Условия на корни рациональных уравнений с параметром

▪ *Примеры*

№1. При каких значениях a уравнение $\dfrac{a+2x}{3}=\dfrac{ax-1}{2}$ имеет отрицательный корень?

№2. При каких значениях a уравнение $\dfrac{a+4}{3x-a}=\dfrac{3}{x-2}$ имеет положительный корень?

№3. Найти все значения p, для которых корень уравнения $p^2(x-3)-p(8x-19)=22-16x$ меньше 2.

№4. При каких значениях b корень уравнения $(2-b)(b+x)=15-7b$ больше или равен 3?

№5. Найти значения корня уравнения $x^2+3ax+6a-16=0$, если известно, что значение параметра $a\geq 1$.

№6. Найти число целых значений a, при которых уравнение $(a-2)x^2+2ax+2a+9=0$ имеет корни разных знаков.

№7. Найти все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $ax^2+2(a+3)x+a+2=0$ не положительны.

№8. При каком значении параметра a произведение корней уравнения $x^2+2\sqrt{a^2-3a+2}\cdot x-a^2+6a-5=0$ равно 3?

▪ *Решение (примеры)* Условия на корни рациональных уравнений с параметром

№1. **При каких значениях a уравнение $\frac{a+2x}{3}=\frac{ax-1}{2}$ имеет отрицательный корень?**

Решение:

$$2a+4x=3ax-3,\quad x=\frac{2a+3}{3a-4}$$

$$x<0,\quad \frac{2a+3}{3a-4}<0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{3}{2};\frac{4}{3}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{2};\frac{4}{3}\right)$.

№2. **При каких значениях a уравнение $\frac{a+4}{3x-a}=\frac{3}{x-2}$ имеет положительный корень?**

Решение: Выразим корень уравнения x через параметр a, учитывая ОДЗ уравнения.

$$\begin{cases}(x-2)(a+4)=3(3x-a)\\ x\neq 2\\ 3x-a\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{8-a}{a-5}\\ x\neq 2\\ x=\frac{a}{3}\end{cases}$$

$$x>0\Rightarrow\frac{8-a}{a-5}>0\Leftrightarrow\frac{a-8}{a-5}<0,\quad a\in(5;8)$$

$$x\neq 2\Rightarrow\frac{8-a}{a-5}\neq 2;\quad a\neq 6$$

$$x\neq\frac{a}{3};\quad \frac{a}{3}\neq\frac{8-a}{a-5};\quad \begin{cases}a\neq 6\\ a\neq -4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\in(5;8)\\ a\neq 6\\ a\neq -4\end{cases}\Leftrightarrow a\in(5;6)\cup(6;8)$$

Ответ: $(5;6)\cup(6;8)$.

№3. **Найти все значения p, для которых корень уравнения $p^2(x-3)-p(8x-19)=22-16x$ меньше 2.**

Решение:

$$p^2x-3p^2-8px+19p-22+16x=0$$

$$x\left(p^2-8p+16\right)=3p^2-19p+22$$

$$x=\frac{3p^2-19p+22}{p^2-8p+16}\qquad x<2$$

$$\frac{3p^2-19p+22}{p^2-8p+16}<2\Leftrightarrow\frac{p^2-3p-10}{(p-4)^2}<0\Leftrightarrow\frac{(p-5)(p+2)}{(p-4)^2}<0$$

$$p\in(-2;4)\cup(4;5)$$

Ответ: $(-2;4)\cup(4;5)$.

№4. **При каких значениях b корень уравнения $(2-b)(b+x)=15-7b$ больше или равен 3?**

Решение:

$$x=\frac{b^2-9b+15}{2-b} \qquad x\ge 3$$

$$\frac{b^2-9b+15}{2-b}\ge 3 \Leftrightarrow \frac{b^2-6b+9}{b-2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(b-3)^2}{b-2}\le 0,\quad b\in(-\infty;2)\cup\{3\}$$

Ответ: $(-\infty;2)\cup\{3\}$.

№5. **Найти значения корня уравнения $x^2+3ax+6a-16=0$, если известно, что значение параметра $a\ge 1$.**

Решение:
По логике решения задача дублирует предыдущие задания, только теперь условие накладывается на параметр, а значения корня будем искать. Поэтому, выражаем параметр a через корень x.

$$x^2+3ax+6a-16=0$$

$$a=\frac{16-x^2}{3x+6} \qquad a\ge 1$$

$$\frac{16-x^2}{3x+6}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-10}{x+2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+5)(x-2)}{x+2}\le 0,\quad x\in(-\infty;-5]\cup(-2;2]$$

Ответ: $(-\infty;-5]\cup(-2;2]$.

№6. **Найти число целых значений a, при которых уравнение $(a-2)x^2+2ax+2a+9=0$ имеет корни разных знаков.**

Решение:
При $a=2$ уравнение принимает вид линейного $4x+4+9=0$, которое имеет единственное решение $x=-\frac{13}{4}$, не подходит по условию.

При $a\ne 2$ уравнение принимает вид квадратного $(a-2)x^2+2ax+2a+9=0$ и оно будет иметь корни разных знаков при условии

$$\begin{cases} D>0 \\ x_1\cdot x_2<0 \end{cases} \qquad \left| \begin{array}{l} D/4=a^2-(a-2)(2a+9)=-a^2-5a+18 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2a+9}{a-2} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -a^2-5a+18>0 \\ \dfrac{2a+9}{a-2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-5-\sqrt{97}}{2}<a<\dfrac{-5+\sqrt{97}}{2} \\ (a+4,5)(a-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-4,5;2)$$

Сравним числа

$$\frac{-5-\sqrt{97}}{2}\vee -\frac{9}{2}$$
$$-5-\sqrt{97}\vee -9$$
$$-\sqrt{97}\vee -4$$
$$-\sqrt{97}<-\sqrt{16}\Rightarrow \frac{-5-\sqrt{97}}{2}<-\frac{9}{2}$$

$$\frac{-5+\sqrt{97}}{2}\vee 2$$
$$-5+\sqrt{97}\vee 4$$
$$\sqrt{97}\vee 9$$
$$\sqrt{97}>\sqrt{81}\Rightarrow \frac{-5+\sqrt{97}}{2}>2$$

Ответ: $(-4,5;2)$, ***6 целых значений.***

№7. **Найти все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $ax^2+2(a+3)x+a+2=0$ не положительны.**

Решение:

$$ax^2+2(a+3)x+a+2=0\Big|:a \quad a\neq 0, \text{ т.к. уравнение квадратное}$$

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ D\geq 0 \\ x_1\leq 0 \\ x_2\leq 0 \end{cases} \quad D/4=(a+3)^2-a(a+2)=4a+9$$

$$x^2+\frac{2(a+3)}{a}x+\frac{a+2}{a}=0$$

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ 4a+9\geq 0 \\ x_1+x_2\leq 0 \\ x_1\cdot x_2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ a\geq -\frac{9}{4} \\ -\frac{2(a+3)}{a}\leq 0 \\ \frac{a+2}{a}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ a\geq -\frac{9}{4} \\ \frac{a+3}{a}\geq 0 \\ \frac{a+2}{a}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(0;\infty)$$

Ответ: $(0;\infty)$.

№8. **При каком значении параметра a произведение корней уравнения $x^2+2\sqrt{a^2-3a+2}\cdot x-a^2+6a-5=0$ равно 3?**

Решение:

$$x^2+2\sqrt{a^2-3a+2}\cdot x-a^2+6a-5=0$$

$$\begin{cases} D\geq 0 \\ x_1\cdot x_2=3 \\ a^2-3a+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-9a+7\geq 0 \\ -a^2+6a-5=3 \\ a^2-3a+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3{,}5)(a-1)\geq 0 \\ a_1=2,\ \ a_2=4 \\ (a-1)(a-2)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=4$$

$$D/4=a^2-3a+2-\left(-a^2+6a-5\right)=2a^2-9a+7$$

Ответ: **4**.

Вариант 1

№1. При каких значениях a уравнение $\frac{3a+x}{2}=\frac{ax-3}{3}$ имеет отрицательный корень?

№2. При каких значениях a корень уравнения $(x-1)(a^2-1)=5-4a$ меньше или равен 0?

№3. Найти все значения p, для которых корень уравнения $p^2(x-1)+p(13-10x)=44-25x$ больше 2.

№4. Найти наибольшее значение корня уравнения $x^2+(3a+12)x+33a+9=0$, если известно, что значение параметра $a\le 3$.

№5. Найти все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $ax^2+2(a+5)x+a+3=0$ неотрицательны.

Вариант 2

№1. При каких значениях a уравнение $\frac{2a+x}{3}=\frac{5ax-1}{4}$ имеет отрицательный корень?

№2. При каких значениях c корень уравнения $(x-4)(c^2-4)=10c+29$ не превосходит 3?

№3. Найти все значения c, для которых корень уравнения $x+c^2+16=cx+c$ меньше (- 7).

№4. Найти наибольшее целое положительное значение a, при котором уравнение $(a+4)x^2-20x+a-4=0$ имеет два различных положительных корня.

№5. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2+2\sqrt{a^2-3a+2}\cdot x-a^2+6a-5=0$ различны и их произведение отрицательно?

Вариант 3

№1. При каких значениях a уравнение $\frac{4a-1}{2x+a}=\frac{4}{x+1}$ имеет положительный корень?

№2. Найти все значения c, для которых корень уравнения $c^2-cx=x-c-1$ меньше (- 3).

№3. Найти наименьшее целое значение a, при котором уравнение $(a-6)x^2+4x+a-6=0$ имеет различные отрицательные корни

▪ *Ответы (тест)* Условия на корни рациональных уравнений с параметром

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	$\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$	$(-1;1)\cup\{2\}$	$(1;5)\cup(5;6)$	$[-12;-11)\cup[-9;\infty)$	$\left[-\frac{25}{7};-3\right]$
Вар.2	$\left(\frac{4}{15};\frac{3}{8}\right)$	$\{-5\}\cup(-2;2)$	$(-\infty;-3)\cup(-3;1)$	$(4;8]$	$(-\infty;1)\cup(5;\infty)$
Вар.3	$\left(\frac{9}{4};\infty\right)$	$(-\infty;-2)\cup(-2;-1)$	$(4;\infty)\cup\left(\frac{4}{3};2\right)$		

▪ *Решение (тест)* Условия на корни рациональных уравнений с параметром

Вариант 1

№1. **При каких значениях** a **уравнение** $\frac{3a+x}{2}=\frac{ax-3}{3}$ **имеет отрицательный корень?**

Решение:

$$\frac{3a+x}{2}=\frac{ax-3}{3},\quad x<0$$
$$9a+3x=2ax-6$$
$$3x-2ax=-9a-6\,|\cdot(-1)$$
$$x(2a-3)=9a+6,\quad x=\frac{9a+6}{2a-3}$$
$$x<0;\qquad \frac{9a+6}{2a-3}<0\Leftrightarrow\frac{a+\frac{2}{3}}{a-\frac{3}{2}}<0\Leftrightarrow-\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$

№2. **При каких значениях** a **корень уравнения** $(x-1)(a^2-1)=5-4a$ **меньше или равен 0?**

Решение:

$$(x-1)(a^2-1)=5-4a,\quad x\le0$$
$$x(a^2-1)-a^2+1=5-4a$$
$$x(a^2-1)=a^2-4a+4$$
$$x=\frac{a^2-4a+4}{a^2-1},\quad x=\frac{(a-2)^2}{(a-1)(a+1)}$$
$$x\le0,\quad \frac{(a-2)^2}{(a-1)(a+1)}\le0\Leftrightarrow a\in(-1;1)\cup\{2\}$$

Ответ: $(-1;1)\cup\{2\}$.

№3. **Найти все значения p, для которых корень уравнения $p^2(x-1)+p(13-10x)=44-25x$ больше 2.**

Решение:

$$p^2(x-1)+p(13-10x)=44-25x, \quad x>2$$

$$p^2x-p^2+13p-10px-44+25x=0$$

$$x\left(p^2-10p+25\right)=p^2-13p+44$$

$$x=\frac{p^2-13p+44}{p^2-10p+25}$$

$$x>2,\ \ \frac{p^2-13p+44}{p^2-10p+25}>2\Leftrightarrow\frac{p^2-13p+44-2p^2+20p-50}{(p-5)^2}>0;$$

$$\frac{-p^2+7p-6}{(p-5)^2}>0\Leftrightarrow\frac{p^2-7p+6}{(p-5)^2}<0\Leftrightarrow\frac{(p-1)(p-6)}{(p-5)^2}<0\Leftrightarrow p\in(1;5)\cup(5;6)$$

Ответ: $(1;5)\cup(5;6)$.

№4. **Найти наибольшее значение корня уравнения $x^2+(3a+12)x+33a+9=0$, если известно, что значение параметра $a\le 3$.**

Решение:

$$a=\frac{-x^2-12x-9}{3x+33} \qquad a\le 3$$

$$\frac{x^2+21x+108}{x+11}\ge 0\Leftrightarrow x\in[-12;-11)\cup[-9;\infty)$$

Ответ: $[-12;-11)\cup[-9;\infty)$.

№5. **Найти все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $ax^2+2(a+5)x+a+3=0$ неотрицательны.**

Решение:

$$ax^2+2(a+5)x+a+3=0\,\Big|:a \qquad a\ne 0,\ \text{т.к. уравнение квадратное}$$

$$\begin{cases} a\ne 0\\ D\ge 0\\ x_1\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases} \qquad D/4=(a+5)^2-a(a+3)=7a+25$$

$$x^2+\frac{2(a+5)}{a}x+\frac{a+2}{a}=0$$

$$\begin{cases} a\ne 0\\ 7a+25\ge 0\\ x_1+x_2\ge 0\\ x_1\cdot x_2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\ne 0\\ a\ge -\dfrac{25}{7}\\ -\dfrac{2(a+5)}{a}\ge 0\\ \dfrac{a+3}{a}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\ne 0\\ a\ge -\dfrac{25}{7}\\ \dfrac{a+5}{a}\le 0\\ \dfrac{a+3}{a}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\left[-\frac{25}{7};-3\right]$$

Ответ: $\left[-\dfrac{25}{7};-3\right]$.

Вариант 2

№1. **При каких значениях a уравнение $\dfrac{2a+x}{3}=\dfrac{5ax-1}{4}$ имеет отрицательный корень?**

Решение:

$$\frac{2a+x}{3}=\frac{5ax-1}{4},\quad x<0$$

$$8a+4x=15ax-3,\quad 8a-3=15ax-4x,\quad 8a-3=x(15a-4)$$

$$x=\frac{8a-3}{15a-4},\quad x<0$$

$$\frac{8a-3}{15a-4}<0\quad\left(\frac{3}{8}\vee\frac{4}{15},\quad \frac{45}{8\cdot 15}\vee\frac{32}{15\cdot 8}\right)$$

$$\frac{4}{15}<a<\frac{3}{8}$$

Ответ: $\left(\dfrac{4}{15};\dfrac{3}{8}\right)$.

№2. **При каких значениях c корень уравнения $(x-4)(c^2-4)=10c+29$ не превосходит 3?**

Решение:

$$(x-4)(c^2-4)=10c+29,\quad x\le 3$$

$$x(c^2-4)-4c^2+16=10c+29$$

$$x(c^2-4)=4c^2+10c+13$$

$$x=\frac{4c^2+10c+13}{c^2-4},\quad x\le 3$$

$$\frac{4c^2+10c+13}{c^2-4}\le 3$$

$$\frac{c^2+10c+25}{c^2-4}\le 0\Leftrightarrow\frac{(c+5)^2}{(c-2)(c+2)}\le 0\Leftrightarrow c\in\{-5\}\cup(-2;2)$$

Ответ: $\{-5\}\cup(-2;2)$.

№3. **Найти все значения c, для которых корень уравнения $x+c^2+16=cx+c$ меньше (- 7).**

Решение:

$$x+c^2+16=cx+c,\quad x<-7$$

$$x-xc=-c^2+c-16$$

$$x(1-c)=-c^2+c-16$$

$$x=\frac{-c^2+c-16}{1-c},\quad x=\frac{c^2-c+16}{c-1}$$

$$x<-7,\quad \frac{c^2-c+16}{c-1}<-7$$

$$\frac{c^2-c+16}{c-1}+7<0\Leftrightarrow\frac{c^2+6c+9}{c-1}<0\Leftrightarrow\frac{(c+3)^2}{c-1}<0\Leftrightarrow c\in(-\infty;-3)\cup(-3;1)$$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-3;1)$.

№4. **Найти наибольшее целое положительное значение a, при котором уравнение $(a+4)x^2-20x+a-4=0$ имеет два различных положительных корня.**

Решение:

При $a=-4$ уравнение примет вид $-20x=0$, которое имеет единственный корень $x=0$, что не удовлетворяет условию задачи.

При $a\neq -4$ уравнение будет квадратными и оно имеет два различных положительных корня, если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} a\neq -4 \\ D>0 \\ x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases} \quad D/_4=100-(a+4)(a-4)=64-a^2$$

$$x^2-\frac{20}{a+4}x+\frac{a-4}{a+4}=0$$

$$\begin{cases} a\neq -4 \\ 64-a^2\geq 0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1\cdot x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq -4 \\ -8\leq a\leq 8 \\ \dfrac{20}{a+4}>0 \\ \dfrac{a-4}{a+4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq -4 \\ -8\leq a\leq 8 \\ a>-4 \\ a>4 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(4;8]$$

Ответ: $(4;8]$.

№5. **При каких значениях параметра а корни уравнения $x^2+2\sqrt{a^2-3a+2}\cdot x-a^2+6a-5=0$ различны и их произведение отрицательно?**

Решение:

$$x^2+2\sqrt{a^2-3a+2}\cdot x-a^2+6a-5=0$$

$$\begin{cases} D>0 \\ x_1\cdot x_2<0 \\ a^2-3a+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-9a+7>0 \\ -a^2+6a-5<0 \\ a^2-3a+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3{,}5)(a-1)>0 \\ (a-5)(a-1)>0 \\ (a-2)(a-1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\infty;1)\cup(5;\infty)$$

$$D/_4=a^2-3a+2-(-a^2+6a-5)=2a^2-9a+7$$

Ответ: $(-\infty;1)\cup(5;\infty)$.

Вариант 3

№1. **При каких значениях а уравнение** $\dfrac{4a-1}{2x+a}=\dfrac{4}{x+1}$ **имеет положительный корень?**

Решение:

$$\frac{4a-1}{2x+a}=\frac{4}{x+1},\quad x>0$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x+a\neq 0 \\ x+1\neq 0 \end{cases};\quad \begin{cases} x\neq -\dfrac{a}{2} \\ x\neq -1 \end{cases}$$

$$1)\ \ (4a-1)(x+1)=4(2x+a)$$

$$4ax+4a-x-1=8x+4a,\quad 4ax-x-8x=1$$

$$x(4a-9)=1,\quad x=\frac{1}{4a-9}$$

$$2)\ \ x>0;\quad \frac{1}{4a-9}>0\Leftrightarrow 4a-9>0;\quad a>\frac{9}{4}$$

$$x\neq -\frac{a}{2}$$

Т.к. $a>\dfrac{9}{4}$, то $-\dfrac{a}{2}<0$ и $x<0$ - не подходит по условию $x\neq -1<0$,

также не рассматриваем $(x>0)$. Значит, $a\in\left(\dfrac{9}{4};\infty\right)$.

Ответ: $\left(\dfrac{9}{4};\infty\right)$.

№2. **Найти все значения с, для которых корень уравнения** $c^2-cx=x-c-1$ **меньше (- 3).**

Решение:

$$c^2-cx=x-c-1,\quad x<-3$$

$$c^2+c+1=x+cx$$

$$x(c+1)=c^2+c+1$$

$$x=\frac{c^2+c+1}{c+1}$$

$$\frac{c^2+c+1}{c+1}<-3$$

$$\frac{c^2+c+1}{c+1}+3<0\Leftrightarrow\frac{c^2+4c+4}{c+1}<0$$

$$\frac{(c+2)^2}{c+1}<0\Leftrightarrow c\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)$$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)$.

№3. **Найти наименьшее целое значение а, при котором уравнение** $(a-6)x^2+4x+a-6=0$ **имеет различные отрицательные корни.**

Решение:

$$x^2+2ax+a^2-6a+8=0$$

$$\begin{cases} D>0 \ (\text{Имеет различные корни}) \\ x_1<0 \\ x_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D>0 \\ x_1+x_2<0 \\ x_1\cdot x_2>0 \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} D/4=a^2-a^2+6a-8=6a-8 \\ x_1+x_2=-2a \\ x_1\cdot x_2=a^2-6a+8 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 6a-8>0 \\ -2a<0 \\ a^2-6a+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{4}{3} \\ a>0 \\ (a-2)(a-4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(4;\infty)\cup\left(\frac{4}{3};2\right)$$

Ответ: $(4;\infty)\cup\left(\dfrac{4}{3};2\right)$.