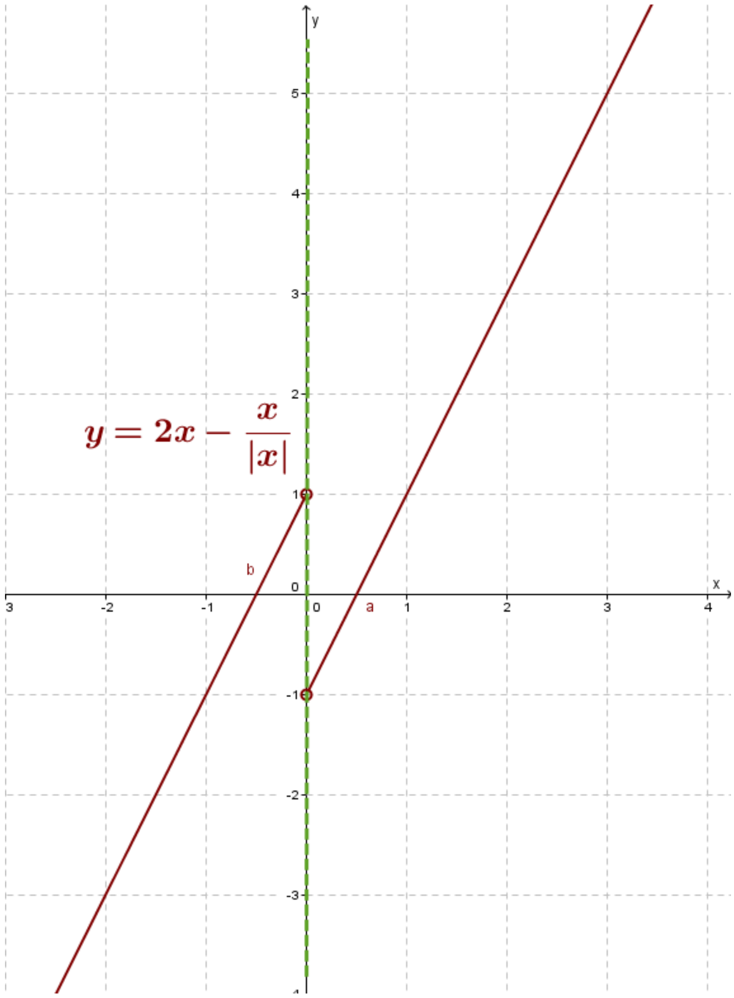
в)

$$y=2x-\frac{x}{|x|}$$

$$D(y): x\neq 0$$

1) $x>0,\ y=2x-1$
2) $x<0,\ y=2x+1$

$$E(y)=(-\infty;\infty)$$



г)

$$y=x^2-2x+\frac{x+1}{|x+1|}$$

$$D(y): x\neq -1$$

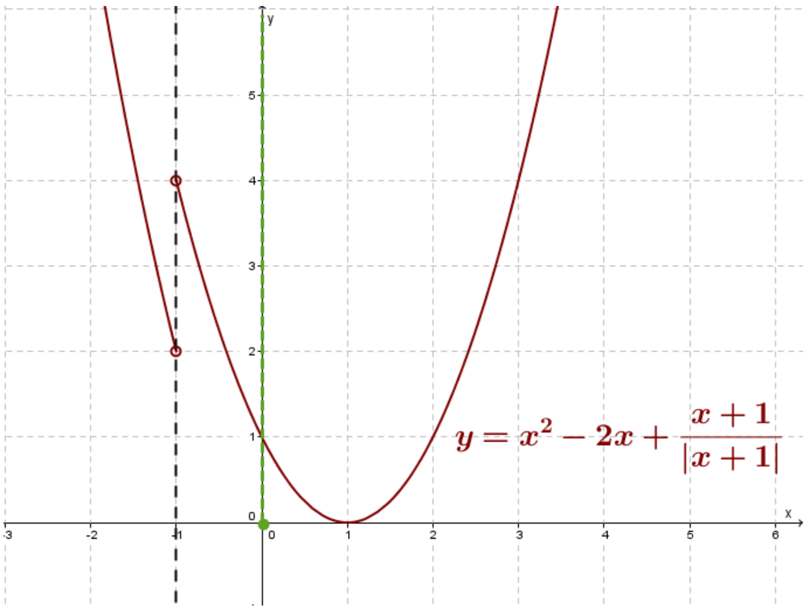
1) $x>-1,\ y=x^2-2x+1$

$$y=(x-1)^2$$

2) $x<-1,\ y=x^2-2x-1$

$$y=(x-1)^2-2$$

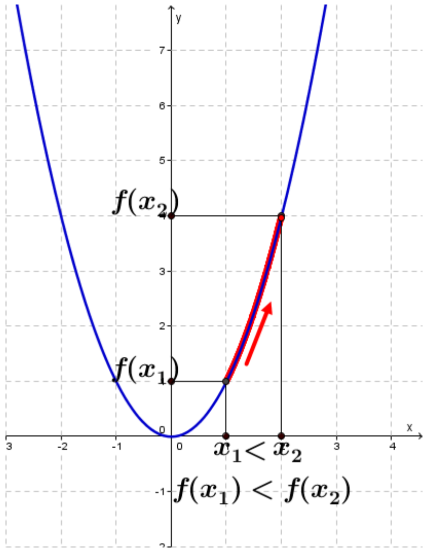
$$E(y)=[0;\infty)$$



3. Свойства функции

✓ Функцию $y = f(x)$ называют <u>**возрастающей**</u> на множестве $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

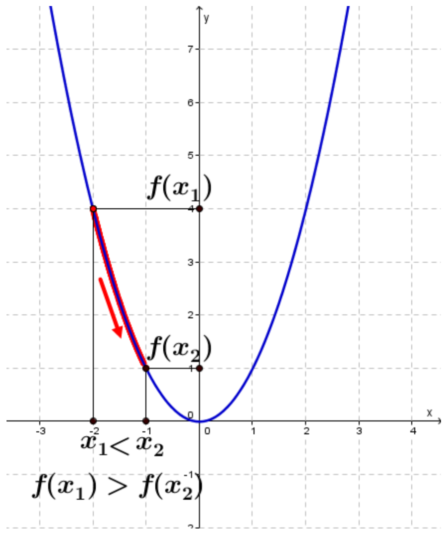
Или:
функция **возрастает**, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.



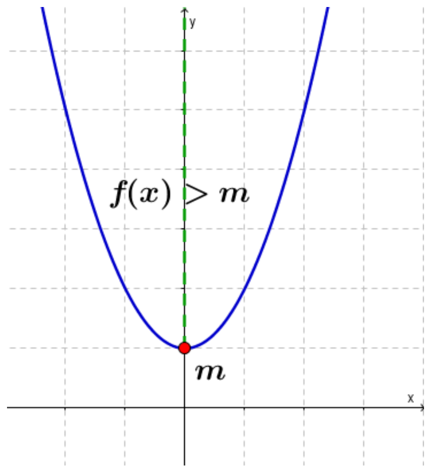
✓ Функцию $y = f(x)$ называют <u>**убывающей**</u> на множестве $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Или:
функция **убывает**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Общее название возрастающих и убывающих функций - <u>**монотонные**</u> функции.

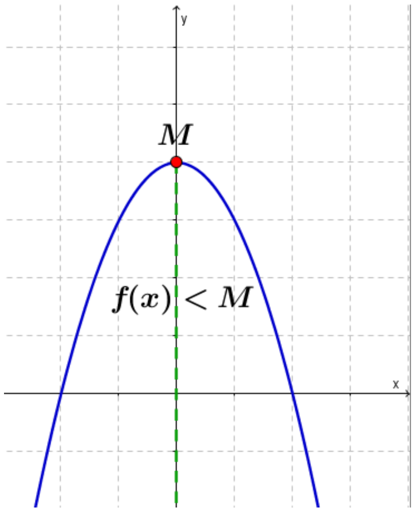


✓ Функцию $y = f(x)$ называют <u>**ограниченной снизу**</u> на множестве $X \subset D(f)$, если все значения этой функции на множестве X больше некоторого числа.
Или:
Существует такое число **m**, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$.



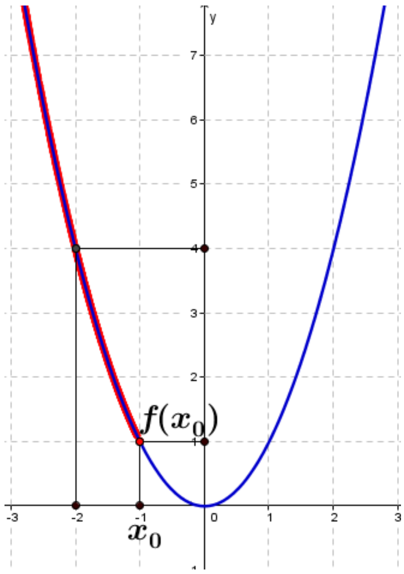
✓ Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху** на множестве $X \subset D(f)$, если все значения этой функции на множестве X меньше некоторого числа.
Или:
Существует такое число **M**, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$.

Если функция ограничена и сверху и снизу на всей области определения, то ее называют **ограниченной.**



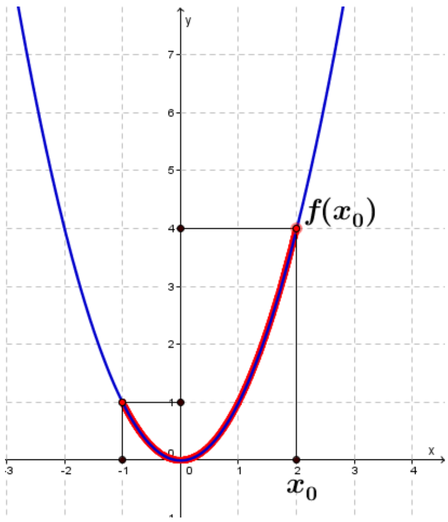
✓ Число m называют **наименьшим значением функции** $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое $x_0 \subset X$, что $f(x_0) = m$ и $f(x) \geq f(x_0)$.

$y_{наим} = f(x_0) = m$



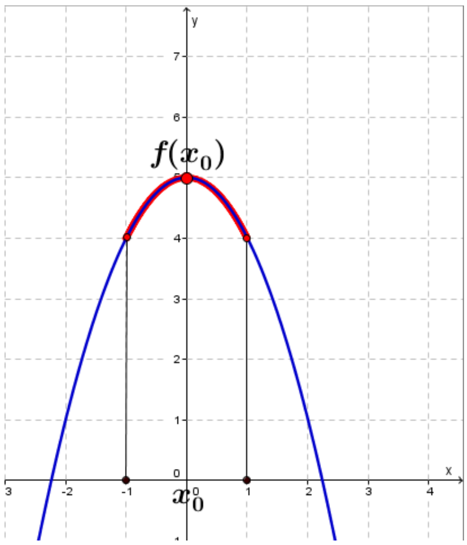
✓ Число M называют **наибольшим значением функции** $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое $x_0 \subset X$, что $f(x_0) = M$ и $f(x) \leq f(x_0)$.

$y_{наиб} = f(x_0) = M$



✓ Точку x_0 называют **точкой максимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой $f(x) < f(x_0)$.

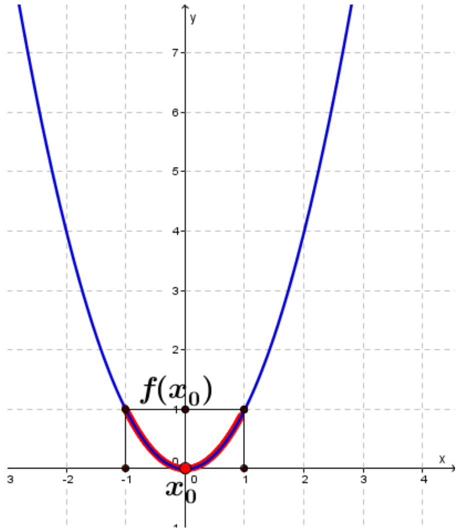
$$y_{\max} = f(x_0)$$

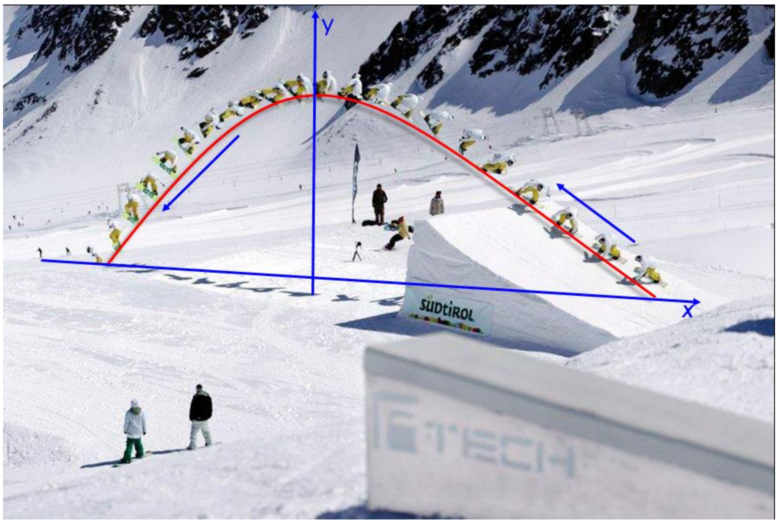


✓ Точку x_0 называют **точкой минимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой $f(x) > f(x_0)$.

$$y_{\min} = f(x_0)$$

Общее название точек минимума и максимума – **точки экстремума.**





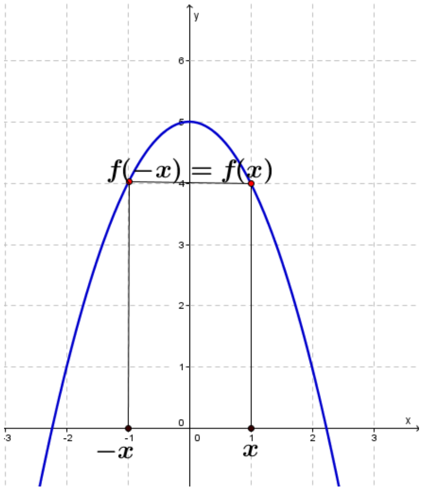
"Экстремальные виды спорта" или "экстрим"?
(Текст Эксперт http://textexpert.ru)

Слово «экстремальный» пришло в русский язык еще задолго до появление слова «экстрим». Своему появлению оно обязано латинскому слову «extremus», что означает «крайний», и которое пришло к нам благодаря французскому языку. Именно это способствовало возникновению таких слов, как «экстремум», который отображает крайние (максимальное и минимальное) значения функции, и «экстремизм», который указывает на крайние взгляды или меры в своих целях.

Слово «экстрим» появилось же в русском языке не так давно и уже от английского «extreme», которое в переводе означает «крайность». При этом стоит отметить, что «экстрим» имеет больше отношение к спорту, нежели к математике и политике. Так что под значением этого слова понимается спорт, который связан с некоторой опасностью для жизни человека. Но при этом все те, кто любит экстрим называют себя экстремалами, экстремальщиками.

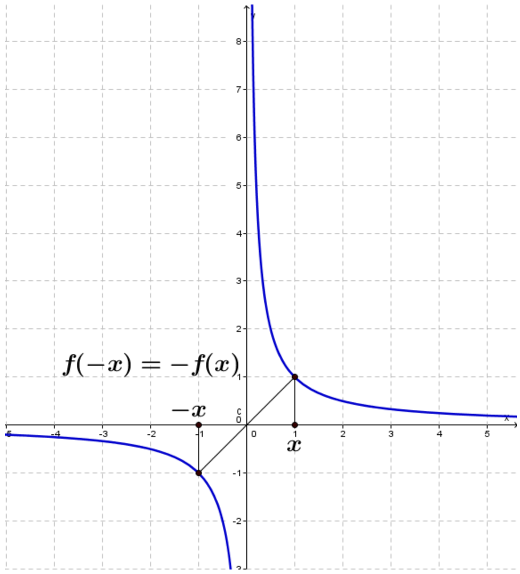
- ✓ Функцию $y = f(x)$ называют **<u>четной</u>**, если для любого $x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$.

  График четной функции симметричен относительно оси ординат.

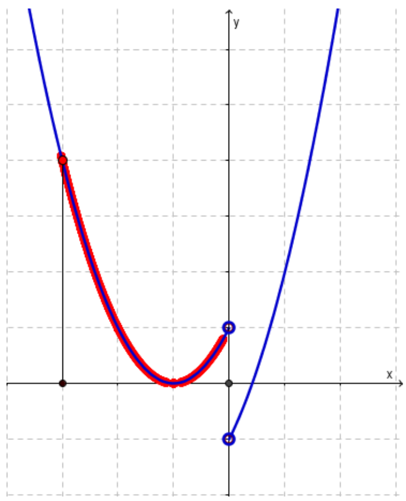


- ✓ Функцию $y = f(x)$ называют **<u>нечетной</u>**, если для любого $x \in D(f)$ $f(-x) = -f(x)$.

  График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



- ✓ **<u>Непрерывность</u>** функции на промежутке X – означает, что график функции на данном промежутке не имеет точек разрыва (т.е. представляет собой сплошную линию).



✓ *Теорема 1.*

Если каждая из двух функций возрастает на промежутке X, то их сумма также возрастает на этом промежутке.

✓ *Теорема 2.*

Если функция $y = f(x)$ возрастает или убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = a$ не может иметь более одного корня на X.

Если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X, а функция $y = g(x)$ убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = g(x)$ не может иметь более одного корня.

✓ *Теорема 3.*

Если функция $y = f(x)$, $y = g(x)$ определены на множестве X и наибольшее значение одной из этих функций на X, равное A, совпадает с наименьшим значением другой функции на том же множестве, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно на X системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

▪ *Примеры*

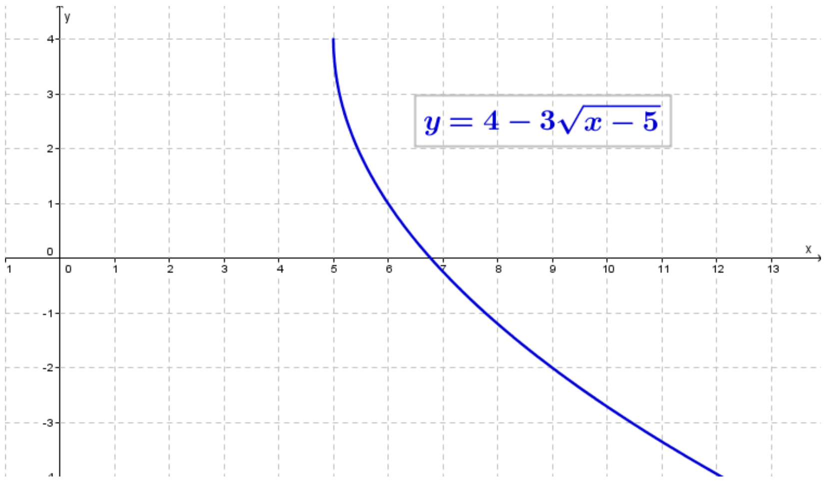
(учебник «Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Часть 2 Задачник 10 класс» Мордкович А.Г. и др.)

№8.21. **Исследуйте функцию** $y = 4 - 3\sqrt{x-5}$ **и постройте ее график.**

1. $D(y)$: $x \geq 5$
2. $y(-x) = 4 - 3\sqrt{-x-5}$ ни четная, ни нечетная.
3. $E(y) = (-\infty; 4]$

$$\sqrt{x-5} \geq 0$$
$$-3\sqrt{x-5} \leq 0$$
$$4 - 3\sqrt{x-5} \leq 4$$
$$y \leq 4$$

4. Убывает при $x \geq 5$;
ограничена сверху;
$y_{наиб.} = 4$ при $x = 5$;
непрерывна на всей $D(y)$.



№8.29. **Пусть функция** $y = f(x)$ **возрастает на** $\mathbb{R}$ **. Решите:**

а) **Уравнение** $f(3x+2) = f(4x^2+x)$.

Для монотонных функций: из равенства значений функции следует равенство аргументов. Значит,

$$3x+2=4x^2+x$$
$$2x^2-x-1=0$$
$$\underline{x_1=1} \quad \underline{x_2=-0{,}5}$$

б) **Неравенство** $f(3x+2) < f(4x^2+x)$.

Для **возрастающей** функции: большему значению функции соответствует большее значение аргумента. Значит, сравнивая аргументы, **знак неравенства не меняем.**

$$3x+2<4x^2+x$$
$$2x^2-x-1>0$$
$$(x-1)(x+0{,}5)>0, \quad \underline{x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(1;\infty)}$$

№8.30. **Пусть функция** $y = f(x)$ **убывает на** $\mathbb{R}$ **. Решите:**

а) **Неравенство** $f\left(\dfrac{1}{3x^2+4x-7}\right) \ge f\left(\dfrac{1}{2x^2+3x-5}\right)$.

Для **убывающей** функции: большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента. Значит, сравнивая аргументы, **знак неравенства меняем.**

$$\frac{1}{3x^2+4x-7} \le \frac{1}{2x^2+3x-5}$$
$$\frac{1}{3(x-1)\left(x+\frac{7}{3}\right)} - \frac{1}{2(x-1)(x+2{,}5)} \le 0$$
$$\frac{x+2}{(x-1)\left(x+\frac{7}{3}\right)(x+2{,}5)} \le 0, \quad \underline{x\in(-\infty;-2{,}5)\cup\left(-2\frac{1}{3};-2\right]\cup(1;\infty)}$$

№8.34. **Решите уравнение** $x^3 = 10 - x$ **:**

б) Т.к. $f(x) = x^3\ (\uparrow)$ возрастает на $\mathbb{R}$, а

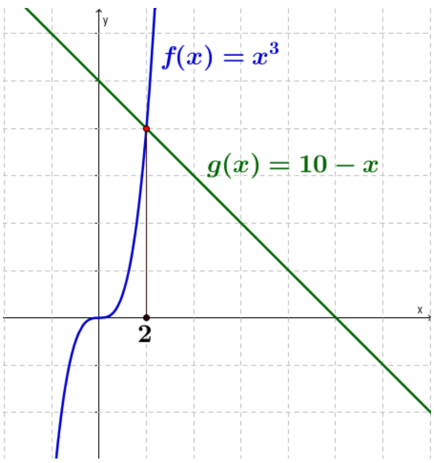
$g(x) = 10 - x\ (\downarrow)$ убывает на $\mathbb{R}$, то

уравнение не может иметь более одного корня.

Пусть $x = 2$.

Проверка: $\begin{aligned} 2^3 &= 10-2 \\ 8 &= 8, \end{aligned}$ верно.

Тогда $x = 2$ - корень уравнения.



Ответ: 2.

№8.35. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=23-2x$ **:**

а) Т.к. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-5}\ (\uparrow)$ возрастает на $[5;\infty)$, как сумма двух возрастающих функций, а $g(x)=23-2x\ (\downarrow)$ убывает на $[5;\infty)$, то уравнение не может иметь более одного корня.

Пусть $x=9$.

Проверка: $\begin{array}{l}\sqrt{9}+\sqrt{9-5}=23-2\cdot 9\\ 5=5,\end{array}$ верно. Тогда $x=9$ - корень уравнения. *Ответ: 9.*

№8.52. Решите уравнение $\sqrt{x^{100}+49}=7-x^4$.

а) Пусть $f(x)=\sqrt{x^{100}+49}$.

Найдем множество значений функции $f(x)$.

$$x^{100}\ge 0$$
$$x^{100}+49\ge 49$$
$$\sqrt{x^{100}+49}\ge\sqrt{49}$$
$$f(x)\ge 7$$
$$f_{наим}=7$$

Пусть $g(x)=7-x^4$.

Найдем множество значений функции $g(x)$.

$$-x^4\le 0$$
$$7-x^4\le 7$$
$$g(x)\le 7$$
$$g_{наиб}=7$$

Тогда исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^{100}+47}=7\\ 7-x^4=7\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: 0.

№8.52. Решите уравнение $\sqrt{x^2-2x+5}=1+2x-x^2$.

б) Пусть $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$.

$$\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{(x-1)^2+4}\ge 2$$
$$f_{наим}=2$$

Пусть $g(x)=1+2x-x^2$.

$$g(x)=1+2x-x^2=-(x-1)^2+2\le 2.$$
$$g_{наиб}=2$$

Тогда исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+5}=2\\ 1+2x-x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: 1.

➢ **Исследуйте функцию на четность.**

а) $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2+1}$

$$\underline{f(-x)}=\frac{(-x)^3-2\cdot(-x)}{(-x)^2+1}=$$
$$=\frac{-x^3+2x}{x^2+1}=-\frac{x^3-2x}{x^2+1}=\underline{-f(x)}$$

Нечетная функция.

б) $f(x)=x^4-|x|+1$

$$\underline{f(-x)}=(-x)^4-|-x|+1=$$
$$=x^4-|x|+1=\underline{f(x)}$$

Четная функция.

в) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

$$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}=\frac{-(x+1)}{-(x-1)}=$$
$$=\frac{x+1}{x-1}$$

Ни четная, ни нечетная функция.

4. Тесты: Числовые функции

▪ Тест 1 **Вариант 1**

№1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{8-\frac{x^2}{2}}$.

№2. Найдите область значений функции $y=-x^2+5x-9$.

№3. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{x-2x^3}{2+|x|}$ на четность.

№4. Найдите нули функции $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{4}{x}$.

№5. При каких значениях x $f(x)<0$, если $f(x)=\frac{3-2x}{4x+1}$.

№6. Исследуйте графически функцию на монотонность $f(x)=\sqrt{9-6x+x^2}$.

№7. Дана функция $f(x)=x^3-2ax+5$. Известно, что $f(-1)=-3$. Найдите $f(-2)$.

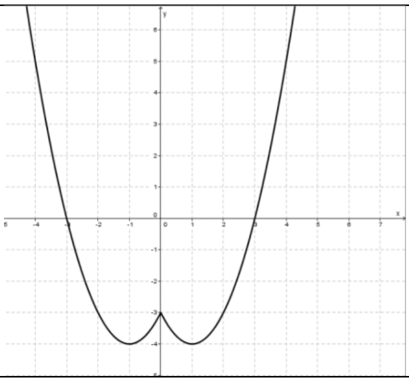
№8. График какой функции изображен на рисунке?

1) $y=\left|x^2-2x-3\right|$;

2) $y=x^2-2|x|-3$;

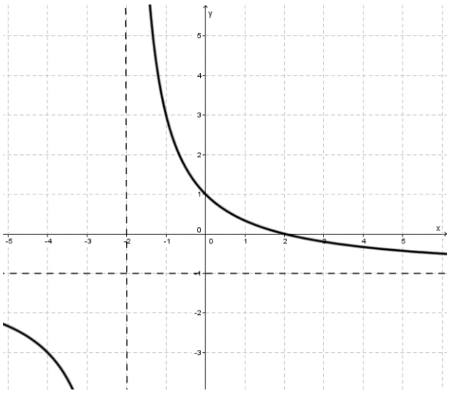
3) $y=\left|x^2+2x-3\right|$;

4) $y=x^2+2|x|-3$.

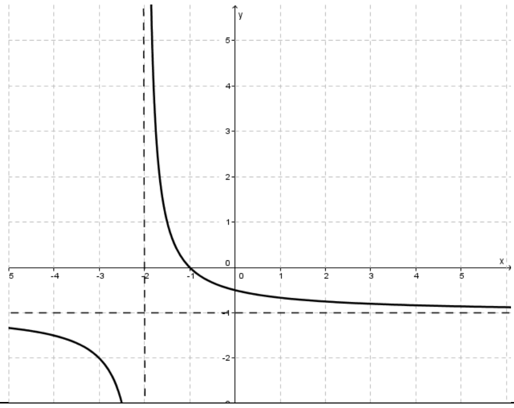


№9. Укажите график функции $y=\frac{4}{x+2}-1$.

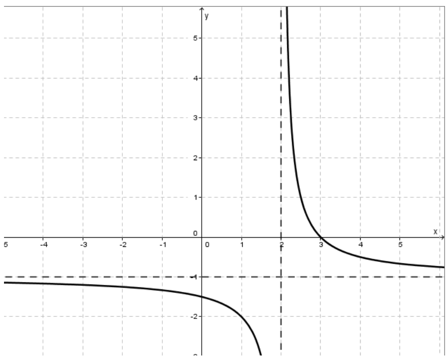
1)



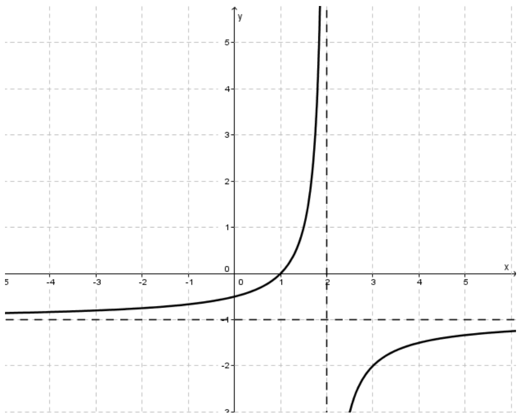
2)



3)



4)



▪ *Тест 1* Вариант 2

№1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{3x-\dfrac{x^2}{4}}$.

№2. Найдите область значений функции $y=x^2+3x-1$.

№3. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{|x|-7}{2-x^2}$ на четность

№4. Найдите нули функции $f(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{x}$.

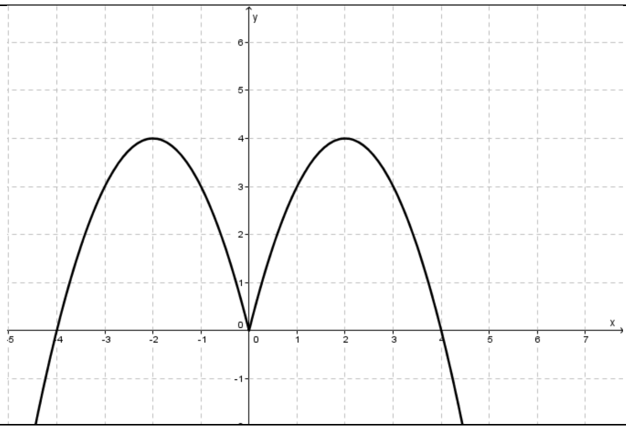
№5. При каких значениях *x* $f(x)>0$, если $f(x)=\dfrac{5+2x}{3x-1}$.

№6. Исследуйте графически функцию на монотонность $f(x)=\sqrt{4+4x+x^2}$.

№7. Дана функция $f(x)=-x^3-4ax-3$. Известно, что $f(-2)=1$. Найдите $f(-1)$.

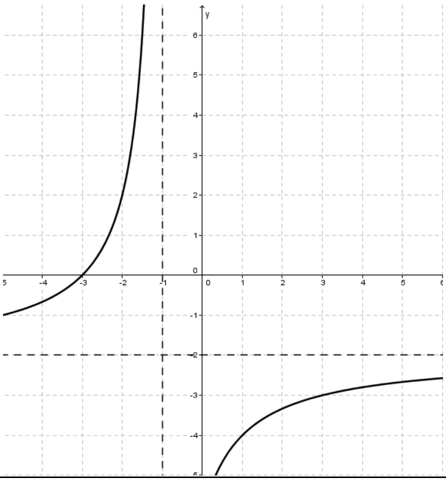
№8. График какой функции изображен на рисунке?

1) $y=-x^2+4|x|$;
2) $y=-x^2+2|x|$;
3) $y=-x^2-4|x|$;
4) $y=\left|-x^2-2|x|\right|$.

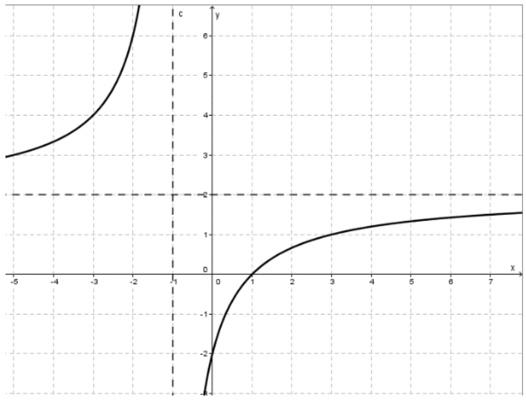


№9. Укажите график функции $y=\dfrac{4}{x-1}+2$.

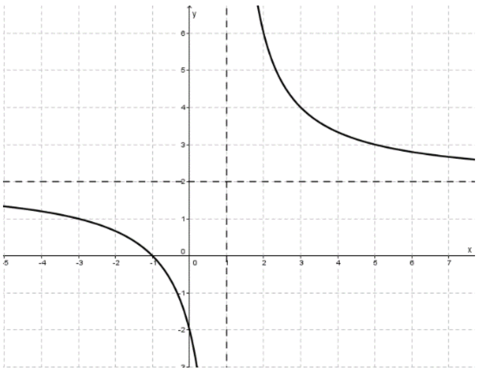
1)



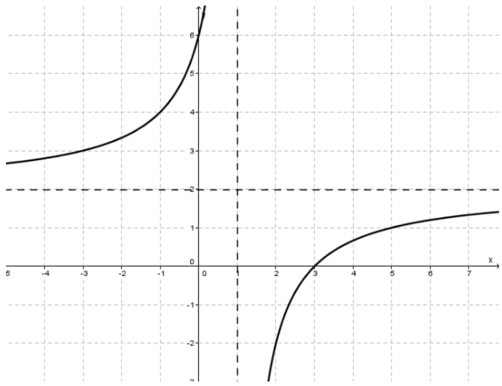
2)



3)



4)



▪ *Ответы (тест 1)* Числовые функции

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9
Вар. 1	$[-4;4]$	$(-\infty;-2,75]$	*нечетная*	$\pm 2\sqrt{2}$	$(-\infty;-0,25)$; $(1,5;\infty)$	$f(x)\searrow$ при $x\in(-\infty;3]$; $f(x)\nearrow$ при $x\in[3;\infty)$	**-17**	**2**	**1**
Вар. 2	$[0;12]$	$[-3,25;\infty)$	*четная*	$\pm\sqrt{6}$	$(-\infty;-2,5)$; $\left(\frac{1}{3};\infty\right)$	$f(x)\nearrow$ при $x\in[-2;\infty)$; $f(x)\searrow$ при $x\in(-\infty;-2]$	**-4**	**1**	**3**

▪ *Решение (тест 1)* Числовые функции

Вариант 1

№1.

$$8-\frac{x^2}{2}\ge 0,\quad 16-x^2\ge 0,\quad (x-4)(x+4)\le 0,\quad x\in[-4;4].$$

Ответ: $[-4;4]$.

№2.

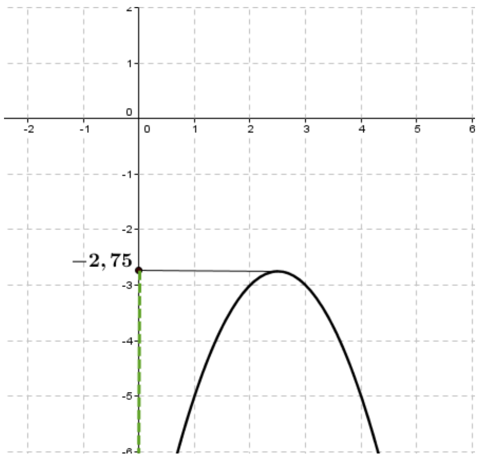
$$y=-x^2+5x-9$$

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{-5}{2}=2,5$$

$$y_в=-6,25+12,5-9=-2,75$$

$$y\in(-\infty;-2,75].$$

Ответ: $(-\infty;-2,75]$



№3.

$$\underline{f(-x)}=\frac{-x-2(-x)^3}{2+|-x|}=\frac{-x+2x^3}{2+|x|}=-\frac{x-2x^3}{2+|x|}=\underline{-f(x)}$$ нечетная функция.

Ответ: нечетная.

№4.

$$f(x)=0,\quad \frac{x}{2}-\frac{4}{x}=0,\quad x^2=8\Leftrightarrow \underline{x=\pm 2\sqrt{2}}\ .$$

Ответ: $\pm 2\sqrt{2}$.

№5.

$$\frac{3-2x}{4x+1}<0,\quad \frac{2x-3}{4x+1}>0,\quad x\in(-\infty;-0,25)\cup(1,5;\infty).$$

Ответ: $(-\infty;-0,25)\cup(1,5;\infty)$.

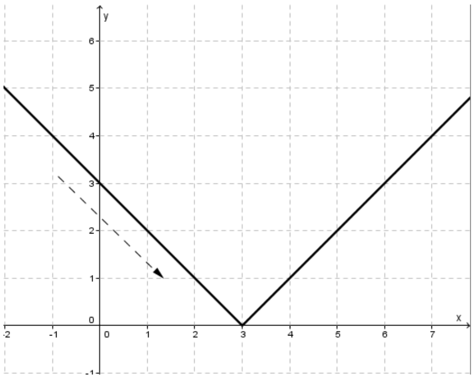
№6. $f(x)=\sqrt{9-6x+x^2}$

$f(x)=|x-3|$.

Ответ:

$f(x)\searrow$ при $x\in(-\infty;3]$

$f(x)\nearrow$ при $x\in[3;\infty)$



№7. $f(x)=x^3-2ax+5$.

1) $f(-1)=-3$.

$(-1)^3-2a\cdot(-1)+5=-3$

$a=-3{,}5$

2)

$f(x)=x^3-2\cdot(-3{,}5)x+5$

$f(x)=x^3+7x+5$

$f(-2)=(-2)^3+7\cdot(-2)+5=-17$

Ответ: -17.

№8. $y=x^2-2|x|-3$

Четная функция, график симметричен относительно оси ординат.

Контрольные точки: $x=\pm3,\ y=0$.

Ответ: 2.

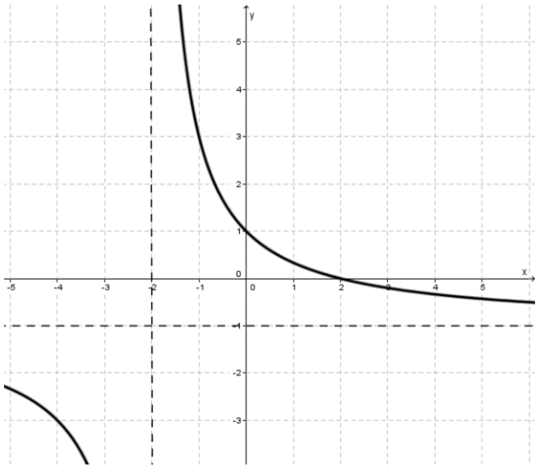
№9. $y=\dfrac{4}{x+2}-1$

График функции $y=\dfrac{4}{\underset{\text{на 2 ед.}}{\overleftarrow{x}}}\downarrow$ *на* 1 *ед.*

$x\neq-2,\ y\neq-1$

Контрольная точка: $x=0,\ y=1$

Ответ: 1.



Вариант 2

№1. $3x-\frac{x^2}{4}\geq 0,\quad 12x-x^2\geq 0,\quad x(x-12)\leq 0,\quad x\in[0;12].$ *Ответ:* $[0;12]$.

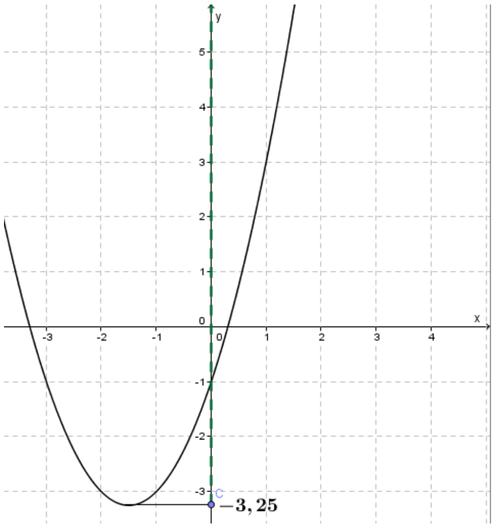
№2. $y=x^2+3x-1$

$x_в=-\frac{3}{2}=-1,5$

$y_в=-3,25$

$y\in[-3,25;\infty)$.

Ответ: $[-3,25;\infty)$



№3. $f(-x)=\frac{|-x|-7}{2-(-x)^2}=\frac{|x|-7}{2-x^2}=f(x)$ четная функция. *Ответ: четная.*

№4. $f(x)=0,\quad \frac{x}{3}-\frac{2}{x}=0,\quad x^2=6\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}$. *Ответ:* $\pm\sqrt{6}$.

№5. $\frac{5+2x}{3x-1}>0,\quad x\in(-\infty;-2,5)\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$. *Ответ:* $(-\infty;-2,5)\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$.

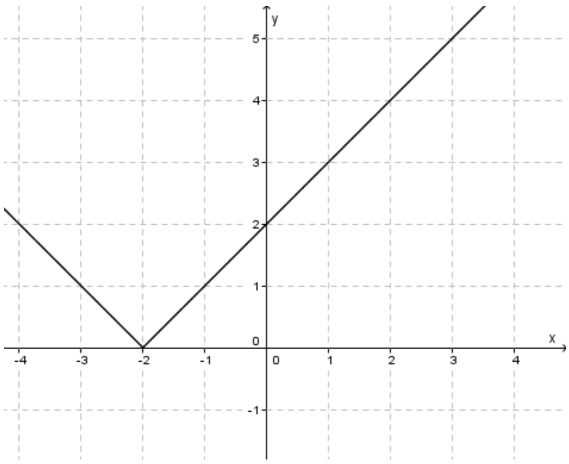
№6. $f(x)=\sqrt{4+4x+x^2}$

$f(x)=|x+2|$.

Ответ:

$f(x)\nearrow$ при $x\in[-2;\infty)$

$f(x)\searrow$ при $x\in(-\infty;-2]$



№7. $f(x)=-x^3-4ax-3$

1) $f(-2)=1$

$-(-2)^3-4a\cdot(-2)-3=1,\quad a=-0,5$

2)

$f(x)=-x^3+2x-3,\quad f(-1)=-(-1)^3+2\cdot(-1)-3=-4$

Ответ: -4.

№8. График четной функции $y=-x^2+4|x|$ симметричен относительно оси ординат;
Ветви вниз. Проходит через начало координат.
Контрольные точки: $x=\pm 4,\ y=0$.

№9.

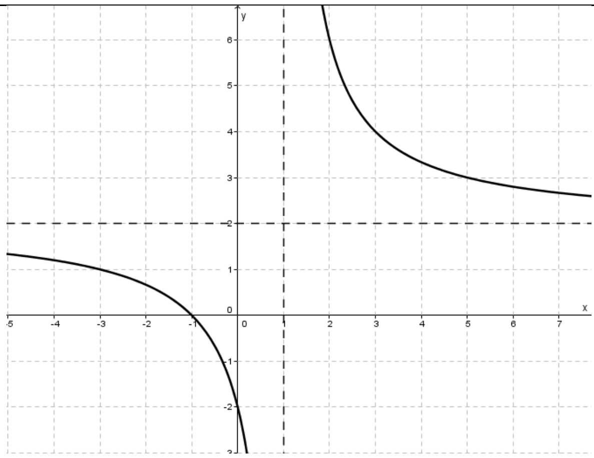
$$y=\frac{4}{x-1}+2$$

$$y=\frac{4}{\underset{\text{на 1 ед.}}{\underrightarrow{x}}}\ \uparrow \text{на 2 ед.}$$

$x\neq 1,\ y\neq 2$

Контрольная точки:

$x=0,\ y=-2$



▪ *Тест 2* Вариант 1

№1. Постройте график функции $y=\dfrac{(x-1)\left(x^2+3x+2\right)}{x+2}$ и исследуйте ее по графику.

№2. Определите, при каких значениях *m* прямая $y=m$ имеет с графиком $y=\dfrac{(x-1)\left(x^2+3x+2\right)}{x+2}$ ровно одну общую точку.

№3. Найти область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{(x-2)^2\left(x^2+6x+5\right)}{3x-5-2x^2}}$.

№4. Найдите множество целых значений функции $y=\sqrt{8,5+\sqrt{63+2x-x^2}}$.

№5. Известно, что функция $y=f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$. Решите неравенство: $f\left(\dfrac{6x^2+x+9}{x^2+3}\right)\le f(5)$.

№6. Решите уравнение $\sqrt{x+1}=11-x$.

▪ *Тест 2* Вариант 2

№1. Постройте график функции $y=\dfrac{(x-2)\left(x^2-5x+4\right)}{x-4}$ и исследуйте ее по графику.

№2. Определите, при каких значениях *m* прямая $y=m$ имеет с графиком $y=\dfrac{(x-2)\left(x^2-5x+4\right)}{x-4}$ ровно одну общую точку.

№3. Найти область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)^2\left(x^2-x+3\right)}{\left(9-x^2\right)x}}$.

№4. Найдите множество целых значений функции $y=\sqrt{0,5+\sqrt{96-4x-x^2}}$.

№5. Известно, что функция $y=f(x)$ убывает на $\mathbb{R}$. Решите неравенство: $f\left(\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}\right)>f(2)$.

№6. Решите уравнение $\sqrt{x+1}=11-x$.

▪ *Ответы (тест 2)* Числовые функции

	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	*-1 и 3*	$[-5;-1]\cup\{2\}$	*3 и 4*	$[-3;2]$	*8*
Вар.2	*-0,25 и 6*	$(-\infty;-3)\cup(0;3)$	*1; 2 и 3*	$(1;6)$	*0*

▪ *Решение (тест 2)* Числовые функции

Вариант 1

№1. **Постройте график функции** $y=\dfrac{(x-1)\left(x^2+3x+2\right)}{x+2}$ **и исследуйте ее по графику.**

Решение:

$D(y):\ x\neq 2 \qquad y=x^2-1$

Функция имеет выколотую точку при $x=-2$.

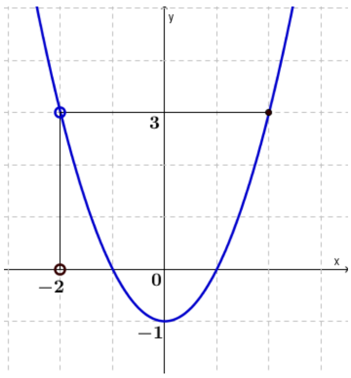
Убывает при $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;0]$;

возрастает при $x\in[0;\infty)$;

ограничена снизу, $y_{наим}=-1$ при $x=0$;

$x_{\min}=0,\ y_{\min}=-1$;

$E(y)=[-1;\infty)$.

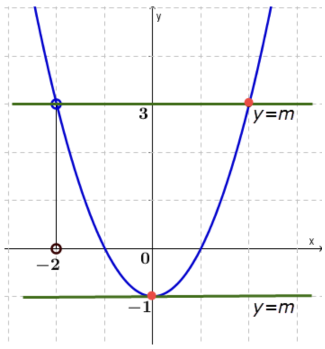


№2. **Определите, при каких значениях m прямая** $y=m$ **имеет с графиком** $y=\dfrac{(x-1)\left(x^2+3x+2\right)}{x+2}$ **ровно одну общую точку.**

Решение:

При *m=-1* и *m=3* прямая $y=m$ имеет с графиком функции

$y=\dfrac{(x-1)\left(x^2+3x+2\right)}{x+2}$ ровно одну общую точку.



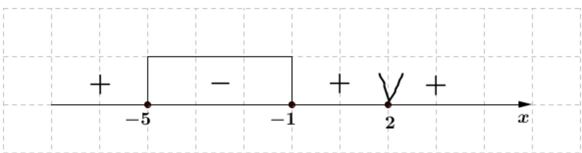
Ответ: -1 и 3.

№3. **Найти область определения функции** $y=\sqrt{\dfrac{(x-2)^2\left(x^2+6x+5\right)}{3x-5-2x^2}}$.

$$D(y):\ \frac{(x-2)^2\left(x^2+6x+5\right)}{3x-5-2x^2}\geq 0$$

$$\frac{(x-2)^2(x+5)(x+1)}{2x^2-3x+5}\leq 0 \quad \Bigg|\cdot\left(2x^2-3x+5\right)>0,\ D<0$$

$$(x-2)^2(x+5)(x+1)\leq 0$$



$x\in[-5;-1]\cup\{2\}$

Ответ: $[-5;-1]\cup\{2\}$

№4. **Найдите множество целых значений функции** $y=\sqrt{8,5+\sqrt{63+2x-x^2}}$.

$$y=\sqrt{8,5+\sqrt{-x^2+2x+63}}$$

$$y=\sqrt{8,5+\sqrt{-(x-1)^2+64}}$$

$$-(x-1)^2\le 0$$

$$0\le -(x-1)^2+64\le 64$$

$$0\le \sqrt{-(x-1)^2+64}\le 8$$

$$8,5\le 8,5+\sqrt{-(x-1)^2+64}\le 16,5$$

$$\sqrt{8,5}\le \sqrt{8,5+\sqrt{-(x-1)^2+64}}\le \sqrt{16,5}$$

$$E(y)=\left[\sqrt{8,5};\sqrt{16,5}\right]$$

Целые значения из $E(y)=\{3;4\}$. *Ответ: 3 и 4.*

№5. **Известно, что функция** $y=f(x)$ **возрастает на** $\mathbb{R}$ **. Решите неравенство:**

$$f\left(\frac{6x^2+x+9}{x^2+3}\right)\le f(5).$$

Решение: Т.к. функция возрастающая, то большему значению функции соответствует большее значение аргумента.

$$\frac{6x^2+x+9}{x^2+3}\le 5 \ \Big|\cdot(x^2+3)>0$$

$x^2+x-6\le 0,\quad (x-2)(x+3)\le 0,\quad \underline{-3\le x\le 2}$

Ответ: $[-3;2]$.

№6. **Решите уравнение** $\sqrt{x+1}=11-x$.

Решение:

$f(x)=\sqrt{x+1}$ возрастающая функция при $x\ge -1$.

$g(x)=11-x$ убывающая функция. Тогда уравнение не может иметь более одного корня. Пусть $x=8$, тогда

$\sqrt{8+1}=11-8$

$3=3$

, верно. Значит, $x=8$ корень уравнения.

Ответ:8.

Вариант 2

№1. **Постройте график функции** $y=\dfrac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-4}$ **и исследуйте ее по графику.**

Решение:

$D(y):\ x\neq 4 \qquad y=x^2-3x+2$

Функция имеет выколотую точку при $x=4$.

Убывает при $x\in(-\infty;1,5]$;

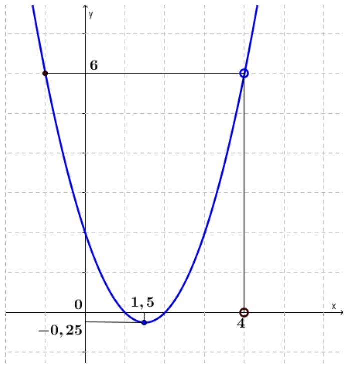
возрастает при $x\in[1,5;4)\cup(4;\infty)$;

ограничена снизу,

$y_{наим}=-0,25$ при $x=1,5$;

$x_{\min}=1,5,\ y_{\min}=-0,25$;

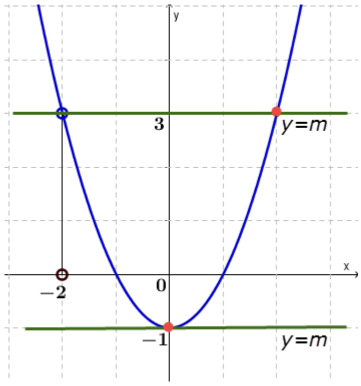
$E(y)=[-0,25;\infty)$.



№2. **Определите, при каких значениях m прямая** $y=m$ **имеет с графиком** $y=\dfrac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-4}$ **ровно одну общую точку.**

Решение:

При *m=-0,25* и *m=6* прямая $y=m$ имеет с графиком функции $y=\dfrac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-4}$ ровно одну точку.



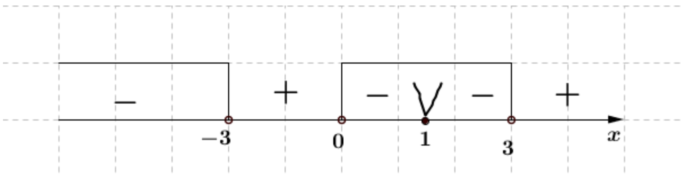
Ответ: -0,25 и 6.

№3. **Найти область определения функции** $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)^2(x^2-x+3)}{(9-x^2)x}}$.

$$D(y):\ \frac{(x-1)^2(x^2-x+3)}{(9-x^2)x}\geq 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{(x^2-9)x}\leq 0 \quad \Bigg| :(x^2-x+3)>0,\ D<0$$

$$\frac{(x-1)^2}{(x-3)(x+3)x}\leq 0$$



$x\in(-\infty;-3)\cup(0;3)$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(0;3)$.

№4. **Найдите множество целых значений функции** $y=\sqrt{0,5+\sqrt{96-4x-x^2}}$ **.**

$$y=y=\sqrt{0,5+\sqrt{-x^2-4x+96}}$$
$$y=\sqrt{0,5+\sqrt{-(x+2)^2+100}}$$
$$-(x+2)^2\le 0$$
$$0\le -(x+2)^2+100\le 100$$
$$0\le \sqrt{-(x+2)^2+100}\le 10$$
$$0,5\le 0,5+\sqrt{-(x+2)^2+100}\le 10,5$$
$$\sqrt{0,5}\le \sqrt{0,5+\sqrt{-(x+2)^2+100}}\le \sqrt{10,5}$$
$$E(y)=\left[\sqrt{0,5};\sqrt{10,5}\right]$$

Ответ: 1; 2 и 3.

№5. **Известно, что функция** $y=f(x)$ **убывает на** $\mathbb{R}$ **. Решите неравенство:**

$$f\left(\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}\right)>f(2).$$

Т.к. функция убывающая, то большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

$$\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2 \;\Big|\cdot(x^2+1)>0$$

Ответ: $(1;6)$.

$x^2-7x+6<0,\quad (x-1)(x-6)<0,\quad \underline{1<x<6}$

№6. **Решите уравнение** $\sqrt{4-x}=x+2$ **.**

Решение:

$f(x)=\sqrt{4-x}$ убывающая функция при $x\le 4$.

$g(x)=x+2$ возрастающая функция. Тогда уравнение не может иметь более одного корня. Пусть $x=0$, тогда

$\sqrt{4}=0+2$
$2=2$
, верно. Значит, $x=0$ корень уравнения.

Ответ: 0.

5. Дополнительные задачи на свойства четности и периодичности функций

✓ Функцию $y=f(x)$ называют **четной**, если для любого $x\in D(f)$ $\quad f(-x)=f(x)$.
График четной функции симметричен относительно оси ординат.
Функцию $y=f(x)$ называют **нечетной**, если для любого $x\in D(f)$ $\quad f(-x)=-f(x)$.
График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

✓ Если функция $y=f(x)$, $x\in X$, имеет период T, то любое число, кратное T (т.е. число вида kT, $k\in Z$), также является периодом: $f(x-kT)=f(x)=f(x+kT)$.

Основной период - наименьший положительный период.

Если T период для функции $y=f(x)$, то T есть период для функции

$$y=n\cdot f(x+a)+b,\quad (n\neq 0).$$

Если T период для функции $y=f(x)$, то $\frac{T}{|k|}$ есть период для функции

$$y=n\cdot f(k\cdot x+a)+b,\quad (n\neq 0).$$

Если период функции $y=f(x)$ равен T_1, а период функции $y=g(x)$ равен T_2, то период функции

$$y=h(x)=f(x)+g(x) \text{ равен } T_3=HOK(T_1,T_2).$$

▪ *Примеры*

№1. Найдите значение функции $y=2f(-a)\cdot(f(a)-4g(-a))+(g(-a))^2$, если известно, что функция $f(x)$ - четная, а $g(x)$ - нечетная, и $f(a)=1, g(a)=-2$.

№2. Нечетная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x)=x(x+1)(x+3)(x-7)$. Найдите значение функции $h(x)=\frac{7f(x)+7g(x)}{f(x)-g(x)}$ при $x=-2$.

№3. Нечетная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для каждого неотрицательного значения аргумента x значение этой функции на 9 меньше, чем значение функции $g(x)=(x^2-5x-3)^2$. Найдите число корней уравнения $f(x)=0$.

№4. Нечетная функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[-5;5]$. Для всякого неотрицательного значения переменной $x\in[-5;5]$ значение этой функции совпадает со значением функции $g(x)=x(x+2)(x-1)(x-7)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=0$?

№5. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = -x(x^2-1)(x^2-9)$. Какое количество целых чисел из отрезка $[-5;2]$ является решением уравнения $|f(x)+g(x)| = 2f(x)$?

№6. Периодическая функция $y = f(x)$ с периодом, равным 3, определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что $f(1) = -1$. Найдите значение выражения $2f(13) - f(-8)$.

№7. Периодическая функция $y = f(x)$ с периодом, равным 3, определена на множестве всех действительных чисел, причем на промежутке $(-1;2]$ она совпадает с функцией $y = -x^2 + 4$. Найдите значение выражения $f(2006) - f(0) + 9$.

№8. Найдите значение функции $f(19)$, если известно, что функция $y = f(x)$ четная, имеет период 10 и на отрезке $[0;5]$ функция имеет вид $y = 15 + 2x - x^2$.

№9. Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции $y = \cos^2\left(\left(a^2+2a-28\right)x\right)$ равен $\dfrac{\pi}{20}$.

№10. Найти все пары $(x;y)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \dfrac{6}{f(x)-4} + \dfrac{1}{f(y)-1} = 2 \\ \left(f(y)-1\right)\left(f(x)-4\right) = 6f(y)-6 \end{cases}$$

, где f – периодическая функция с периодом *T*=2, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x) = 10|x|$ при $-1 \le x \le 1$.

№11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x) = |a+2|\sqrt[3]{x}$ имеет 4 решений, где f – четная периодическая функция с периодом $T = \dfrac{16}{3}$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x) = ax^2$, если $0 \le x \le \dfrac{8}{3}$.

№1. **Найдите значение функции** $y=2f(-a)\cdot(f(a)-4g(-a))+(g(-a))^2$**, если известно, что функция** $f(x)$ **- четная, а** $g(x)$ **- нечетная, и** $f(a)=1, g(a)=-2.$

Решение:

$y=2f(a)\cdot(f(a)+4g(a))+(g(a))^2=2\cdot1\cdot(1+4\cdot(-2))+4=-10$. *Ответ: -10.*

№2. **Нечетная функция** $y=f(x)$ **определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции** $g(x)=x(x+1)(x+3)(x-7)$**. Найдите значение функции** $h(x)=\dfrac{7f(x)+7g(x)}{f(x)-g(x)}$ **при** $x=-2.$

Решение:

$f(-2)=-f(2)$, т.к. $f(x)-$ нечетная функция.

$f(2)=g(2)=2\cdot(2+1)(2+3)(2-7)=-150$ для всех $x\geq0$.

$g(-2)=-2\cdot(-2+1)(-2+3)(-2-7)=-18$

$h(-2)=\dfrac{7\cdot f(-2)+7\cdot g(-2)}{f(-2)-g(-2)}=\dfrac{-7\cdot(-150)+7\cdot(-18)}{-(-150)-(-18)}=5,5$ *Ответ: 5,5.*

№3. **Нечетная функция** $y=f(x)$ **определена на всей числовой прямой. Для каждого неотрицательного значения аргумента x значение этой функции на 9 меньше, чем значение функции** $g(x)=(x^2-5x-3)^2$**. Найдите число корней уравнения** $f(x)=0.$

Решение:

Поскольку функция $f(x)$ - нечетная, то $f(-x)=-f(x)$ и корни уравнения $f(x)=0$ противоположны корням уравнения $f(-x)=0$.

Для каждого $x\geq0$ по условию $g(x)-f(x)=9$.

$g(x)-9=f(x),\ f(x)=(x^2-5x-3)^2-9$.

Решим уравнение $f(x)=0$.

$(x^2-5x-3)^2-9=0,\quad \left[\begin{array}{l}x^2-5x-3=3\\ x^2-5x-3=-3\end{array}\right.,\quad \begin{cases}x=6,\ x=-1,\ x=5,\ x=0\\ x\geq0\end{cases},\ x=6,\ x=5,\ x=0$.

И, в силу нечетности функции $f(x)$ числа -6 и -5 также являются корнями уравнения $f(x)=0$.

Значит всего корней пять : $\pm6,\ \pm5,\ 0$. *Ответ: 5.*

№4. **Нечетная функция** $y=f(x)$ **определена на отрезке** $[-5;5]$**. Для всякого неотрицательного значения переменной** $x\in[-5;5]$ **значение этой функции совпадает со значением функции** $g(x)=x(x+2)(x-1)(x-7)$**. Сколько корней имеет уравнение** $f(x)=0$**?**

Решение:

Для всех $x\in[0;5]$ $f(x)=g(x)=x(x+2)(x-1)(x-7)$. Корни уравнения $f(x)=0$ $x=0$, $x=1$, $x=-2\notin[0;5]$ и $x=7\notin[0;5]$. В силу нечетности функции $f(x)$ есть корень противоположный корню $x=1$, т.е. $x=-1$. Значит, уравнение всего имеет три корня ±1 и 0 .

Ответ: 3.

№5. **Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой.**
Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = -x(x^2-1)(x^2-9)$. Какое количество целых чисел из отрезка $[-5;2]$ является решением уравнения $|f(x)+g(x)| = 2f(x)$?

Решение:

Функция $g(x)-$ нечетная, поскольку $g(-x) = -(-x)\left((-x)^2-1\right)\left((-x)^2-9\right) = x(x^2-1)(x^2-9) = -g(x)$

Функция $f(x)-$ четная по условию, значит $f(-x) = f(x)$. По условию при $x \le 0$ $g(x) = f(x)$.

Тогда при $x \ge 0$ $g(x) = -f(x)$.

При $x \le 0$ уравнение $|f(x)+g(x)| = 2f(x)$ примет вид $|2f(x)| = 2f(x)$, $f(x) = f(x)$,

учитывая, что $f(x) \ge 0$ при $x \le 0$, значит, $\begin{cases} -x(x^2-1)(x^2-9) \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$, $x \in (-\infty;-3] \cup [-1;0]$.

При $x \ge 0$ уравнение $|f(x)+g(x)| = 2f(x)$ примет вид $f(x) = 0$, его корни 1 и 3.

При всех x решением уравнения $|f(x)+g(x)| = 2f(x)$ является множество

$(-\infty;-3] \cup [-1;0] \cup \{1\} \cup \{3\}$. На заданном отрезке $[-5;2]$ всего шесть целых чисел. *Ответ:6.*

№6. **Периодическая функция $y = f(x)$ с периодом, равным 3,определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что $f(1) = -1$. Найдите значение выражения**

$$2f(13) - f(-8).$$

Решение:

$$T = 3 \Rightarrow f(13) = f(1+12) = f(1+3\cdot 4) = f(1) = -1$$

$$f(-8) = f(-9+1) = f(-3\cdot 3+1) = f(1) = -1$$

$$2\cdot f(13) - f(-8) = 2(-1) - (-1) = -2+1 = -1$$

Ответ: -1.

№7. **Периодическая функция $y = f(x)$ с периодом, равным 3, определена на множестве всех действительных чисел, причем на промежутке $(-1;2]$ она совпадает с функцией $y = -x^2+4$. Найдите значение выражения $f(2006) - f(0) + 9$.**

Решение:

$f(2006) = f(2004+2) = f(668\cdot 3+2) = f(2)$.

$2 \in (-1;2]$, $f(2) = -2^2+4 = 0$

$0 \in (-1;2]$, $f(0) = -0^2+4 = 4$

$f(2006) - f(0) + 9 = 0 - 4 + 9 = 5$. *Ответ: 5.*

№8. **Найдите значение функции $f(19)$, если известно, что функция $y = f(x)$ четная, имеет период 10 и на отрезке $[0;5]$ функция имеет вид $y = 15+2x-x^2$.**

Решение:

$f(x) = f(x+T) = f(x-T)$, где $T-$ период функции $f(x)$.

$f(19) = f(-1+20) = f(-1+2\cdot 10) = f(-1) = f(1)$

$1 \in [0;5]$, $f(1) = 15+2-1 = 16$. *Ответ: 16.*

№9. **Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции $y=\cos^2\left(\left(a^2+2a-28\right)x\right)$ равен $\dfrac{\pi}{20}$.**

Решение:

$$y=\frac{1+\cos\left(2a^2+4a-56\right)x}{2}\ ,\quad T_y=\frac{T_{\cos x}}{|k|}=\frac{2\pi}{\left|2a^2+4a-56\right|}$$

$$\frac{2\pi}{\left|2a^2+4a-56\right|}=\frac{\pi}{20},\quad \left|2a^2+4a-56\right|=40\ ,\quad \left[\begin{array}{l} a^2+2a-28=20 \\ a^2+2a-28=-20 \end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l} a=-8 \\ a=6 \\ a=-4 \\ a=2 \end{array}\right. .$$

$-8\cdot 6\cdot(-4)\cdot 2=384$.

Ответ: 384.

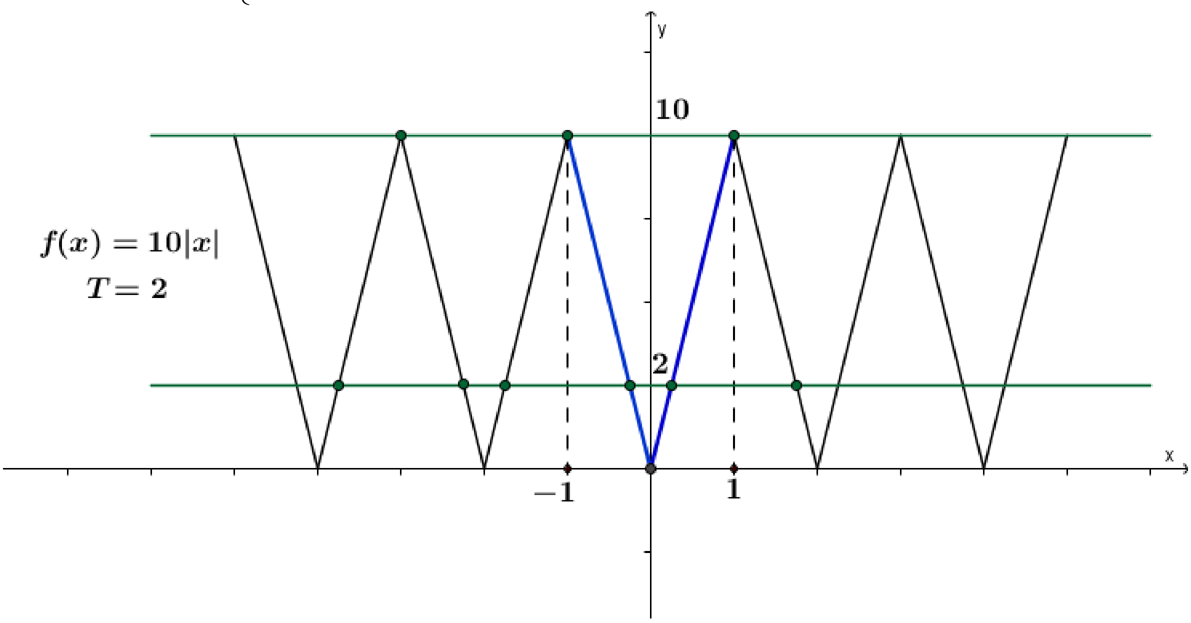
№10. **Найти все пары $(x;y),\ x\ge 0,\ y\ge 0$ удовлетворяющие системе**

$$\begin{cases} \dfrac{6}{f(x)-4}+\dfrac{1}{f(y)-1}=2 \\ \left(f(y)-1\right)\left(f(x)-4\right)=6f(y)-6 \end{cases}$$

, где f — периодическая функция с периодом *T=2*, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=10|x|$ при $-1\le x\le 1$.

Решение: Пусть $f(x)-4=a,\ f(y)-1=b$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a}+\dfrac{1}{b}=2 \\ b\cdot a=6\cdot b \end{cases},\quad b\ne 0\Rightarrow a=6,\ b=1 \qquad \begin{cases} f(x)=10 \\ f(y)=2 \end{cases}$$



$f(x)=10$ достигается в точках $x=1+2k,\ k\in\mathbb{Z}$.

$f(y)=2$ достигается в точках $y=\pm 0{,}2+2k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Учитывая условие, что $x\ge 0,\ y\le 0$ получаем:

$x=1+2k,\ k=0,1,2,\ldots$

$$\left[\begin{array}{l} y=-0{,}2-2n,\ n=0,1,2,\ldots \\ y=-1{,}8-2n,\ n=0,1,2,\ldots \end{array}\right.$$

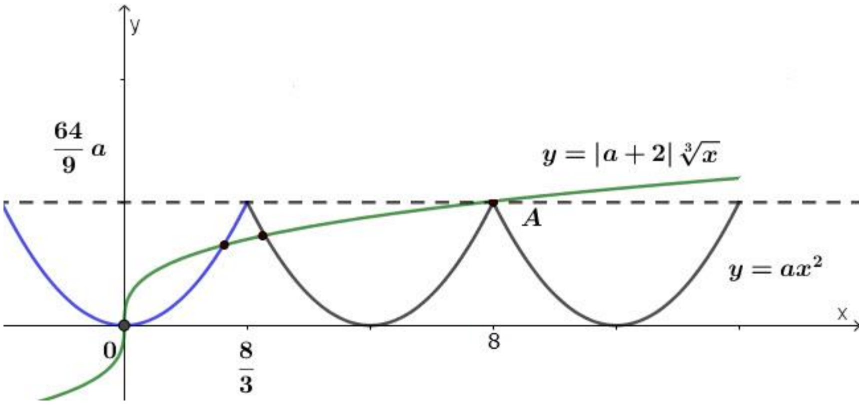
Ответ: $(1+2k;-0{,}2-2n),\ (1+2k;-1{,}8-2n)$
$n=0,1,2,\ldots\ \ k=0,1,2,\ldots$

№11. **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x)=|a+2|\sqrt[3]{x}$ имеет 4 решений, где f – четная периодическая функция с периодом $T=\frac{16}{3}$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=ax^2$, если $0\le x\le\frac{8}{3}$.**

Решение:

1) Если $a=0$, то с одной стороны $f(x)=|a+2|\sqrt[3]{x}=2\sqrt[3]{x}$, с другой стороны $f(x)=ax^2=0$. Уравнение $2\sqrt[3]{x}=0,\ \ x=0$ имеет единственное решение.

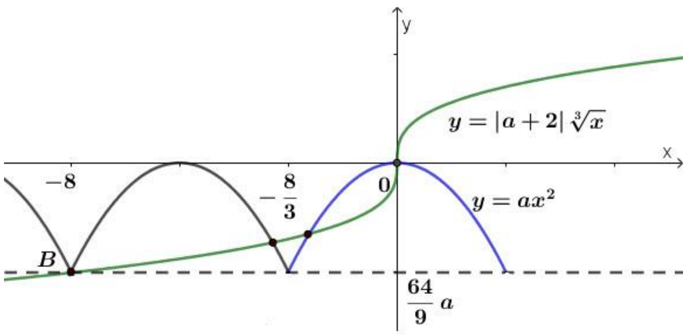
2) Если $a>0$. Для построения графика четной функции $f(x)=ax^2$ при $0\le x\le\frac{8}{3}$ найдем $f(0)=0$ и $f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{64}{9}a$.



Четыре точки пересечения прямой и графика периодической функции при $x\ge0$. Координаты последней точки $A\left(8;\frac{64}{9}a\right)$. Найдем значение a, решив уравнение $|a+2|\cdot\sqrt[3]{8}=\frac{64}{9}a$.

$$\begin{cases}|a+2|=\frac{32a}{9}\\ a>0\end{cases},\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a+2=\frac{32a}{9}\\ a+2=-\frac{32a}{9}\end{array}\right.\\ a>0\end{cases},\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=\frac{18}{23}\\ a=-\frac{18}{41}\end{array}\right.\\ a>0\end{cases},\quad a=\frac{18}{23}.$$

3) Если $a<0$



Четыре решения, если прямая проходит через точку $\left(-8;\frac{64}{9}a\right)$.

$$\begin{cases}|a+2|\cdot\sqrt[3]{-8}=\frac{64}{a}a\\ a<0\end{cases},\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a+2=-\frac{32a}{9}\\ a+2=\frac{32a}{9}\end{array}\right.\\ a<0\end{cases},\quad \left[\begin{array}{l}a=-\frac{18}{41}\\ a=\frac{18}{23}\end{array}\right.,\quad a=-\frac{18}{41}.$$

Ответ: $-\frac{18}{41}$ *и* $\frac{18}{23}$.

▪ *Тест* 5. Дополнительные задачи на четность и периодичность функций

№1. Найдите значение функции $y=\dfrac{7f(a)\cdot\left(f(-a)-2g(a)\right)-\left(g(-a)\right)^2}{g(-a)+3f(-a)}$, если известно, что функция $f(x)$ - четная, а $g(x)$ - нечетная, и $f(a)=2, g(a)=-5.$

№2. Четная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x)=1{,}6+\dfrac{f(x-5{,}5)}{x-5{,}5}$ вычислите сумму $g(5)+g(6)$

№3. Для четной функции $f(x)$ и нечетной функции $g(x)$ для всех действительных значений аргумента выполнено равенство $f(x)+g(x)=2x^2-7x-5$. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $f(x)=g(x)$.

№4. Периодическая функция $y=f(x)$ с периодом, равным 4,определена на множестве всех действительных чисел. Найдите значение выражения $f(10)-f(-6)$.

№5. Периодическая функция $y=f(x)$ с периодом, равным 2, определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что $f(1)=5$. Найдите значение выражения $3f(7)-4f(-3)$.

№6. Периодическая функция $y=f(x)$ с периодом, равным 4, определена на множестве всех действительных чисел, причем на отрезке $[-2;2]$ она совпадает с функцией $y=x^2-4$. Найдите значение выражения $f(2006)\cdot f(2007)-f(-1)$.

№7. Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции $y=\sin\left((2a+5)x\right)$ равен $\dfrac{\pi}{2}$.

№8. Найти все пары $(x;y)$, $x\le 0$, $y\ge 0$ удовлетворяющие системе

$$\begin{cases}\dfrac{2}{f(x)-3}+\dfrac{10}{f(y)-2}=12\\ \left(f(y)-2\right)\left(f(x)-3\right)=f(y)-2\end{cases}$$

, где f — периодическая функция с периодом *T=2*, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=4|x|$ при $-1\le x\le 1$.

№9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x)=|2a+5|x$ имеет 6 решений, где f — четная периодическая функция с периодом $T=2$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=ax^2$, если $0\le x\le 1$.

▪ ***Решение (тест)*** 5. Дополнительные задачи на четность и периодичность функций

№1. **Найдите значение функции** $y=\dfrac{7f(a)\cdot\left(f(-a)-2g(a)\right)-\left(g(-a)\right)^2}{g(-a)+3f(-a)}$ **, если известно, что функция** $f(x)$ **- четная, а** $g(x)$ **- нечетная, и** $f(a)=2, g(a)=-5.$

Решение:

$$y=\frac{7f(a)\cdot\left(f(a)-2g(a)\right)-\left(g(a)\right)^2}{-g(a)+3f(a)}=\frac{7\cdot2\left(2-2\cdot(-5)\right)-25}{5+3\cdot2}=13.$$

Ответ: 13.

№2. **Четная функция** $y=f(x)$ **определена на всей числовой прямой. Для функции** $g(x)=1{,}6+\dfrac{f(x-5{,}5)}{x-5{,}5}$ **вычислите сумму** $g(5)+g(6)$

Решение:

$$g(5)=1{,}6+\frac{f(5-5{,}5)}{5-5{,}5}=1{,}6-2\cdot f(-0{,}5)=1{,}6+2f(0{,}5)$$

$$g(6)=1{,}6+\frac{f(6-5{,}5)}{6-5{,}5}=1{,}6+2\cdot f(0{,}5)=1{,}6+2f(0{,}5)$$

$$g(5)+g(6)=1{,}6-2f(0{,}5)+1{,}6+2f(0{,}5)=3{,}2.$$

Ответ: 3,2.

№3. **Для четной функции** $f(x)$ **и нечетной функции** $g(x)$ **для всех действительных значений аргумента выполнено равенство** $f(x)+g(x)=2x^2-7x-5$**. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения** $f(x)=g(x)$**.**

Решение:

Функция $f(x)$ - четная, $f(-x)=f(x)$. Функция $g(x)$- нечетная, $g(-x)=-g(x)$.

$$f(-x)+g(-x)=2(-x)^2-7(-x)-5,\quad f(x)-g(x)=2x^2+7x-5.$$

$$2x^2+7x-5=0,\quad x=\frac{-7\pm\sqrt{89}}{4},\quad x_1+x_2=-3{,}5.$$

Ответ: -3,5.

№4. **Периодическая функция** $y=f(x)$ **с периодом, равным 4,определена на множестве всех действительных чисел. Найдите значение выражения** $f(10)-f(-6)$**.**

Решение:

$$T=4\Rightarrow f(10)=f(2+2\cdot4)=f(2)$$

$$f(-6)=f(2-2\cdot4)=f(2)$$

$$f(10)-f(-6)=f(2)-f(2)=0$$

Ответ: 0.

№5. **Периодическая функция $y=f(x)$ с периодом, равным 2, определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что $f(1)=5$. Найдите значение выражения $3f(7)-4f(-3)$.**

Решение:

$$T=2\Rightarrow f(7)=f(1+3\cdot 2)=f(1)=5$$

$$f(-3)=f(1-2\cdot 2)=f(1)=5$$

$$3f(7)-4f(-3)=3\cdot 5-4\cdot 5=-5$$

Ответ: -5.

№6. **Периодическая функция $y=f(x)$ с периодом, равным 4, определена на множестве всех действительных чисел, причем на отрезке $[-2;2]$ она совпадает с функцией $y=x^2-4$. Найдите значение выражения $f(2006)\cdot f(2007)-f(-1)$.**

Решение:

$$f(2004+2)\cdot f(2004+3)-f(-1)=f(2)\cdot f(3)-f(-1)=$$

$$=f(2)\cdot f(4-1)-f(-1)=f(2)\cdot f(-1)-f(-1)=f(-1)(f(2)-1)$$

$$f(x)=x^2-4,\ x\in[-2;2]$$

$$f(-1)=(-1)^2-4=-3,\quad f(2)=2^2-4=0$$

$$f(-1)\cdot(f(2)-1)=-3\cdot(0-1)=3$$

Ответ: 3.

№7. **Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых период функции $y=\sin((2a+5)x)$ равен $\frac{\pi}{2}$.**

Решение:

$$T_y=\frac{T_{\sin x}}{|k|}=\frac{2\pi}{|2a+5|},\quad \frac{2\pi}{|2a+5|}=\frac{\pi}{2},\quad |2a+5|=4,\quad \left[\begin{array}{l}2a+5=4\\ 2a+5=-4\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}a=-0,5\\ a=-4,5\end{array}\right..$$

$-0,5\cdot(-4,5)=2,25$.

Ответ: 2,25.

№8. **Найти все пары $(x;y)$, $x\le 0$, $y\ge 0$ удовлетворяющие системе**

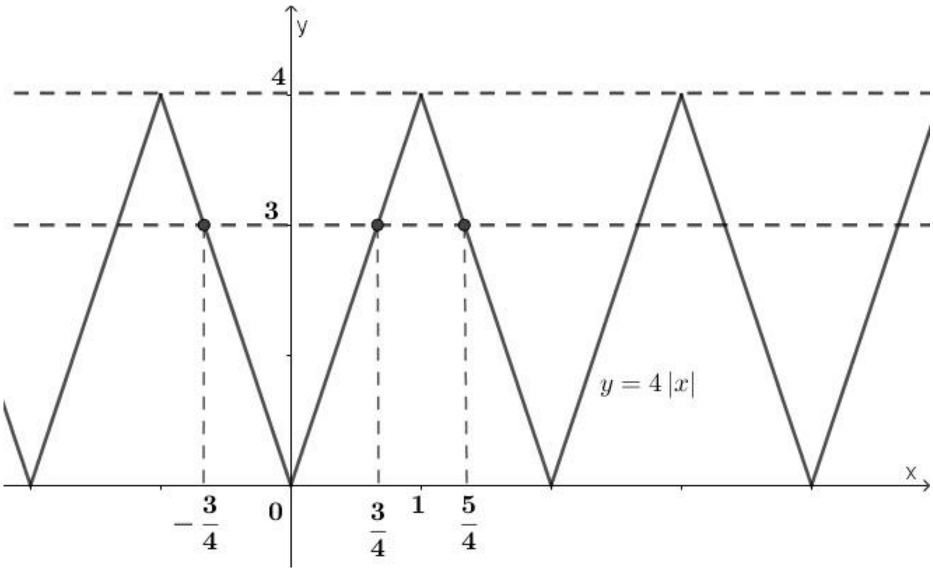
$$\begin{cases}\dfrac{2}{f(x)-3}+\dfrac{10}{f(y)-2}=12\\ (f(y)-2)(f(x)-3)=f(y)-2\end{cases}$$

, где f — периодическая функция с периодом *T=2*, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=4|x|$ при $-1\le x\le 1$.

Решение: Пусть $f(x)-3=a,\ f(y)-2=b$. Система примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{2}{a}+\dfrac{10}{b}=12\\ b\cdot a=b\end{cases},\quad b\ne 0\Rightarrow a=1,\ b=1$$

$$\begin{cases}f(x)=4\\ f(y)=3\end{cases}$$



Наибольшее значение функции $f(x) = 4$ достигается в точках $x = 1 + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Значение $f(y) = 3$ достигается в точках $y = \pm\frac{3}{4} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Учитывая условие, что $x \le 0,\ y \ge 0$ получаем:

$x = -1 - 2k,\ k = 0, 1, 2, \dots$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{3}{4} + 2n,\ n = 0, 1, 2, \dots \\ y = \frac{5}{4} + 2n,\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1-2k; 0,75+2n),\ (-1-2k; 1,25+2n)$
$n = 0, 1, 2, \dots\ k = 0, 1, 2, \dots$

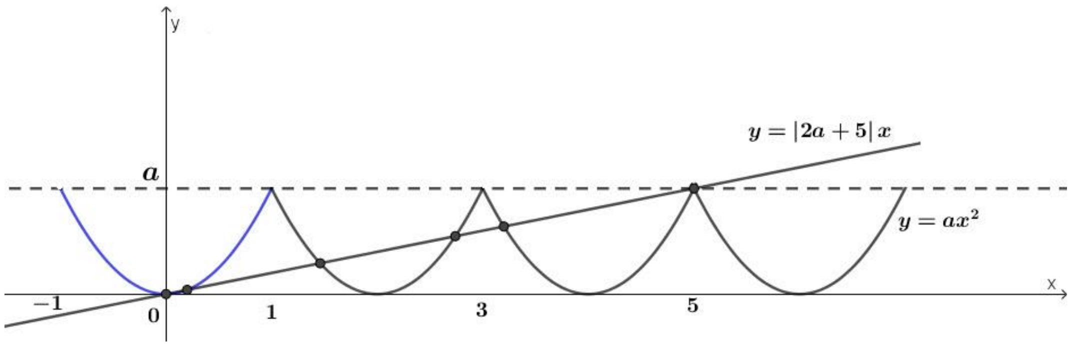
№9. **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x) = |2a+5|x$ имеет 6 решений, где f – четная периодическая функция с периодом $T = 2$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x) = ax^2$, если $0 \le x \le 1$.**

Решение:

1) Если $a = 0$, то с одной стороны $f(x) = |2a+5|x = 5x$, с другой стороны $f(x) = ax^2 = 0$.

Уравнение $5x = 0,\ x = 0$ имеет единственное решение.

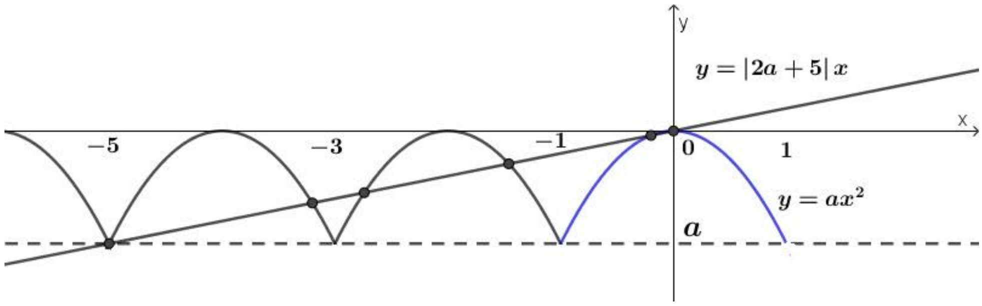
2) Если $a > 0$



Решение $x = 0$ есть при всех a. Нужно еще пять решений.

Прямая проходит через точку $(5; a)$. $\begin{cases} |2a+5| \cdot 5 = a \\ a > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a = -\frac{25}{9} \\ a > 0 \end{cases}$, $\varnothing$.

3) Если $a<0$



Шесть решений, если прямая проходит через точку $(-5;a)$.

$$\begin{cases}|2a+5|\cdot(-5)=a\\ a<0\end{cases},\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}2a+5=-\dfrac{a}{5}\\ 2a+5=\dfrac{a}{5}\end{array}\right.\\ a<0\end{cases},\quad \left[\begin{array}{l}a=-\dfrac{25}{11}\\ a=-\dfrac{25}{9}\end{array}\right..$$

Ответ: $-\dfrac{25}{11}$ *и* $-\dfrac{25}{9}$.