Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Квадратичная функция

▪ *Примеры*

№1. При каких значениях a уравнение $\left|x^2-4\right|-3x-a=0$ имеет два решения?

№2. При каких значениях a уравнение $|x+3|(x-5)+a=0$ имеет ровно три решения?

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|3x^2-4x-7\right|=a-2x^2-7x$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2-8x=2|x-a|-16$ имеет ровно три различных решения.

№5. При каких значениях a уравнение $\left|x^2-4x-5\right|-3a=|x-a|-1$ имеет ровно три корня?

▪ ***Решение (примеры)*** Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Квадратичная функция

№1. При каких значениях a уравнение $\left|x^2-4\right|-3x-a=0$ имеет два решения?

Решение:

$\left|x^2-4\right|-3x-a=0$

$\left|x^2-4\right|-3x=a$

$\begin{cases} y=\left|x^2-4\right|-3x \quad (1) \\ y=a \end{cases}$

$(1)\ \ a)\ \ x^2-4\geq 0,\ x\in(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$

$y=x^2-3x-4,$

$x_в=\dfrac{3}{2},\ \ y_в=\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{2}-4=-\dfrac{25}{4}$

$б)\ \ x^2-4\leq 0,\ \ x\in[-2;2]$

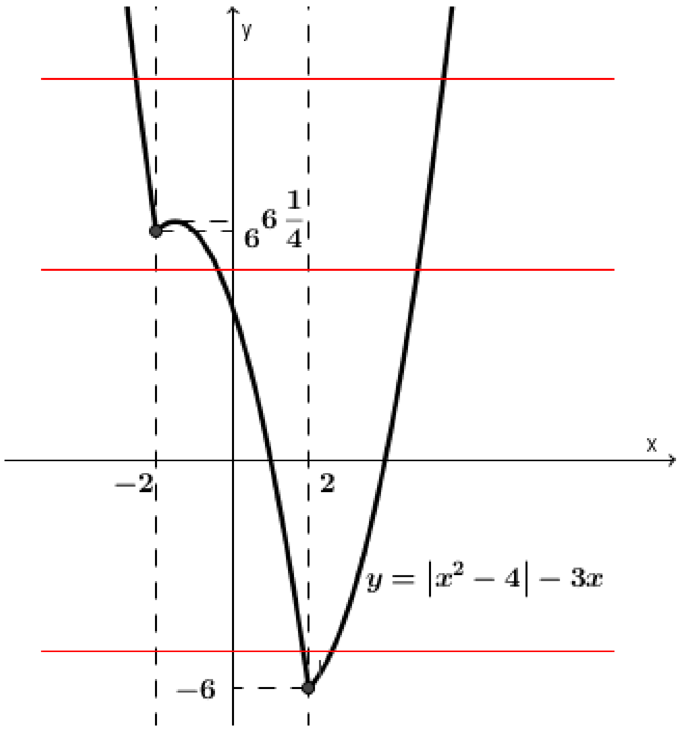
$y=-x^2-3x+4$

$x_в=-\dfrac{-3}{-2}=-\dfrac{3}{2},\ \ y_в=-\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{2}+4=6\dfrac{1}{4}$

$y(2)=-6,\ \ y(-2)=6$

Два решения $-6<y<6;\ y>6\dfrac{1}{4}$, т.к. $y=a$, то

$a\in(-6;6)\cup\left(6\dfrac{1}{4};\infty\right)$



Ответ: $(-6;6);\left(6\dfrac{1}{4};\infty\right)$.

№2. При каких значениях a уравнение $|x+3|(x-5)+a=0$ имеет ровно три решения?

Решение:

$|x+3|(x-5)+a=0;\ \ |x+3|(x-5)=-a$

$\begin{cases} y=|x+3|(x-5) \quad (1) \\ y=-a \end{cases}$

$(1)\ a)\ x+3\geq 0,\ x\geq -3\ \ y=(x+3)(x-5)$

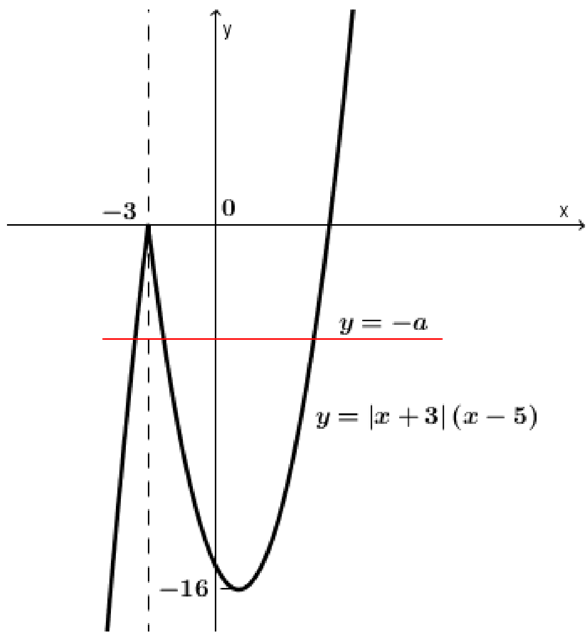
$x_1=-3,\ x_2=5;\ x_в=1,\ y_в=-16$

$б)\ \ (x+3)<0,\ x<-3\ \ y=-(x+3)(x-5)$

$y(-3)=0$

Три решения

$-16<y<0,\quad -16<-a<0,\quad 0<a<16$



Ответ: $(0;16)$.

№3. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|3x^2-4x-7\right|=a-2x^2-7x$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.**

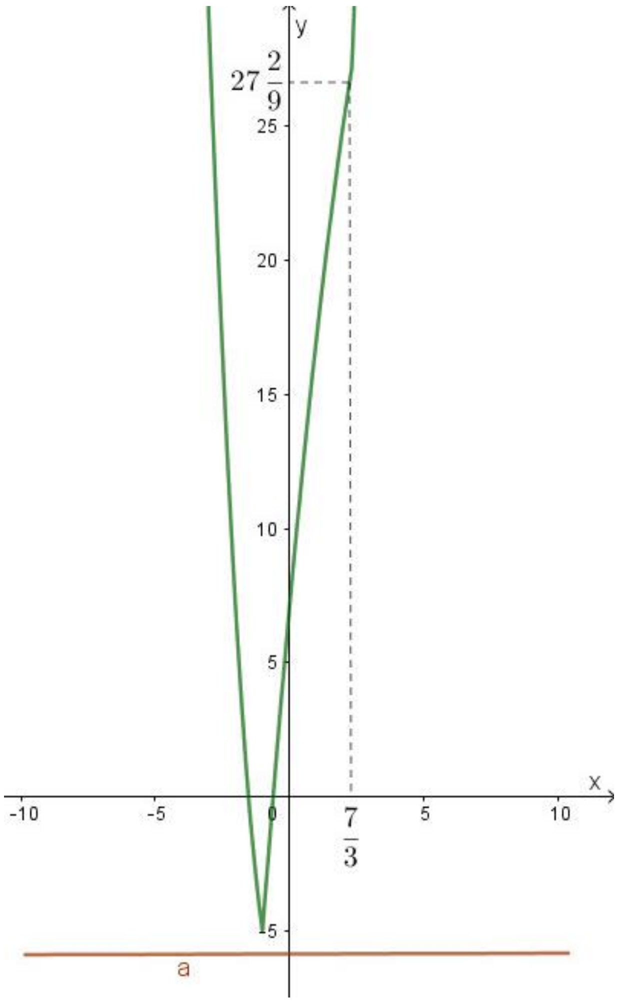
Решение:

$$\left|3x^2-4x-7\right|=a-2x^2-7x$$

$$\begin{cases}3x^2-4x-7\ge 0\\ 3x^2-4x-7=a-2x^2-7x\end{cases}\quad \text{или}$$

$$\begin{cases}3x^2-4x-7<0\\ 3x^2-4x-7=-a+2x^2+7x\end{cases}$$

(1) $\begin{cases}x\le -1;\ x\ge \dfrac{7}{3}\\ 5x^2+x-7=a\end{cases}$ (2) $\begin{cases}-1<x<\dfrac{7}{3}\\ -x^2+11x+7=a\end{cases}$



(1) Построим параболу $y=5x^2+x-7$ при условии, что $x\le -1,\ \ x\ge \dfrac{7}{3}$. Координаты вершины $x_в=-0,3$ $y_в=-7,45$.

(2) Построим параболу $y=-x^2+11x+7$ при условии, что $-1<x<\dfrac{7}{3}$. Координаты вершины $x_в=\dfrac{11}{2}$ $y_в=37\dfrac{1}{4}$.

Значения функции в точках перелома:

$x=-1,\ \ y(-1)=-5$

$x=\dfrac{7}{3},\ \ y\left(\dfrac{7}{3}\right)=27\dfrac{2}{9}$

Уравнение не имеет решений, либо имеет единственное решение при $a\le -5$.

Ответ: $a\le -5$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№4. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2-8x=2|x-a|-16$ имеет ровно три различных решения.**

Решение:

Запишем уравнение в виде $(x-4)^2=2|x-a|$ и рассмотрим графики функций $y=(x-4)^2$ и $y=2|x-a|$. График первой функции - парабола, график второй функции - угол с вершиной в точке $(a;0)$. Уравнение будет иметь три различных решения в следующих случаях.

1) Вершина параболы совпадает с вершиной угла.
2) Одна из сторон угла касается параболы

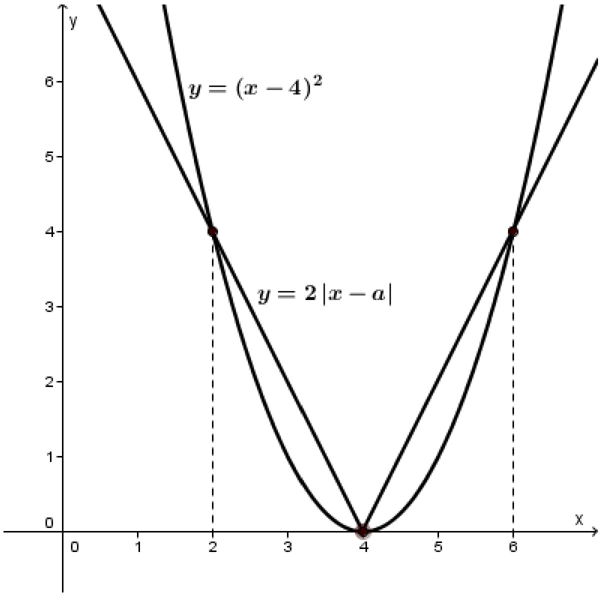
В первом случае $a=4$, и уравнение имеет три корня: 2, 4, 6.

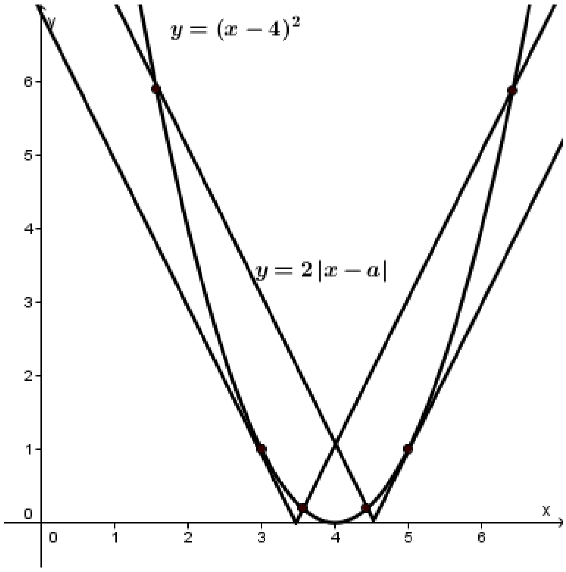
Рассмотрим второй случай. Пусть правая сторона угла касается параболы. Уравнение $(x-4)^2=2x-2a$ должно иметь единственное решение. Приведем уравнение к стандартному виду $x^2-10x+16+2a=0$.

$D=0,\ D=25-(16+2a),\ \ a=4{,}5$.

Если параболы касается левая сторона угла, получаем уравнение $(x-4)^2=2a-2x$; $x^2-6x+16-2a=0$.

Оно имеет единственное решение, только если $a=3{,}5$





Ответ:3,5; 4; 4,5.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№5. **При каких значениях a уравнение $\left|x^2-4x-5\right|-3a=\left|x-a\right|-1$ имеет ровно три корня?**

Решение:

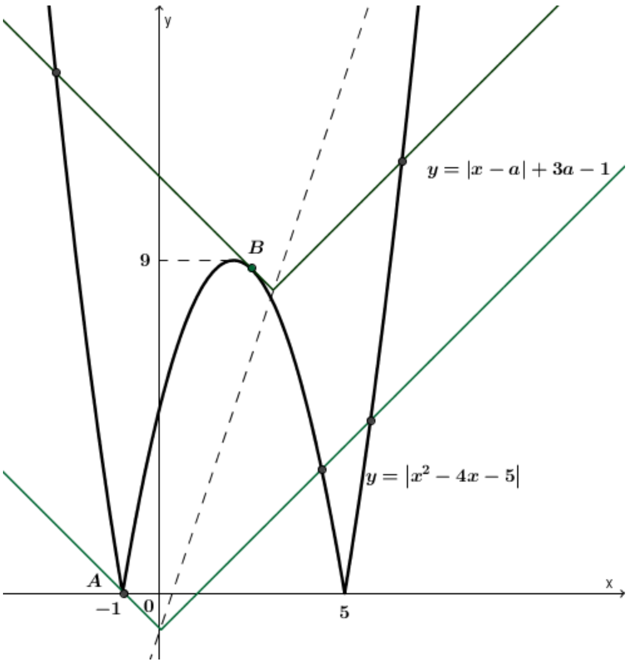
$$\left|x^2-4x-5\right|=\left|x-a\right|+3a-1$$

$$\begin{cases} y=\left|x^2-4x-5\right| & (1) \\ y=\left|x-a\right|+3a-1 & (2) \end{cases}$$

$(1)\ y=\left|x^2-4x-5\right|$

$x_в=-\dfrac{-4}{2}=2\quad y_в=\left|2^2-4\cdot2-5\right|=9$

$y=0,\ \ x_1=-1\ \ x_2=5$



$(2)\ \ y=\left|x-a\right|+3a-1$ угол с вершиной $(a;3a-1)$, который движется по прямой, проходящей через точки $(1;2)$ и $(0;-1)$.

Угол $y=\left|x-a\right|+3a-1$ проходит левой веткой через точку $A(-1;0)$ и правой веткой еще два раза пересекает график $y=\left|x^2-4x-5\right|$ - три решения.

$y=-x+a+3a-1$

$0=1+4a-1,\ \ a=0$

Угол $y=\left|x-a\right|+3a-1$ касается левой веткой графика $y=\left|x^2-4x-5\right|$ в точке B и правой веткой еще два раза его пересекает - три решения.

$$\begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=-x+a+3a-1 \end{cases};$$

$-x^2+4x+5=-x+4a-1$

$x^2-5x+4a-6=0,\ \ D=0$

$D=25-4(4a-6)=49-16a$

$49-16a=0,\ \ a=\dfrac{49}{16}$

Ответ: 0 и $\dfrac{49}{16}$.

▪ *Тест* Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Квадратичная функция

№1. При каких значениях a уравнение $a-\left|x^2+6x\right|=8$ имеет четыре решения?

№2. При каких значениях a уравнение $|6-x|(4-x)+a=0$ имеет единственное решение?

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|5x^2-4x-1\right|=a-5x^2-x$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

№4. При каких значениях a уравнение $\left|x^2-2x-3\right|-2a=|x-a|-1$ имеет ровно три корня?

▪ *Ответы (тест)* Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Квадратичная функция

№1	№2	№3	№4
$8<a<26$	$(-\infty;0);(1;\infty)$	$a\le 0$	*0 и* $\frac{25}{12}$

№1. **При каких значениях a уравнение $a-\left|x^2+6x\right|=8$ имеет четыре решения?**

Решение:

$$a-\left|x^2+6x\right|=8;\ a-8=\left|x^2+6x\right|$$

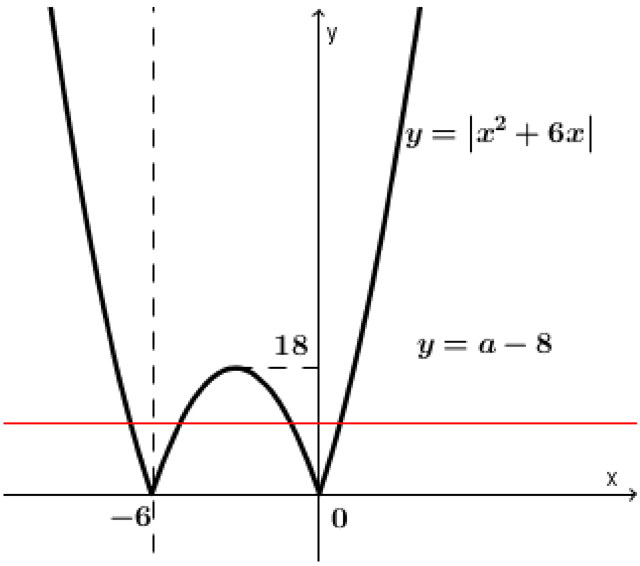
$$\begin{cases} y=\left|x^2+6x\right| \\ y=a-8 \end{cases}$$

$$x_в=\frac{-6}{2}=-3,\ y_в=\left|9-18\right|=9$$

Четыре решения:

$0<y<18,$ т.к. $y=a-8,$ то

$0<a-8<18 \Leftrightarrow 8<a<26$



Ответ: $(8;26)$.

№2. **При каких значениях a уравнение $\left|6-x\right|(4-x)+a=0$ имеет единственное решение?**

Решение:

$$\left|x-6\right|(4-x)+a=0,\ \left|x-6\right|(x-4)=a$$

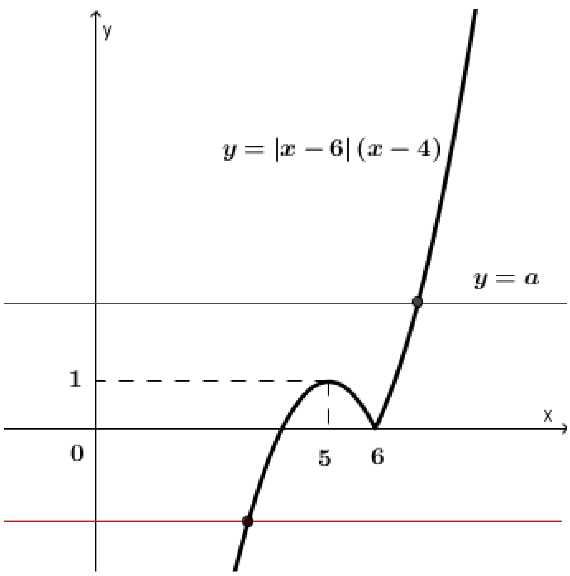
$$\begin{cases} y=\left|x-6\right|(x-4) & (1) \\ y=a \end{cases}$$

$$(1)\ \ y=\left|x-6\right|(x-4)$$

$$\left[\begin{array}{l} x\ge 6,\ \ y=(x-6)(x-4) \\ x<6,\ \ y=-(x-6)(x-4) \end{array}\right.$$

$$x_в=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4+6}{2}=5,\ \ y_в=\left|5-6\right|(5-4)=1$$

Уравнение имеет единственное решение при $a\in(-\infty;0)\cup(1;\infty)$



Ответ: $(-\infty;0);(1;\infty)$.

№3. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|5x^2-4x-1|=a-5x^2-x$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.**

Решение:

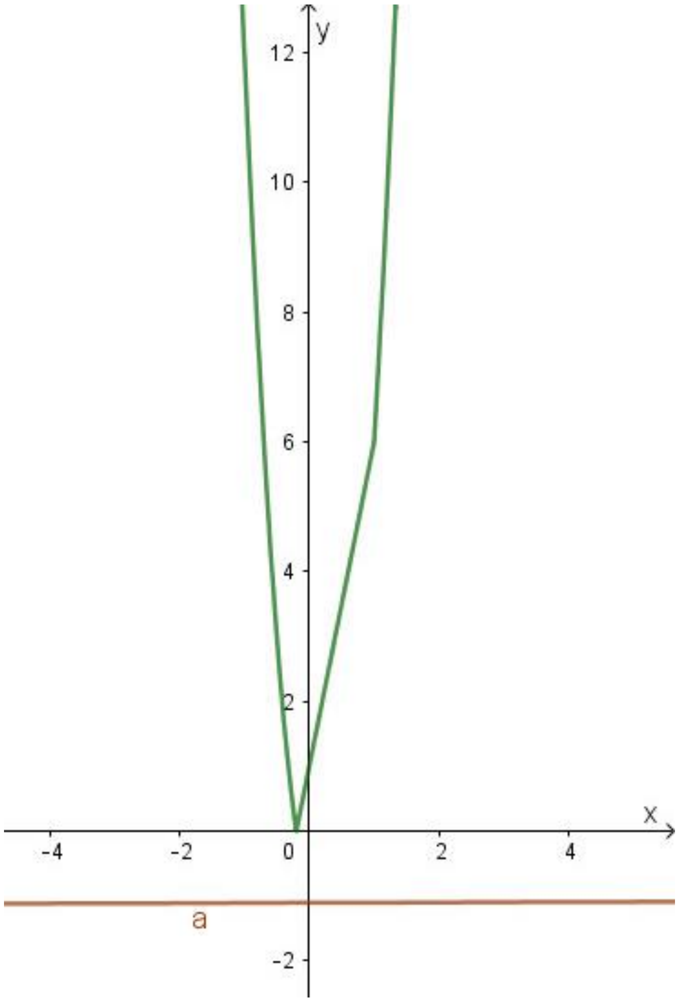
$$|5x^2-4x-1|=a-5x^2-x$$

$$\begin{cases}5x^2-4x-1\geq 0\\5x^2-4x-1=a-5x^2-x\end{cases}$$ или

$$\begin{cases}5x^2-4x-1<0\\5x^2-4x-1=-a+5x^2+x\end{cases}$$

(1) $\begin{cases}x\leq -\dfrac{1}{5};\ x\geq 1\\10x^2-3x-1=a\end{cases}$ (2)

$\begin{cases}-\dfrac{1}{5}<x<1\\5x+1=a\end{cases}$



(1) Построим параболу $y=10x^2-3x-1$ при условии, что $x\leq -\dfrac{1}{5}$, $x\geq 1$. Координаты вершины $x_в=\dfrac{3}{20}$ $y_в=-\dfrac{49}{40}$.

(2) Построим прямую $y=5x+1$ при условии, что $-\dfrac{1}{5}<x<1$. Значения функции в точках перелома:

$x=-\dfrac{1}{5},\ y\left(-\dfrac{1}{5}\right)=0$

$x=1,\ y(1)=6$

Уравнение не имеет решений, либо имеет единственное решение при $a\leq 0$.

Ответ: $a\leq 0$

№4. **При каких значениях a уравнение $|x^2-2x-3|-2a=|x-a|-1$ имеет ровно три корня?**

Решение:

$|x^2-2x-3|=|x-a|+2a-1$

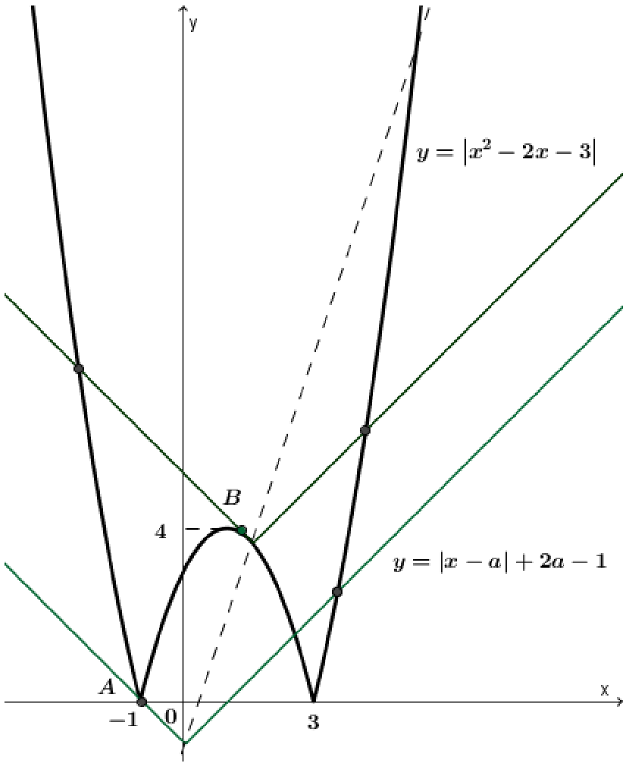
$$\begin{cases} y=|x^2-2x-3| & (1) \\ y=|x-a|+2a-1 & (2) \end{cases}$$

$(1)\ y=|x^2-2x-3|$

$x_в=-\dfrac{-2}{2}=1\ \ y_в=|1^2-2\cdot1-3|=4$

$y=0,\ \ x_1=-1\ \ x_2=3$

$(2)\ \ y=|x-a|+2a-1$ угол с вершиной $(a;2a-1)$, который движется по прямой, проходящей через точки $(1;1)$ и $(0;-1)$.



Угол $y=|x-a|+2a-1$ проходит левой веткой через точку $A(-1;0)$ и правой веткой еще два раза пересекает график $y=|x^2-2x-3|$ - три решения.

$y=-x+a+2a-1$

$0=1+3a-1,\ \ a=0$

Угол $y=|x-a|+2a-1$ касается левой веткой графика $y=|x^2-2x-3|$ в точке B и правой веткой еще два раза его пересекает - три решения.

$$\begin{cases} y=-x^2+2x+3 \\ y=-x+a+2a-1 \end{cases};$$

$-x^2+2x+3=-x+3a-1$

$x^2-3x+3a-4=0,\ \ D=0$

$D=9-4(3a-4)=25-12a$

$25-12a=0,\ \ a=\dfrac{25}{12}$

Ответ: 0 и $\dfrac{25}{12}$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

Графическая иллюстрация облегчает решение уравнений с параметром. Рекомендуется, по возможности, собрать в одной стороне уравнения выражения, содержащие параметр, а в другой стороне - без параметра.

- ***Уравнение*** $f(x;a)=g(x)$ ***равносильно системе уравнений*** $\begin{cases} y=f(x;a) \\ y=g(x) \end{cases}$***, где функция*** $y=f(x;a)$ ***задает на плоскости*** $(x;y)$ ***семейство кривых, зависящих от параметра.***

- *График функции* $y=f(x+a)+b$ *получается из графика функции* $y=f(x)$ *параллельным переносом:*
  на $|a|$ *вправо, если* $a<0$*; на* $|a|$ *влево, если* $a>0$*;*
  на $|b|$ *вверх, если* $b>0$*; на* $|b|$ *вниз, если* $b<0$.