Синус и косинус суммы и разности аргументов

▪ *Примеры*

№1. а) Решите уравнение $\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos^2 3x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\cos^2 x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\cos^2 x=\cos x-2\sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

№4. а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos 2x=\sin x+\sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\sin x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\cos x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1=\sqrt{3}\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\frac{11\pi}{2}\right]$.

№7. а) Решите уравнение $\sqrt{6}\cos x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

№8. а) Решите уравнение $8\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)-2\sqrt{3}\cos 2x=5$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

№9. а) Решите уравнение $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

№1. **а) Решите уравнение** $\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos^2 3x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos^2 3x$

$\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{x}{2}\right)=\cos^2 3x$

$\cos 3x-\cos^2 3x=0$

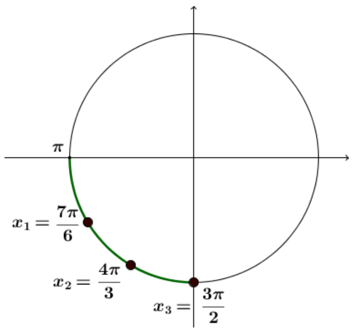
$\cos 3x\left(1-\cos 3x\right)=0$

$\cos 3x=0$ $\qquad$ $\cos 3x=1$

$3x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $\qquad$ $3x=2\pi k$

$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$ $\qquad$ $x=\frac{2\pi k}{3}$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.



Ответ: *а)* $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $\frac{2\pi k}{3}$ $k\in\mathbb{Z}$; *б)* $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$.

№2. **а) Решите уравнение** $\cos^2 x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\cos^2 x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos^2 x+\sin x=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos^2 x+\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$\cos^2 x+\sin x=\sin x+\cos x$

$\cos^2 x-\cos x=0$

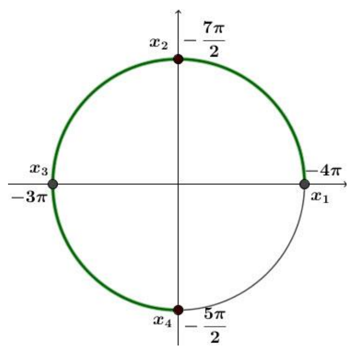
$\cos x\left(\cos x-1\right)=0$

$\cos x=0$ $\qquad$ $\cos x=1$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $\qquad$ $x=2\pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку

$\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.



$x_1=-4\pi$, $x_2=-\frac{7\pi}{2}$, $x_3=-3\pi$, $x_4=-\frac{5\pi}{2}$

Ответ: *а)* $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $2\pi k$; *б)* $-4\pi,-\frac{7\pi}{2},-3\pi,-\frac{5\pi}{2}$.

№3. **а) Решите уравнение** $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\cos^2 x=\cos x-2\sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение:

а) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\cos^2 x=\cos x-2\sqrt{3}$

$$2\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\cos^2 x-\cos x+2\sqrt{3}=0$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-2\sqrt{3}\cos^2 x-\cos x+2\sqrt{3}=0$$

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x-\cos x+2\sqrt{3}=0$$

$$\sqrt{3}\sin x-2\sqrt{3}\left(1-\sin^2 x\right)+2\sqrt{3}=0$$

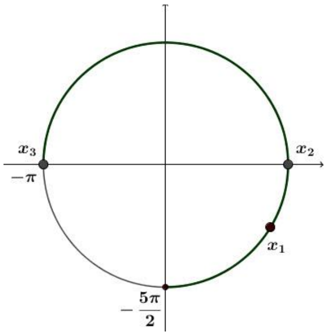
$$\sqrt{3}\sin x+2\sqrt{3}\sin^2 x=0,\quad \sqrt{3}\sin x\left(1+2\sin x\right)=0$$

$\sin x=0$ $\qquad$ $\sin x=-\frac{1}{2}$

$x=\pi k$ $\qquad$ $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$

$\qquad\qquad$ $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



$x_1=-2\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{13\pi}{6}$, $x_2=-2\pi$,

$x_3=-\pi$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi k$;

б) $-\frac{13\pi}{6},-2\pi,-\pi$.

№4. **а) Решите уравнение** $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos 2x=\sin x+\sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos 2x=\sin x+\sqrt{3}$

$$2\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos 2x-\sin x-\sqrt{3}=0$$

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x\right)-\sqrt{3}\cos 2x-\sin x-\sqrt{3}=0$$

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}\cos 2x-\sin x-\sqrt{3}=0$$

$$\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}\left(2\cos^2 x-1\right)-\sin x-\sqrt{3}=0$$

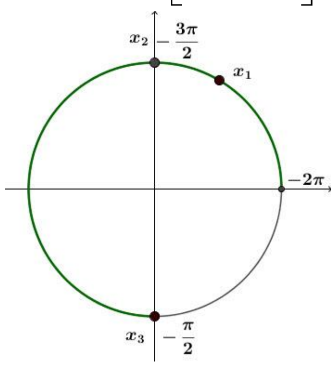
$$\sqrt{3}\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x=0$$

$$\cos x\left(1-2\cos x\right)=0$$

$\cos x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos x=0$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $\qquad$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.



$x_1=-2\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{3}$, $x_2=-\frac{3\pi}{2}$, $x_3=-\frac{\pi}{2}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k$;

б) $-\frac{5\pi}{3},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}$.

№5. **а) Решите уравнение** $\sin x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin 2x + 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение:

а) $\sin x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin 2x + 1$

$$\sin x + 2\left(\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 0$$

$$\sin x + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x\right) - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 0$$

$$\sin x + \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 0$$

$$\sin x + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0, \quad \sin x - 2\sin^2 x = 0$$

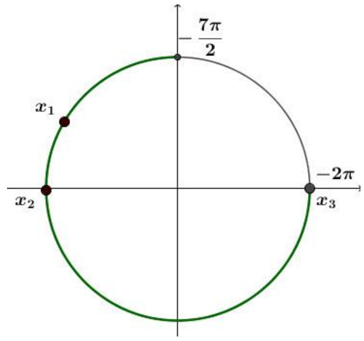
$$\sin x(1 - 2\sin x) = 0$$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x = 0$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $\qquad$ $x = \pi k$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.



$x_1 = -3\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{19\pi}{6}$, $x_2 = -3\pi$, $x_3 = -2\pi$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \pi k$;

б) $-\frac{19\pi}{6},\ -3\pi,\ -2\pi$.

№6. **а) Решите уравнение** $\cos x + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = \sqrt{3}\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\cos x + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = \sqrt{3}\sin 2x$

$$\cos x + 2\left(\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 0$$

$$\cos x + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x\right) - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 0$$

$$\cos x + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 0$$

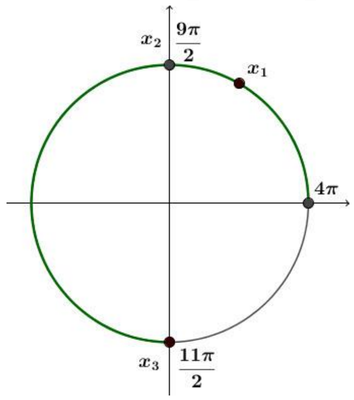
$$\cos x + 1 - 2\cos^2 x - 1 = 0, \quad \cos x - 2\cos^2 x = 0$$

$$\cos x(1 - 2\cos x) = 0$$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos x = 0$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$.



$x_1 = 4\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$, $x_2 = \frac{9\pi}{2}$, $x_3 = \frac{11\pi}{2}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k$; *б)* $\frac{13\pi}{3},\ \frac{9\pi}{2},\ \frac{11\pi}{2}$.

№7. **а) Решите уравнение** $\sqrt{6}\cos x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = \sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\sqrt{6}\cos x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = \sin 2x$

$$\sqrt{6}\cos x + 2\left(\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{6}\cos x + 2\left(\frac{1}{2}\cdot\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 2x\right) + \sqrt{3} - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{6}\cos x + \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3} - \sin 2x = 0$$

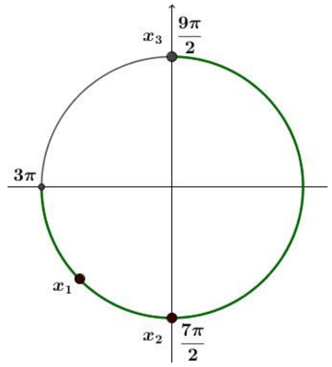
$$\sqrt{6}\cos x + \sqrt{3}\left(2\cos^2 x - 1\right) + \sqrt{3} = 0,\ \ \sqrt{6}\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0$$

$$\sqrt{3}\cos x\left(\sqrt{2} + 2\cos x\right) = 0$$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad\qquad$ $\cos x = 0$

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ $\qquad\qquad$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.



$$x_1 = 3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4},\ \ x_2 = \frac{7\pi}{2},\ x_3 = \frac{9\pi}{2}$$

Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ \frac{\pi}{2} + \pi k$ *; б)* $\frac{13\pi}{4},\ \frac{7\pi}{2},\ \frac{9\pi}{2}$.

№8. **а) Решите уравнение** $8\sin^2\left(\frac{7\pi}{12} + x\right) - 2\sqrt{3}\cos 2x = 5$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $8\sin^2\left(\frac{7\pi}{12} + x\right) - 2\sqrt{3}\cos 2x = 5$

$$8\cdot\frac{1 - \cos\left(2\cdot\left(\frac{7\pi}{12} + x\right)\right)}{2} - 2\sqrt{3}\cos 2x = 5$$

$$4\left(1 - \cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2x\right)\right) - 2\sqrt{3}\cos 2x = 5$$

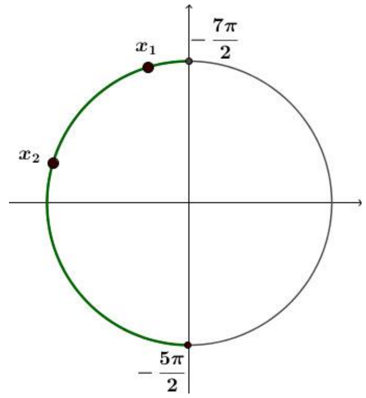
$$4 - 4\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\cos 2x - \sin\frac{7\pi}{6}\cdot\sin 2x\right) - 2\sqrt{3}\cos 2x = 5$$

$$-4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) - 2\sqrt{3}\cos 2x - 1 = 0$$

$$2\sqrt{3}\cos 2x - 2\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos 2x - 1 = 0$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + \pi k \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k \end{array}\right.$$

б) Отбор корней, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.



$$x_1 = -\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{12} = -\frac{41\pi}{12},\ \ x_2 = -3\pi - \frac{\pi}{12} = -\frac{37\pi}{12}$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{12} + \pi k, -\frac{5\pi}{12} + \pi k$;

б) $-\frac{41\pi}{12}, -\frac{37\pi}{12}$.

№9. **а) Решите уравнение** $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

Решение: а) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x$

$$\sin\left(x+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)-\cos x-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x=0$$

$$\sin x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos x-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x=0$$

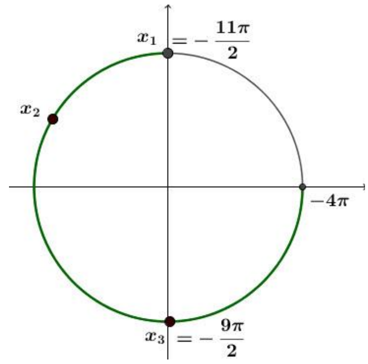
$$\cos x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos x=0,\quad \left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\right)\cos x=0$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1 \qquad \cos x=0$$

$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$$

б) Отбор корней, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.



$$x_1=-\frac{11\pi}{2},\quad x_2=-5\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{31\pi}{6}$$

$$x_3=-\frac{9\pi}{2}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad \frac{5\pi}{6}+2\pi k$; *б)* $-\frac{11\pi}{2},-\frac{31\pi}{6},-\frac{9\pi}{2}$.

▪ **Тест** Синус и косинус суммы и разности аргументов

№1. а) Решите уравнение $\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=2\cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2 x=\sin x+2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2};\right]$.

№4. а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

№5. а) Решите уравнение $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x=\sqrt{3}\sin 2x-1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\cos x+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

№7. а) Решите уравнение $\sqrt{6}\sin x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x-\sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

№8. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin 2x+4\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}+x\right)=2+\sqrt{2}$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

№9. а) Решите уравнение $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi-\frac{7\pi}{2};\right]$.

▪ *Ответы (тест)* Синус и косинус суммы и разности аргументов

№1	*а)* $\frac{\pi}{2}+\pi k\ ,\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\ \ k\in\mathbb{Z}$; *б)* $\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{5\pi}{2}.$
№2	*а)* $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi k$; *б)* $-2\pi,-\pi,-\frac{7\pi}{6}$
№3	*а)* $\frac{\pi}{2}+\pi k,\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $\frac{7\pi}{3},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}$
№4	*а)* $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi k$; *б)* $-3\pi,-2\pi,-\frac{11\pi}{6}$
№5	*а)* $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k$; *б)* $\frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\frac{11\pi}{3}$
№6	*а)* $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k$; *б)* $-\frac{11\pi}{2},-\frac{10\pi}{3},-\frac{8\pi}{3},-\frac{9\pi}{2}$
№7	*а)* $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\pi k$; *б)* $-3\pi,-\frac{11\pi}{4},-\frac{9\pi}{4},-2\pi$
№8	*а)* $\frac{\pi}{2}+\pi k$; *б)* $\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}$
№9	*а)* $\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $-\frac{9\pi}{2},-\frac{11\pi}{3},-\frac{7\pi}{2}$

▪ *Решение (тест)* Синус и косинус суммы и разности аргументов

№1. **а) Решите уравнение** $\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=2\cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=2\cos^2 x$

$$\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}\right)-2\cos^2 x=0$$

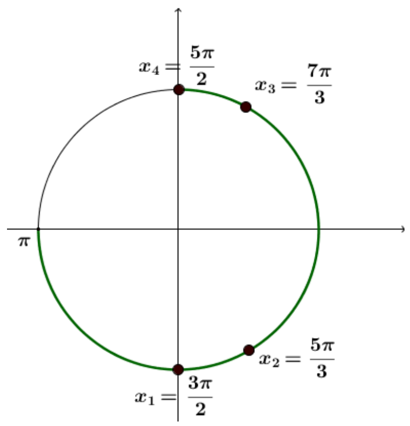
$$\cos x-2\cos^2 x=0$$

$$\cos x\left(1-2\cos x\right)=0$$

$$\cos x=0 \qquad \cos x=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \qquad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.



Ответ: *а)* $\frac{\pi}{2}+\pi k\ ,\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\ \ k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{5\pi}{2}.$

№2.

а) Решите уравнение $2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x$

$$2\sin^2 x+\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)-\cos x=0$$

$$2\sin^2 x+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)-\cos x=0$$

$$2\sin^2 x+\sin x+\cos x-\cos x=0$$

$$2\sin^2 x+\sin x=0$$

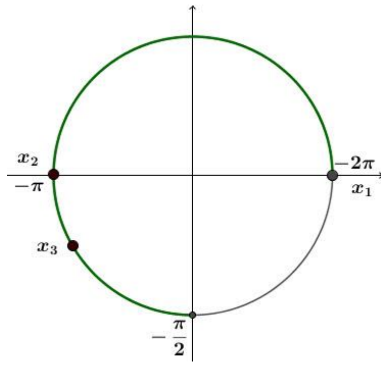
$$\sin x(2\sin x+1)=0$$

$\sin x=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x=0$

$x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$ $\qquad$ $x=\pi k$

$x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.



$x_1=-2\pi$, $x_2=-\pi$, $x_3=-\pi-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{7\pi}{6}$

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, \pi k$;

б) $-2\pi, -\pi, -\dfrac{7\pi}{6}$.

№3. **а) Решите уравнение** $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin^2 x=\sin x+2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2};\right]$.

Решение:

а) $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin^2 x=\sin x+2$

$$\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2 x-\sin x-2=0$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)+2\sin^2 x-\sin x-2=0$$

$$\sin x+\cos x+2\sin^2 x-\sin x-2=0$$

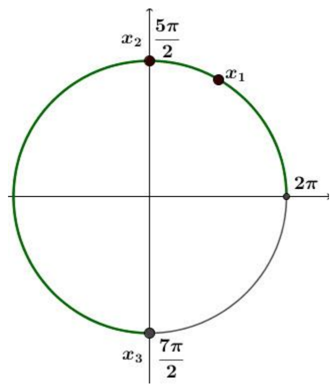
$$\cos x+2\left(1-\cos^2 x\right)-2=0$$

$$\cos x+2-2\cos^2 x-2=0,\quad \cos x(1-2\cos x)=0$$

$\cos x=0$ $\qquad$ $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ $\qquad$ $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2};\right]$.



$x_1=2\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{3}$, $x_2=\dfrac{5\pi}{2}$, $x_3=\dfrac{7\pi}{2}$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $\dfrac{7\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}$.

№4. **а) Решите уравнение** $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$

$$2\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x-\sqrt{3}\cos x-1=0$$

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x\right)+\cos 2x-\sqrt{3}\cos x-1=0$$

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+\cos 2x-\sqrt{3}\cos x-1=0$$

$$\sin x+1-2\sin^2 x-1=0,\quad \sin x-2\sin^2 x=0$$

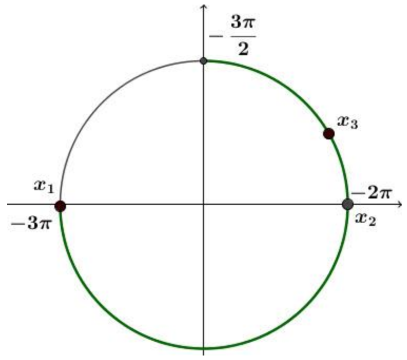
$$\sin x(1-2\sin x)=0$$

$\sin x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x=0$

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ $\qquad$ $x=\pi k$

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.



$x_1=-3\pi$, $x_2=-2\pi$,

$x_3=-2\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{11\pi}{6}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi k$;

б) $-3\pi,-2\pi,-11\pi/6$.

№5. **а) Решите уравнение** $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x=\sqrt{3}\sin 2x-1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение:

а) $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x=\sqrt{3}\sin 2x-1$

$$2\left(\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)-\cos x-\sqrt{3}\sin 2x+1=0$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 2x+\frac{1}{2}\cdot\cos 2x\right)-\cos x-\sqrt{3}\sin 2x+1=0$$

$$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-\cos x-\sqrt{3}\sin 2x+1=0$$

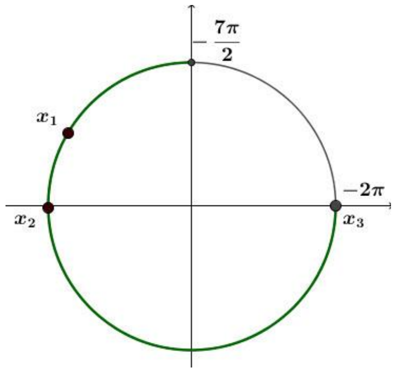
$$2\cos^2 x-1-\cos x+1=0,\ 2\cos^2 x-\cos x=0$$

$$\cos x(2\cos x-1)=0$$

$\cos x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos x=0$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $\qquad$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.



$x_1=\frac{5\pi}{2}$, $x_2=\frac{7\pi}{2}$, $x_3=4\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{11\pi}{3}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k$; *б)* $\frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ \frac{11\pi}{3}$.

№6. **а) Решите уравнение** $\cos x+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

Решение:

а) $\cos x+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=\sin 2x$

$$\cos x+\sqrt{2}\left(\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)+1-\sin 2x=0$$

$$\cos x+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right)+1-\sin 2x=0$$

$$\cos x+\sin 2x+\cos 2x+1-\sin 2x=0$$

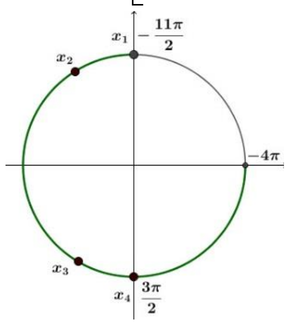
$$\cos x+2\cos^2 x-1+1=0,\ \ \cos x+2\cos^2 x=0$$

$$\cos x(1+2\cos x)=0$$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos x=0$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ $\qquad$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.



$x_1=-\frac{11\pi}{2}$, $x_2=-3\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{10\pi}{3}$,

$x_3=-3\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{8\pi}{3}$, $x_4=-\frac{9\pi}{2}$

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k$; *б)* $-\frac{11\pi}{2},-\frac{10\pi}{3},-\frac{8\pi}{3},-\frac{9\pi}{2}$.

№7. **а) Решите уравнение** $\sqrt{6}\sin x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x-\sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

Решение: а) $\sqrt{6}\sin x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x-\sqrt{3}$

$$\sqrt{6}\sin x+2\left(\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)-\sin 2x+\sqrt{3}=0$$

$$\sqrt{6}\sin x+2\left(\frac{1}{2}\cdot\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 2x\right)+\sqrt{3}-\sin 2x=0$$

$$\sqrt{6}\sin x+\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x+\sqrt{3}-\sin 2x=0$$

$$\sqrt{6}\sin x+\sqrt{3}\left(1-2\sin^2 x\right)+\sqrt{3}=0,\ \ \sqrt{6}\sin x+2\sqrt{3}\sin^2 x=0$$

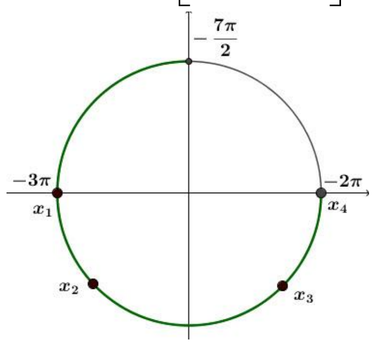
$$\sqrt{3}\sin x\left(\sqrt{2}+2\sin x\right)=0$$

$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin x=0$

$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $\qquad$ $x=\pi k$

$x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.



$x_1=-3\pi$, $x_2=-3\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{11\pi}{4}$,

$x_3=-2\pi-\frac{\pi}{4}=-\frac{9\pi}{4}$, $x_4=-2\pi$

Ответ: а) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \pi k$; *б)* $-3\pi,\ -\frac{11\pi}{4},\ -\frac{9\pi}{4},\ -2\pi$.

№8.

а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin 2x+4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{8}+x\right)=2+\sqrt{2}$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\sqrt{2}\sin 2x+4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{8}+x\right)=2+\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}\sin 2x+4\cdot\frac{1+\cos\left(2\cdot\left(\dfrac{3\pi}{8}+x\right)\right)}{2}=2+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\sin 2x+2\left(1+\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2x\right)\right)=2+\sqrt{2}$$

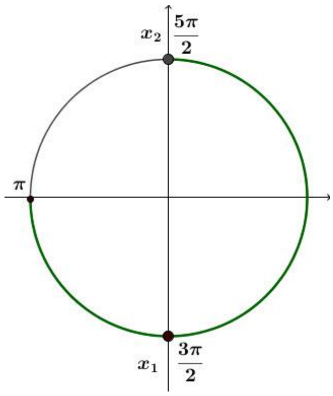
$$\sqrt{2}\sin 2x\cancel{+2}+2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}\cdot\cos 2x-\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\sin 2x\right)=\cancel{2}+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\sin 2x+2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=\sqrt{2}$$

$$\cos 2x=-1,\quad 2x=\pi+2\pi k,\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

б) Отбор корней, принадлежащих отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.



$$x_1=\frac{3\pi}{2},\quad x_2=\frac{5\pi}{2}$$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$; *б)* $\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{2}$.

№9. **а) Решите уравнение** $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi-\dfrac{7\pi}{2};\right]$.

Решение: а) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x$

$$\sin\left(x+\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)-\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x=0$$

$$\sin x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x=0$$

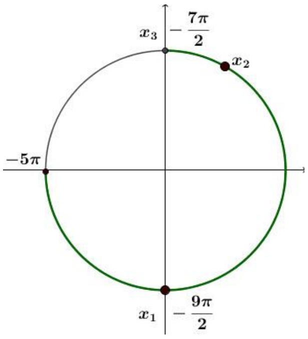
$$\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x=0,\quad \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right)\cos x=0$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \qquad \cos x=0$$

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$$

б) Отбор корней, принадлежащих отрезку $\left[-5\pi-\dfrac{7\pi}{2};\right]$.



$$x_1=-\frac{9\pi}{2},\quad x_2=-4\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{11\pi}{3}$$

$$x_3=-\frac{7\pi}{2}$$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\quad \dfrac{\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $-\dfrac{9\pi}{2},-\dfrac{11\pi}{3},-\dfrac{7\pi}{2}$.