Системы линейных уравнений с параметром

▪ *Примеры*

№1. При каком значении a система $\begin{cases} (a-2)x-2y=3 \\ 2x-(a+1)y=a+3 \end{cases}$ не имеет решений?

№2. При каком значении a система $\begin{cases} (a-3)x+4y=5 \\ 2x+(a+4)y=a+6 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№3. Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases} 2x+y=a \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $y^2<2x+3$.

№4. Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases} ax+y=1 \\ 3x-y=a \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x<y$.

№5. Для системы уравнений $\begin{cases} 2x-3y=2a^2-6a+2 \\ 3x+2y=3a^2+4a+3 \end{cases}$ определите, при каком значении параметра a сумма $x+y$ принимает наименьшее значение.

№6. При каких значениях а решение системы $\begin{cases} (a-2)x+2(a^2-2a)y=3a^2+16 \\ (a^2-2a)x-4(a-2)y=a^3+12a \end{cases}$ удовлетворяет условию $x-8y\le 0$?

№7. При каких значениях a и b система уравнений $\begin{cases} a^2x-by=a^2+2b \\ 4bx-b^2y=4-3b \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№8. Найдите все значения параметра p, при которых найдется не менее двух различных значений параметра q таких, что система $\begin{cases} (p-4)x+(p^2-7p+12)y=q^2-6q+5 \\ (p-1)x+8y=4pq \end{cases}$, имеет бесконечное множество решений.

№1. При каком значении a система $\begin{cases}(a-2)x-2y=3\\ 2x-(a+1)y=a+3\end{cases}$ **не имеет решений?**

Решение:

$$\begin{cases}(a-2)x-2y=3\\ 2x-(a+1)y=a+3\end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{a-2}{2}=\frac{-2}{-(a+1)}}_{(1)},\quad \underbrace{\frac{-2}{-(a+1)}\neq\frac{3}{a+3}}_{(2)}$$

$$(1)\quad -(a-2)(a+1)=-4;\ \ a^2-a-2-4=0;\ \ a^2-a-6=0;\ \ a_1=3,\ \ a_2=-1$$

$$(2)\ \ a=3,\ \ \frac{2}{a+1}\neq\frac{3}{a+3};\ \ \frac{2}{4}\neq\frac{3}{6};\ \ \frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}\ \text{неверно}$$

$$a=-2,\ \ \frac{2}{-2+1}\neq\frac{3}{-2+3};\ \ \frac{2}{-1}\neq\frac{3}{1},\ \text{верно}\Rightarrow a=-2$$

Ответ: -2.

№2. При каком значении a система $\begin{cases}(a-3)x+4y=5\\ 2x+(a+4)y=a+6\end{cases}$ **имеет бесконечно много решений?**

Решение:

$$\begin{cases}(a-3)x+4y=5\\ 2x+(a+4)y=a+6\end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{a-3}{2}=\frac{4}{a+4}}_{(1)},\quad \underbrace{\frac{4}{a+4}\neq\frac{5}{a+6}}_{(2)}$$

$$(1)\quad (a-3)(a+4)=8;\ \ a^2+a-12-8=0;\ \ a^2+a-20=0;\ \ a_1=-5,\ \ a_2=4$$

$$(2)\ \ a=-5;\ \ \frac{4}{-5+4}=\frac{5}{-5+6};\ \ \frac{4}{-1}=\frac{5}{1},\ \text{неверно}$$

$$a=4;\ \ \frac{4}{4+4}=\frac{5}{4+6};\ \ \frac{4}{8}=\frac{5}{10};\ \ \frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \text{верно},\ a=4$$

Ответ: 4.

№3. Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases}2x+y=a\\ 2x+3y=1\end{cases}$ **удовлетворяет неравенству $y^2<2x+3$. В ответе указать наибольшее целое значение a.**

Решение:

$$\begin{cases}2x+y=a\ \ \Big|\cdot(-3)\\ 2x+3y=1\end{cases},$$

$$1)\ \ 2y=1-a,\ \ y=\frac{1-a}{2}$$

$$2)\ \ \begin{cases}-6x-3y=-3a\\ 2x+3y=1\end{cases}\boxed{+}\ \ -4x=1-3a,\ \ x=\frac{3a-1}{4}$$

$$3)\ \ y^2<2x+3,\ \ \left(\frac{1-a}{2}\right)^2<2\cdot\frac{3a-1}{4}+3$$

$$\frac{1-2a+a^2}{4}<\frac{3a-1}{2}+3\ \ \Big|\cdot 4$$

$$1-2a+a^2<6a-2+12,\ \ \ a^2-8a-9<0,\ \ \ (a+1)(a-9)<0,\ \ a\in(-1;9)$$

Ответ: $(-1;9)$.

№4. **Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases} ax+y=1 \\ 3x-y=a \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x<y$.**

Решение:

$$\begin{cases} ax+y=1 & \vert\cdot 3 \\ 3x-y=a & \vert\cdot a \end{cases} \boxed{+} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3ax+3y=3 \\ 3ax-ay=a^2 \end{cases} \boxed{-}$$

$$x(3+a)=1+a \qquad y(3+a)=3-a^2$$

$$x=\frac{1+a}{a+3} \qquad y=\frac{3-a^2}{a+3}$$

$$x<y;\quad \frac{1+a}{a+3}<\frac{3-a^2}{a+3};\quad \frac{1+a-3+a^2}{a+3}<0;\quad \frac{a^2+a-2}{a+3}<0$$

$$\frac{(a-1)(a+2)}{a+3}<0,\quad a\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)$$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-2;1)$.

№5. **Для системы уравнений $\begin{cases} 2x-3y=2a^2-6a+2 \\ 3x+2y=3a^2+4a+3 \end{cases}$ определите, при каком значении параметра a сумма $x+y$ принимает наименьшее значение.**

Решение:

$$1)\ \begin{cases} 2x-3y=2a^2-6a+2 & \vert\cdot 3 \\ 3x+2y=3a^2+4a+3 & \vert\cdot(-2) \end{cases},\quad \begin{cases} 6x-9y=6a^2-18a+6 \\ -6x-4y=-6a^2-8a-6 \end{cases}$$

$$-13y=-26a,\quad y=2a$$

$$2)\ \begin{cases} 2x-3y=2a^2-6a+2 & \vert\cdot 2 \\ 3x+2y=3a^2+4a+3 & \vert\cdot 3 \end{cases},\quad \begin{cases} 4x-6y=4a^2-12a+4 \\ 9x+6y=9a^2+12a+9 \end{cases}$$

$$13x=13a^2+13,\quad x=a^2+1$$

Сумма $x+y=a^2+2a+1=(a+1)^2$ принимает наименьшее значение при $a=-1$.

Ответ: -1.

№6. **При каких значениях а решение системы** $\begin{cases}(a-2)x+2(a^2-2a)y=3a^2+16\\(a^2-2a)x-4(a-2)y=a^3+12a\end{cases}$ **удовлетворяет условию** $x-8y\le 0$**?**

Решение:

$$\begin{cases}(a-2)x+2(a^2-2a)y=3a^2+16 & \left|\cdot a\right|\cdot 2\\(a^2-2a)x-4(a-2)y=a^3+12a & \left|\cdot a\right.\end{cases},\quad x-8y\le 0$$

1) $\boxed{-}\begin{cases}(a^2-2a)x+2(a^3-2a^2)y=3a^3+16a\\(a^2-2a)x-4(a-2)y=a^3+12a\end{cases}$

$$y\left(2(a^3-2a^2)+4(a-2)\right)=2a^3+4a$$

$$2y(a-2)(a^2+2)=2a^3+4a$$

$$y=\frac{2a^3+4a}{2(a-2)(a^2+2)}=\frac{2a(a^2+2)}{2(a-2)(a^2+2)}=\frac{a}{(a-2)}$$

2) $\boxed{+}\begin{cases}2(a-2)x+4(a^2-2a)y=6a^2+32\\a^2(a-2)x-4(a^2-2a)y=a^4+12a^2\end{cases}$

$$x(a-2)(a^2+2)=a^4+18a^2+32$$

$$x=\frac{a^4+18a^2+32}{(a-2)(a^2+2)}=\frac{(a^2+2)(a^2+16)}{(a-2)(a^2+2)}=\frac{(a^2+16)}{(a-2)}$$

3) $x-8y\le 0;\quad \frac{(a^2+16)}{(a-2)}-8\cdot\frac{a}{(a-2)}\le 0;\quad \frac{a^2-8a+16}{a-2}\le 0,\quad \frac{(a-4)^2}{a-2}\le 0,\quad a\in(-\infty;2)\cup\{4\}$

Ответ: $(-\infty;2)\cup\{4\}$.

№7. **При каких значениях** a **и** b **система уравнений** $\begin{cases}a^2x-by=a^2+2b\\4bx-b^2y=4-3b\end{cases}$ **имеет бесконечно много решений?**

Решение:

$$\frac{a^2}{4b}=\frac{-b}{-b^2}=\frac{a^2+2b}{4-3b}$$

1) $\frac{a^2}{4b}=\frac{1}{b};\ a^2=4,\ a=\pm 2$

2) Если $a=\pm 2,\ \frac{1}{b}=\frac{4+2b}{4-3b}$

$4-3b=4b+2b^2,\quad 2b^2+7b-4=0,\quad D=49+32=81$

$$b=\frac{-7\pm 9}{4};\ b_1=-4,\ b_2=\frac{1}{2}$$

Ответ: $a=\pm 2,\ b_1=-4,\ b_2=\frac{1}{2}$.

№8. **Найдите все значения параметра p, при которых найдется не менее двух различных значений параметра q таких, что система $\begin{cases}(p-4)x+(p^2-7p+12)y=q^2-6q+5\\(p-1)x+8y=4pq\end{cases}$, имеет бесконечное множество решений.**

Решение:

$$a)\ \frac{p-4}{p-1}=\frac{p^2-7p+12}{8}=\frac{q^2-6a+5}{4pq},\qquad \begin{cases}p_1+p_2=7\\p_1\cdot p_2=12\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p=4\\p=3\end{array}\right.$$

$$\frac{p-4}{p-1}=\frac{(p-4)(p-3)}{8},\ \ p\neq 1$$

Если $p=4$, то $\frac{0}{3}=\frac{0\cdot 1}{8}$, $0=0$ верно

$$\frac{0}{3}=\frac{q^2-6a+5}{16q}\Rightarrow q^2-6a+5=0,\quad \begin{cases}q_1+q_2=6\\q_1\cdot q_2=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q_1=1\\q_2=5\end{array}\right.$$

Проверка:

$p=4,\ q=1$ $\begin{cases}0\cdot x+0\cdot y=0\\3x+8y=16\end{cases}$ Любая пара чисел $(x;y)$ является решением системы.

$p=4,\ q=5$ $\begin{cases}0\cdot x+0\cdot y=0\\3x+8y=80\end{cases}$ Любая пара чисел $(x;y)$ является решением системы.

При $p=4$, $q=1$ или $q=5$ и система имеет бесконечное множество решений

$$б)\ \frac{p-1}{p-4}=\frac{8}{p^2-7p+12}=\frac{4pq}{q^2-6q+15}$$

$$\frac{p-1}{p-4}=\frac{8}{(p-4)(p-3)}=\frac{4pq}{(q-1)(q-5)}$$

$p\neq 4, p\neq 3\Rightarrow (p-1)(p-3)=8,\ \ p^2-4p+3-8=0$

$$p^2-4p-5=0\quad \begin{cases}p_1+p_2=4\\p_1\cdot p_2=-5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p_1=5\\p_2=-1\end{array}\right.$$

Если $p=5$, то $\frac{4}{1}=\frac{8}{1\cdot 2}=\frac{20q}{(q-1)(q-5)}$

$$(q-1)(q-5)=5q\Leftrightarrow q^2-11q+5=0\Leftrightarrow q=\frac{11\pm\sqrt{101}}{2}$$

При $p=5$ и $q=\frac{11\pm\sqrt{101}}{2}$ система $\begin{cases}x+2y=q^2-6q+5\\x+2y=5q\end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

Подставим в систему уравнений значение $p=-1$, получим

$$\begin{cases}-5x+20y=q^2-6q+5\\-2x+8y=-4q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4y=\dfrac{q^2-6q+5}{-5}\\x-4y=2q\end{cases}.$$

Система имеет бесконечное множество решений, если $\frac{q^2-6q+5}{-5}=2q\Leftrightarrow\varnothing$

Ответ: 4 и 5.

▪ *Тест* Системы линейных уравнений с параметром

№1. Определить значение параметра p, при котором система $\begin{cases} -8x+4y=-1 \\ 9x+py=3 \end{cases}$ не имеет решений.

№2. Определить значение параметра p, при котором система $\begin{cases} -3x-3y=-5 \\ 7x+py=7 \end{cases}$ не имеет решений.

№3. При каком значении a система $\begin{cases} (a-1)x-3y=2 \\ 2x+(a-8)y=a+2 \end{cases}$ не имеет решений?

№4. При каком значении a система $\begin{cases} (a+3)x+5y=1 \\ -2x+(a+14)y=a+6 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№5. Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases} x+y=a \\ 2x-y=3 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $y^2<x$.

№6. Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases} ax+ay=2 \\ x+2y=a \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x<y+4$.

№7. При каких значениях p и q система уравнений $\begin{cases} px+qy=3p+5 \\ qx+4py=6q-5p \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

№8. При каких значениях a и b система уравнений $\begin{cases} b^2x+ay=2b^2+8a \\ ax+a^2y=2,25-5a \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

№9. При каких значениях a решение системы $\begin{cases} (a-1)x-(a^2-a)y=9-2a^2 \\ (a^2-a)x+3(a-1)y=a^3+18a \end{cases}$ удовлетворяет условию $x+2y\geq 0$?

▪ *Ответы (тест)* Системы линейных уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9
-4,5	7	7	-4	$\left(0,\dfrac{15}{4}\right)$	$(-3,0)$; $(1,\infty)$	$p=10,\ q=20$; $p=\dfrac{10}{11},\ q=-\dfrac{20}{11}$	$\left(-\dfrac{9}{8};1\right);\left(-\dfrac{9}{8};-1\right);$ $\left(\dfrac{1}{4};1\right);\left(\dfrac{1}{4};-1\right)$	$\{-3\}$; $(1;\infty)$

▪ *Решение (тест)* Системы линейных уравнений с параметром

№1. Определить значение параметра p, при котором система $\begin{cases}-8x+4y=-1\\ 9x+py=3\end{cases}$ **не имеет решений.**

Решение:

$\begin{cases}-8x+4y=-1\\ 9x+py=3\end{cases},\quad -\dfrac{8}{9}=\dfrac{4}{p}\neq-\dfrac{1}{3},\quad -\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{p},\quad p=-4,5$

Ответ: -4,5.

№2. Определить значение параметра p, при котором система $\begin{cases}-3x-3y=-5\\ 7x+py=7\end{cases}$ **не имеет решений.**

Решение:

$\begin{cases}-3x-3y=-5\\ 7x+py=7\end{cases},\quad -\dfrac{3}{7}=-\dfrac{3}{p}\neq-\dfrac{5}{7},\quad p=7.$

Ответ: 7.

№3. При каком значении a система $\begin{cases}(a-1)x-3y=2\\ 2x+(a-8)y=a+2\end{cases}$ **не имеет решений?**

Решение:

$$\frac{a-1}{2}=-\frac{3}{a-8}\neq\frac{2}{a+2}$$

$$1)\ (a-1)(a-8)=-6,\quad a^2-9a+14=0,\quad a_1=2,\ a_2=7$$

$$2)\ a=2,\ \frac{2-1}{2}\neq\frac{2}{2+2},\quad \frac{1}{2}\neq\frac{1}{2},\ \text{неверно}$$

$$a=7,\ \frac{7-1}{2}\neq\frac{2}{7+2},\quad \frac{6}{2}\neq\frac{2}{9},\ \text{верно}$$

Ответ: 7.

№4. При каком значении a система $\begin{cases}(a+3)x+5y=1\\ -2x+(a+14)y=a+6\end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Решение:

$$\frac{a+3}{-2}=\frac{5}{a+14}=\frac{1}{a+6}$$

$$1)\ \frac{a+3}{-2}=\frac{5}{a+14},\quad (a+3)(a+14)=-10,\quad a^2+17a+52=0,\quad a_1=-4\ a_2=-13$$

$$2)\ \frac{5}{a+14}=\frac{1}{a+6}$$

$$a=-4,\ \frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \text{верно}$$

$$a=-13,\ \frac{5}{1}=\frac{1}{-7},\ \text{неверно}$$

Ответ: -4.

№5. **Найти все значения** a**, при которых любое решение системы** $\begin{cases} x+y=a \\ 2x-y=3 \end{cases}$ **удовлетворяет неравенству** $y^2<x$**.**

Решение:

$$1)\ \begin{cases} x+y=a \\ 2x-y=3 \end{cases}\boxed{+},\quad \begin{cases} x+y=a \\ 3x=a+3 \end{cases},\quad \begin{cases} x=\dfrac{a+3}{3} \\ x+y=a \end{cases},\quad \begin{cases} x=\dfrac{a+3}{3} \\ y=a-\dfrac{a+3}{3} \end{cases},\quad \begin{cases} x=\dfrac{a+3}{3} \\ y=\dfrac{2a-3}{3} \end{cases}$$

$$2)\ y^2<x,\quad \left(\frac{2a-3}{3}\right)^2<\frac{a+3}{3},\quad \frac{4a^2-12a+9}{9}-\frac{a+3}{3}<0,\quad 4a^2-15a<0,\quad a(4a-15)<0$$

Ответ: $a\in\left(0,\dfrac{15}{4}\right)$.

№6. **Найти все значения** a**, при которых любое решение системы** $\begin{cases} ax+ay=2 \\ x+2y=a \end{cases}$ **удовлетворяет неравенству** $x<y+4$**.**

Решение:

$$1)\ \begin{cases} ax+ay=2 \\ x+2y=a \quad |\cdot(-a) \end{cases},\quad \begin{cases} ax+ay=2 \\ -ax-2ay=-a^2 \end{cases}$$

$$-ay=2-a^2$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{a^2-2}{a} \\ x+2y=a \end{cases},\quad \begin{cases} y=\dfrac{a^2-2}{a} \\ x+\dfrac{2(a^2-2)}{a}=a \end{cases},\quad \begin{cases} y=\dfrac{a^2-2}{a} \\ x=\dfrac{a^2-2a^2+4}{a} \end{cases},\quad \begin{cases} y=\dfrac{a^2-2}{a} \\ x=\dfrac{4-a^2}{a} \end{cases}$$

$$2)\ x<y+4,\ \text{то}\ \frac{4-a^2}{a}<\frac{a^2-2}{a}+4,\quad \frac{-2a^2-4a+6}{a}<0,\quad \frac{a^2+2a-3}{a}>0,\quad \frac{(a-1)(a+3)}{a}>0$$

Ответ: $a\in(-3,0);(1,\infty)$.

№7. **При каких значениях** p **и** q **система уравнений** $\begin{cases} px+qy=3p+5 \\ qx+4py=6q-5p \end{cases}$ **имеет бесконечно много решений?**

Решение:

$$\frac{p}{q}=\frac{q}{4p}=\frac{3p+5}{6q-5p}\quad \text{При } p=0 \text{ и } q=0 \text{ система решений не имеет.}$$

$$1)\ 4p^2=q^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=2p \\ q=-2p \end{array}\right.$$

$$2)\ q=2p,\quad \frac{p}{2p}=\frac{3p+5}{6\cdot 2p-5p} \Leftrightarrow p=10,\ q=20$$

$$3)\ q=-2p,\quad \frac{p}{-2p}=\frac{3p+5}{-6\cdot 2p-5p} \Leftrightarrow p=\frac{10}{11},\ q=-\frac{20}{11}$$

Ответ: 1) $p=10,\ q=20$; 2) $p=\dfrac{10}{11},\ q=-\dfrac{20}{11}$.

№8. **При каких значениях a и b система уравнений $\begin{cases} b^2x + ay = 2b^2 + 8a \\ ax + a^2y = 2,25 - 5a \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?**

Решение:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{a}{a^2} = \frac{2b^2 + 8a}{2,25 - 5a}$$

$$(1)\ \ \frac{b^2}{a} = \frac{a}{a^2}\ \ \text{Если } a = 0,\ b = 0,\ \text{то} \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 2,25 \end{cases} \varnothing$$

$$\frac{b^2}{a} = \frac{1}{a};\ \ b^2 = 1$$

$$(2)\ \ b^2 = 1,\ \ \frac{a}{a^2} = \frac{2 + 8a}{2,25 - 5a};\ \ \frac{1}{a} = \frac{2 + 8a}{2,25 - 5a};$$

$$8a^2 + 7a - 2,25 = 0,\ \ D = 49 + 72 = 121,\ \ a_1 = -\frac{9}{8}\ \ a_2 = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = -\frac{9}{8}\ \ b_1 = 1;\ \ a_1 = -\frac{9}{8}\ \ b_2 = -1;\ \ a_2 = \frac{1}{4}\ \ b_1 = 1;\ \ a_2 = \frac{1}{4}\ \ b_2 = -1$$

Ответ: $\left(-\frac{9}{8};1\right);\ \left(-\frac{9}{8};-1\right);\ \left(\frac{1}{4};1\right);\ \left(\frac{1}{4};-1\right)$.

№9. При каких значениях a решение системы $\begin{cases} (a-1)x - \left(a^2 - a\right)y = 9 - 2a^2 \\ \left(a^2 - a\right)x + 3(a-1)y = a^3 + 18a \end{cases}$ удовлетворяет условию $x + 2y \ge 0$?

Решение:

$$\begin{cases} (a-1)x - \left(a^2 - a\right)y = 9 - 2a^2 & \left|\cdot a\right|\cdot 3 \\ \left(a^2 - a\right)x + 3(a-1)y = a^3 + 18a & \left|\cdot a\right. \end{cases}$$

$$1)\ \boxed{-}\begin{cases} \left(a^2 - a\right)x - a^2(a-1)y = 9a - 2a^3 \\ \left(a^2 - a\right)x + 3(a-1)y = a^3 + 18a \end{cases}$$

$$y(a-1)\left(3 + a^2\right) = 3a^3 + 9a$$

$$y = \frac{3a^3 + 9a}{(a-1)\left(3 + a^2\right)} = \frac{3a\left(a^2 + 3\right)}{(a-1)\left(a^2 + 3\right)} = \frac{3a}{a-1},\ \ y = \frac{3a}{a-1}$$

$$2)\ \boxed{+}\begin{cases} 3(a-1)x - 3a(a-1)y = 27 - 6a^2 \\ a^2(a-1)x + 3a(a-1)y = a^4 + 18a^2 \end{cases}$$

$$x(a-1)\left(a^2 + 3\right) = a^4 + 12a^2 + 27$$

$$x = \frac{\left(a^2 + 9\right)\left(a^2 + 3\right)}{(a-1)\left(a^2 + 3\right)} = \frac{a^2 + 9}{a-1},\ \ \ x = \frac{a^2 + 9}{a-1}$$

$$3)\ \ x + 2y \ge 0,\ \ \frac{a^2 + 9}{a-1} + 2\cdot\frac{3a}{a-1} \ge 0,\ \ \frac{a^2 + 9 + 6a}{a-1} \ge 0,\ \ \frac{(a+3)^2}{a-1} \ge 0,\ \ a \in \{-3\} \cup (1;\infty)$$

Ответ: $\{-3\} \cup (1;\infty)$.

✓ *Линейное уравнение*

Линейное уравнение вида $ax = b$, где x - переменная, a и b - параметры, имеет:

- Единственное решение $x = \frac{b}{a}$, если $\begin{cases} a \neq 0 \\ b - \text{любое число} \end{cases}$.
- Пустое множество решений, если $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ и уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$.
- Бесконечное множество решений, если $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ и уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$.

✓ *Система линейных уравнений*

Система линейных уравнений вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ имеет:

- Единственную пару решений $(x; y)$, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.
- Пустое множество решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.
- Бесконечное множество решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Геометрическая интерпретация

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая.
Тогда система линейных уравнений имеет:

Единственную пару решений	Пустое множество решений	Бесконечное множество решений