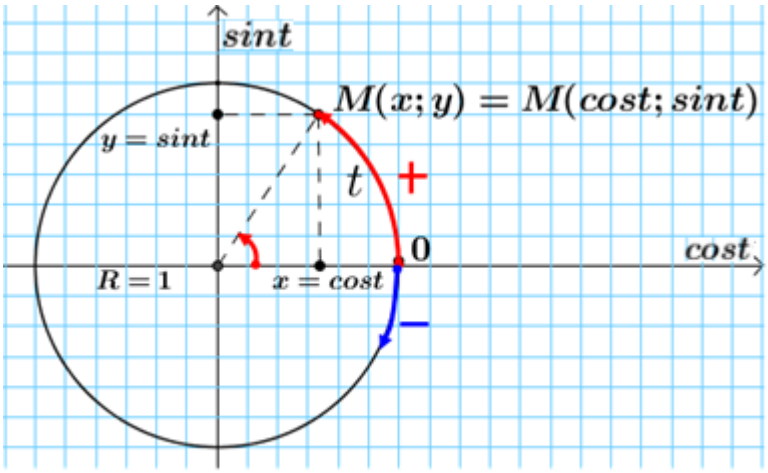
Тема: Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения и их частные случаи

Для успешного решения простейших тригонометрических уравнений и их частных случаев воспользуемся тригонометрическим кругом. Его можно назвать «спасательным» кругом, т.к. он не даст вам утонуть в тригонометрическом океане понятий, значений, формул и т.д.

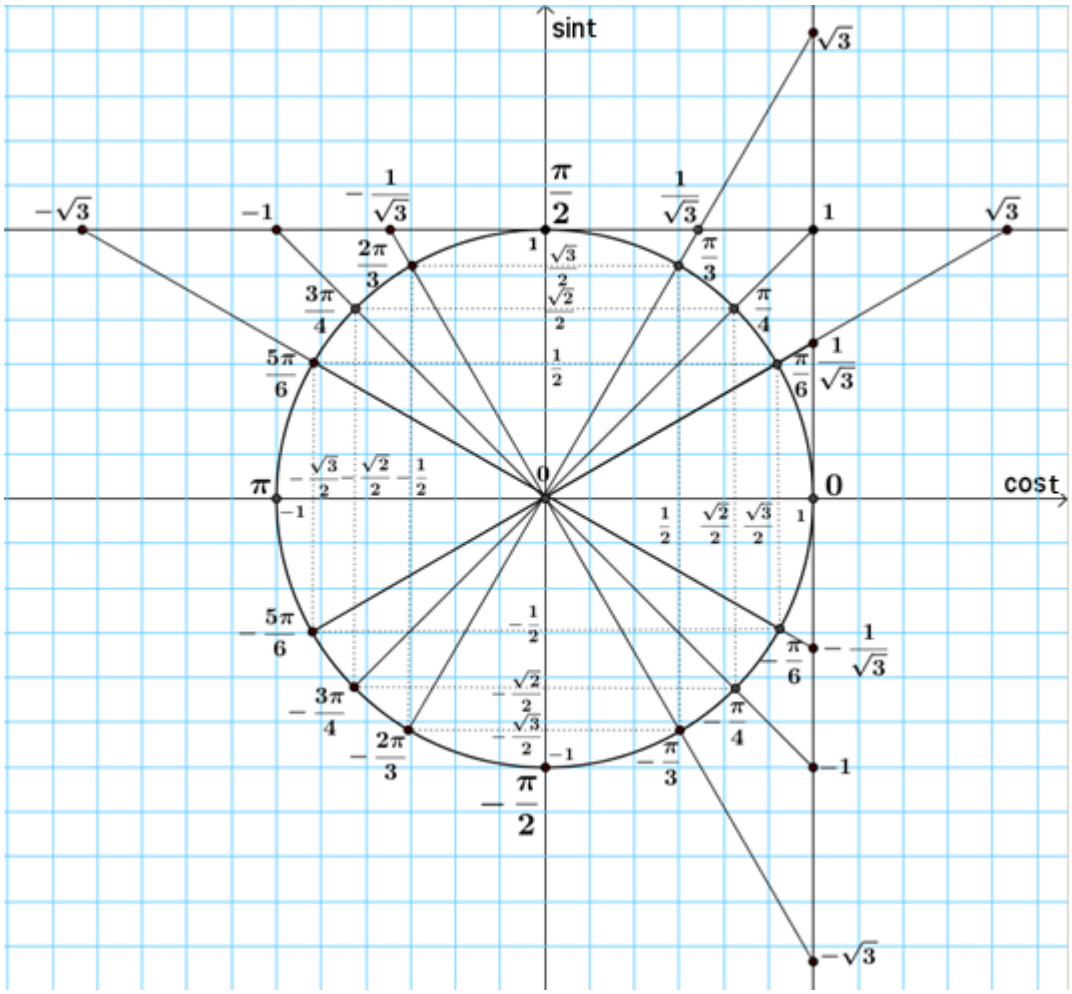
Пусть точка $M\left(x;y\right)$ *принадлежит единичной окружности, тогда* $M\left(x;y\right)=M\left(\cos t;\sin t\right)$, *где* $t-$ *путь, пройденный по окружности от начала отсчета.*



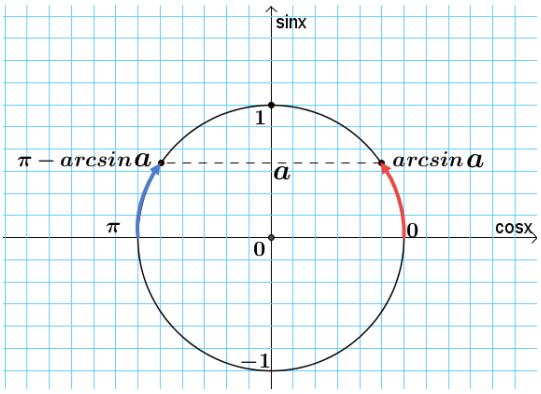
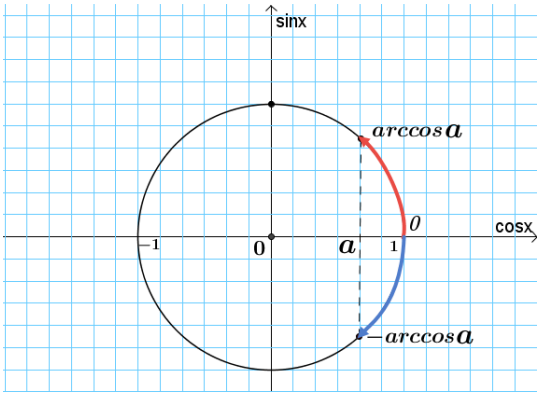
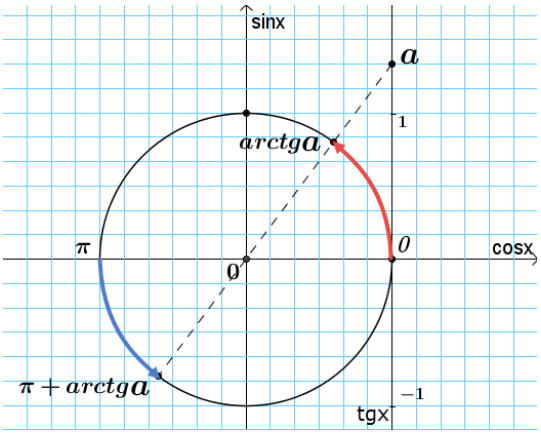
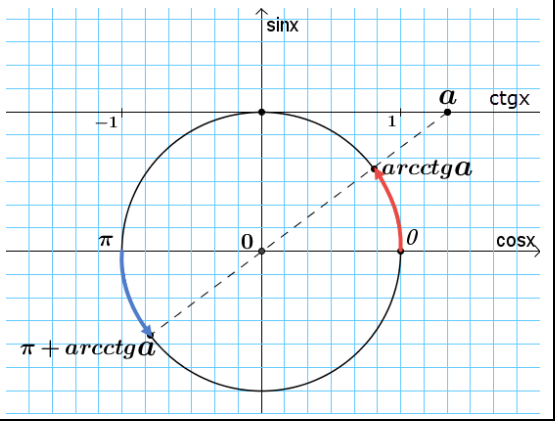
$\cos t=x$ *(абсцисса точки единичной окружности)*

$\sin t=y$ *(ордината точки единичной окружности)*

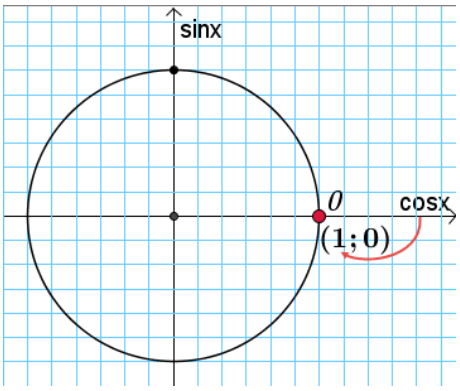
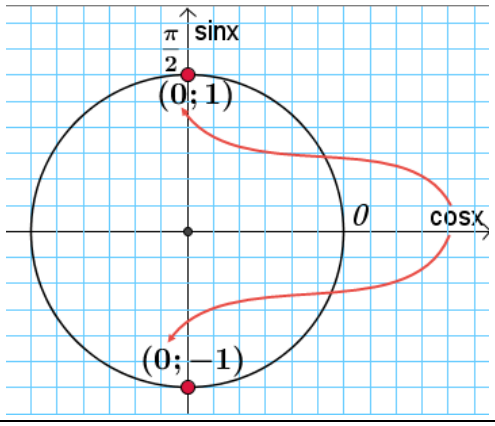
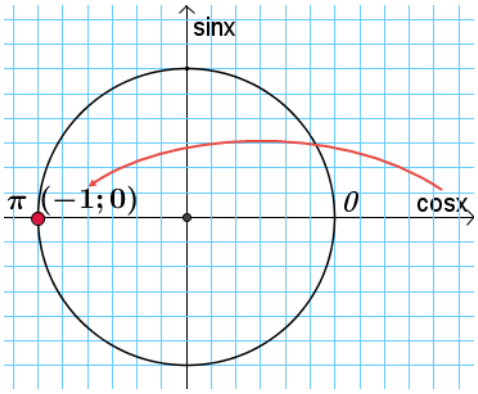
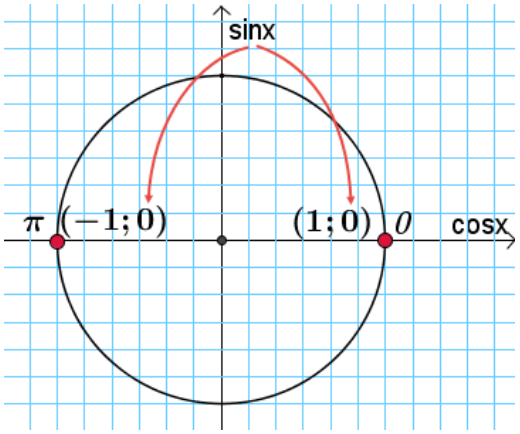
- ***Тригонометрический круг***

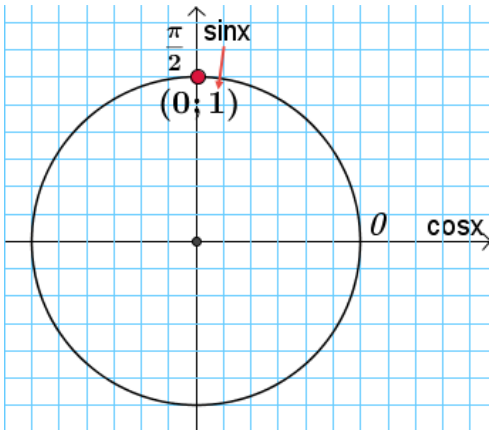
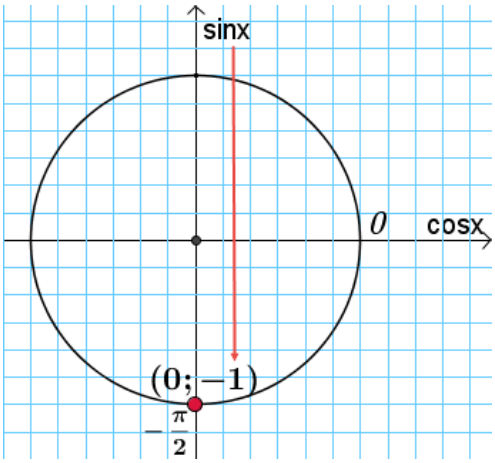


- ***Простейшие тригонометрические уравнения***

Уравнение	Формулы решений	Решение по кругу
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$ или $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right.,\ k \in Z$ $-1 \le a \le 1$, $\arcsin(-a) = -\arcsin a$	
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$ $-1 \le a \le 1$, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$	
$tgx = a$	$x = arctga + \pi k,\ k \in Z$ $a \in R$, $arctg(-a) = -arctga$	
$ctgx = a$	$x = arcctga + \pi k,\ k \in Z$ $a \in R$, $arcctg(-a) = \pi - arcctga$	

- ***Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений***

Уравнение	Формулы решений	Решение по кругу
$\cos x = 1$ *Найдем на круге точку, абсцисса которой равна 1*	$x = 2\pi k$ *На круге одна точка с такой абсциссой, еще раз попадаем на нее через целое число кругов* $2\pi k$ *.*	
$\cos x = 0$ $(ctgx = 0)$ *Найдем на круге точки, абсциссы которых равны 0.*	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ *На круге две точки с такой абсциссой, попадаем на них через полкруга* πk *.*	
$\cos x = -1$ *Найдем на круге точку, абсцисса которой равна -1.*	$x = \pi + 2\pi k$ *На круге одна точка с такой абсциссой, еще раз попадаем на нее через целое число кругов* $2\pi k$ *.*	
$\sin x = 0$ $(tgx = 0)$ *Найдем на круге точки, ординаты которых равны 0.*	$x = \pi k$ *На круге две точки с такой ординатой, попадаем на них через полкруга* πk *.*	

$\sin x = 1$ *Найдем на круге точку, ордината которой равна 1.*	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ *На круге одна точка с такой ординатой, еще раз попадаем на нее через целое число кругов* $2\pi k$.	
$\sin x = -1$ *Найдем на круге точку, ордината которой равна 1.*	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ *На круге одна точка с такой ординатой, еще раз попадаем на нее через целое число кругов* $2\pi k$.	

▪ *Примеры*

Решить уравнения:

№1. $\sin x = \frac{1}{2}$	№2. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
№3. $\sin x = 0$	№4. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
№5. $\cos x = -\frac{1}{2}$	№6. $\cos x = -1$
№7. $tgx = 1$	№8. $ctgx = -\sqrt{3}$
№9. $tgx = 0$	

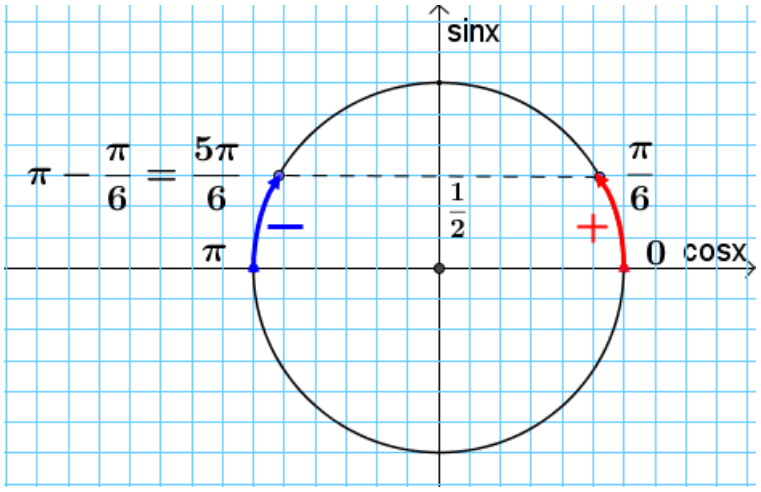
▪ *Решение (примеры)*

№1.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}.$$

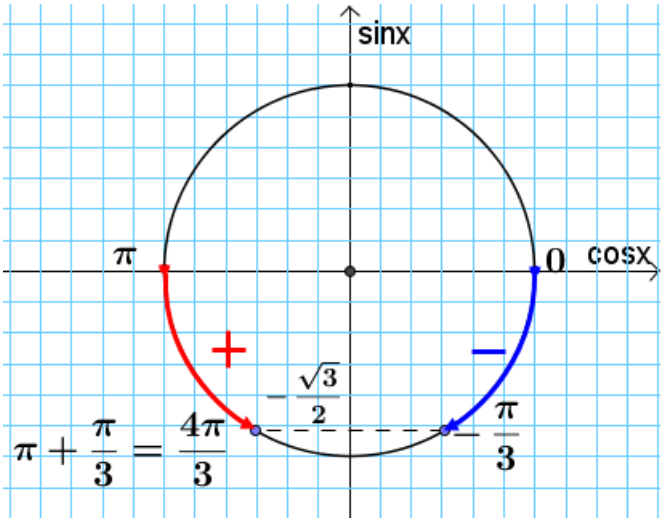


№2.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$$

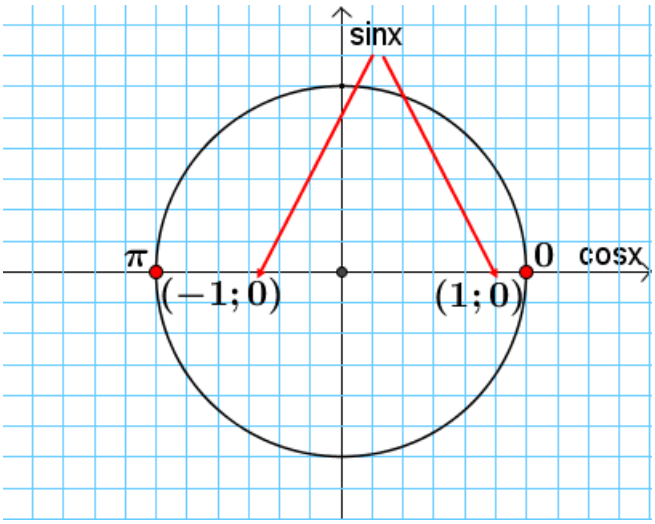
$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$



№3.

$$\sin x = 0$$

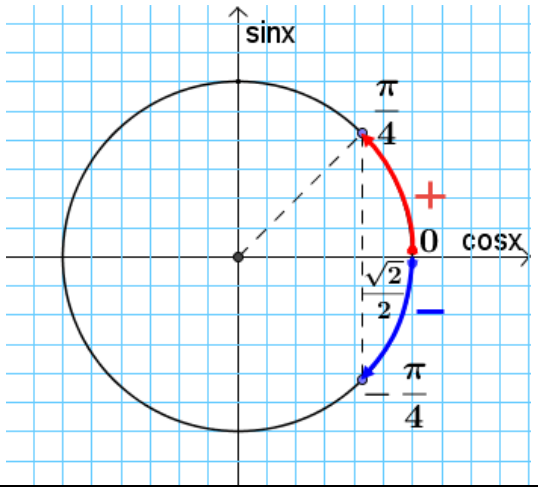
$$x = \pi k \ , k \in \mathbb{Z}$$



№4.

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



№5.

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

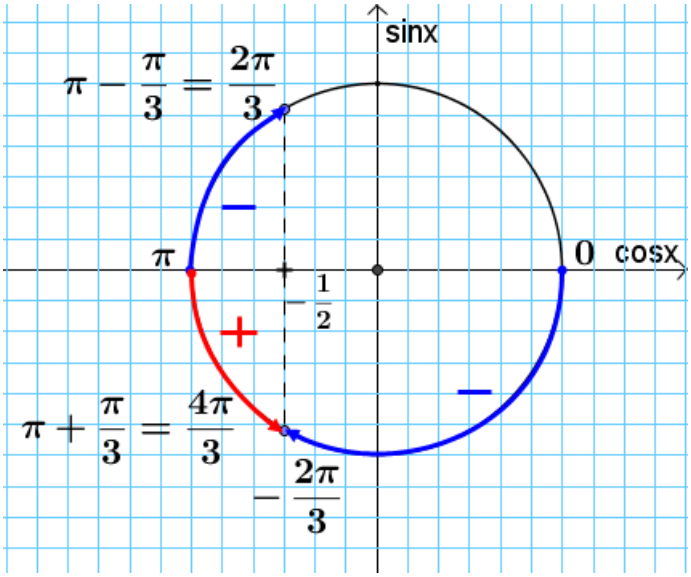
$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

или

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$$

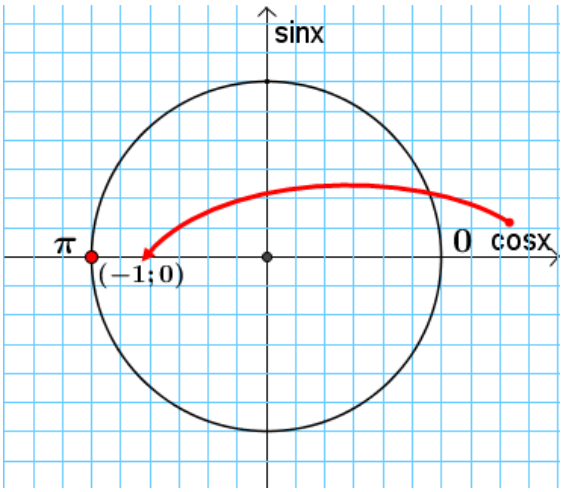
$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$



№6.

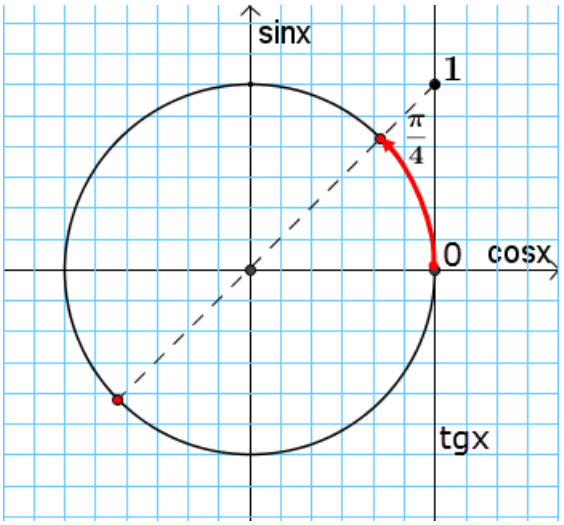
$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi k \ , k \in \mathbb{Z}$$



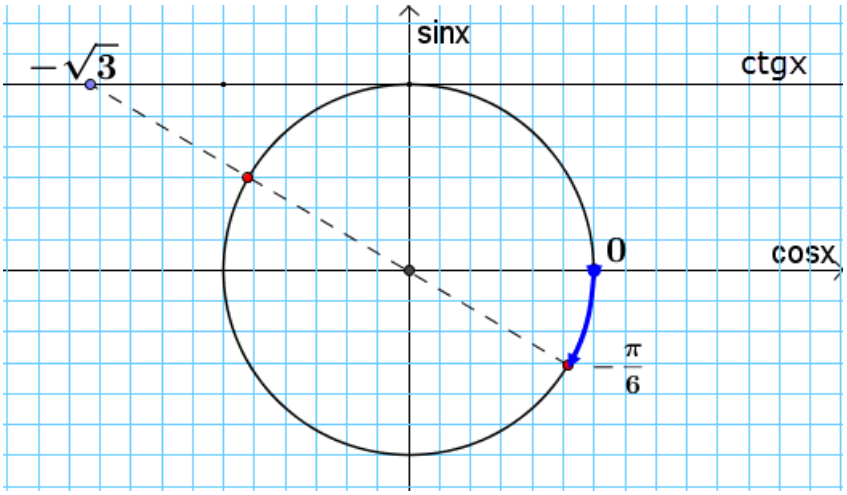
№7. $tgx = 1$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$



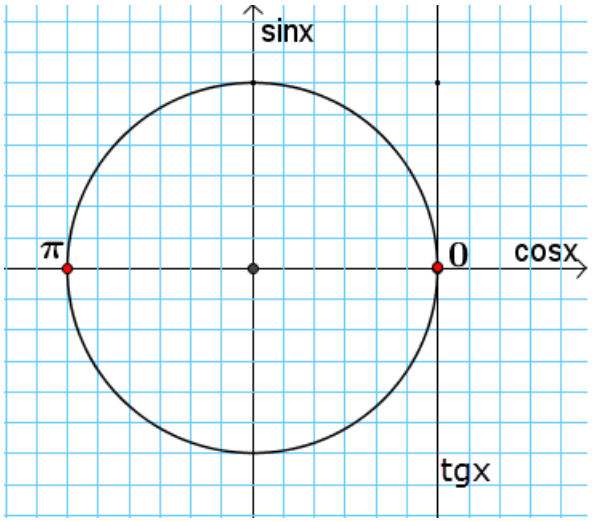
№8. $ctgx = -\sqrt{3}$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$



№9. $tgx = 0$

$$\sin x = 0$$
$$x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$



▪ *Тест*

Вариант 1

Решите уравнения:

№1.	$\cos x = 1$	№2.	$\sin x = -1$
№3.	$ctgx = 0$	№4.	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
№5.	$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	№6.	$tgx = -\sqrt{3}$
№7.	$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	№8.	$tgx = \sqrt{3}$
№9.	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	№10.	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
№11.	$ctgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$		

Вариант 2

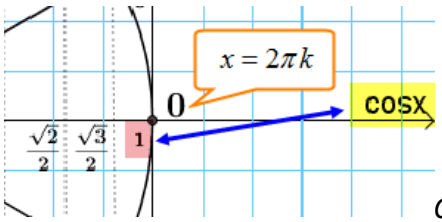
№1.	$\sin x = 1$	№2.	$\cos x = 0$
№3.	$tgx = -1$	№4.	$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
№5.	$ctgx = \sqrt{3}$	№6.	$tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$
№7.	$\cos x = \frac{1}{2}$	№8.	$\sin x = -\frac{1}{2}$
№9.	$ctgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	№10.	$tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
№11.	$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		

▪ ***Тест (решение)*** Простейшие тригонометрические уравнения и их частные случаи

Вариант 1

№1. $\cos x = 1$

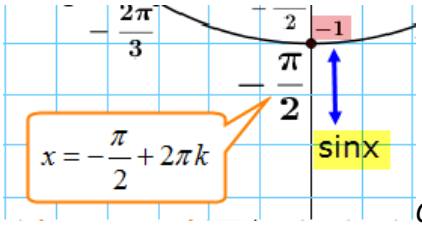
Решение:



Ответ: $x = 2\pi k$

№2. $\sin x = -1$

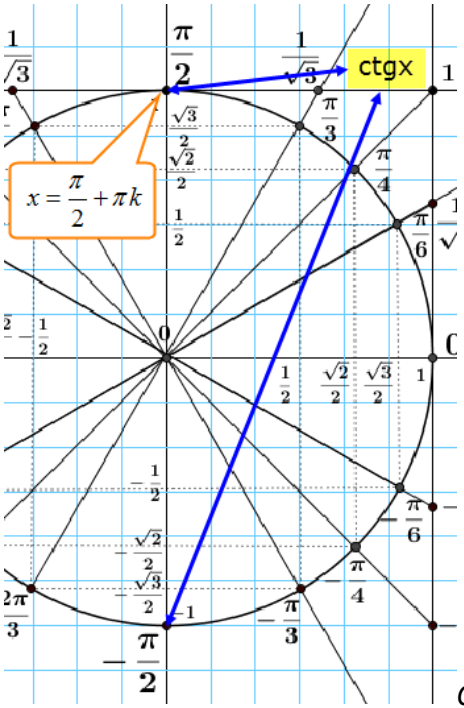
Решение:



Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

№3. $ctgx = 0$

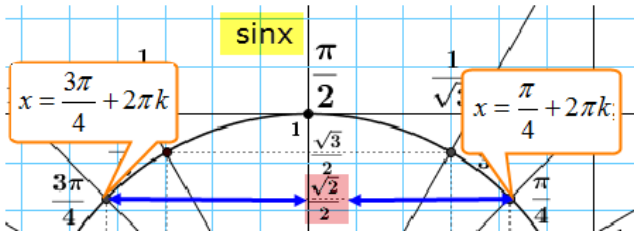
Решение:



Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

№4. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

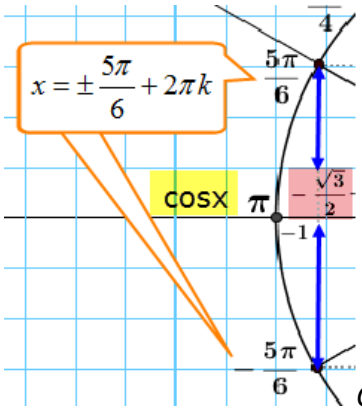
Решение:



Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k;\quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

№5. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

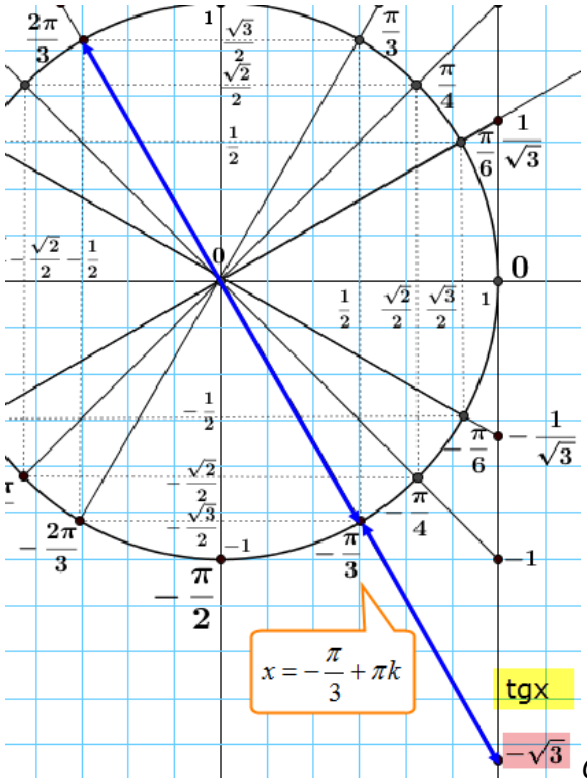
Решение:



Ответ: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

№6. $tgx = -\sqrt{3}$

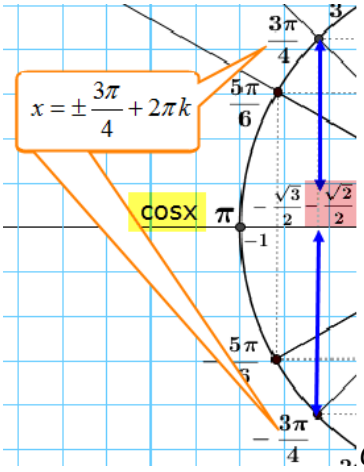
Решение:



Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$

№7. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

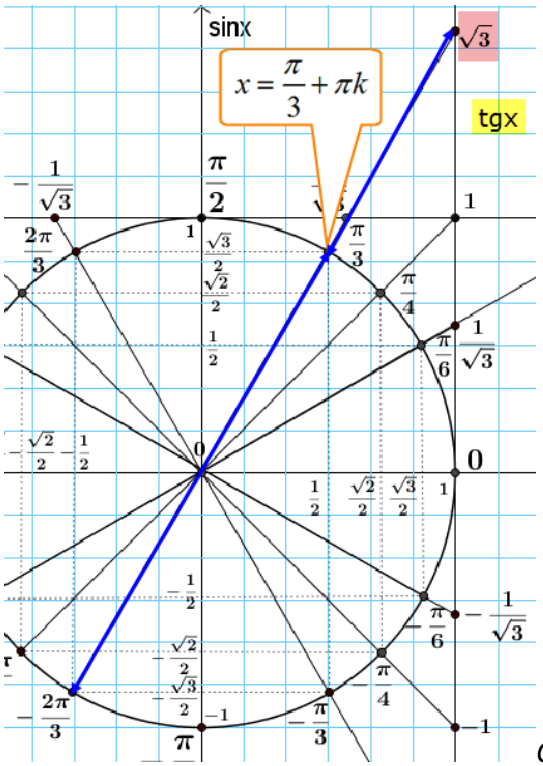
Решение:



Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

№8. $tgx = \sqrt{3}$

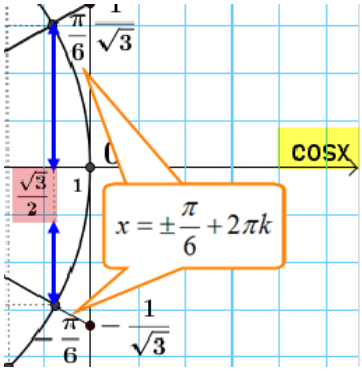
Решение:



Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$

№9. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

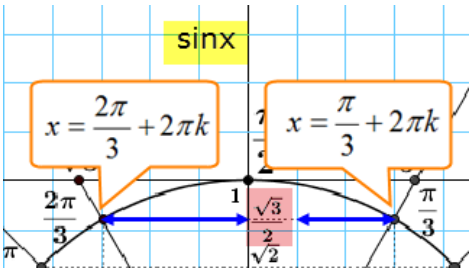
Решение:



Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

№10. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение:



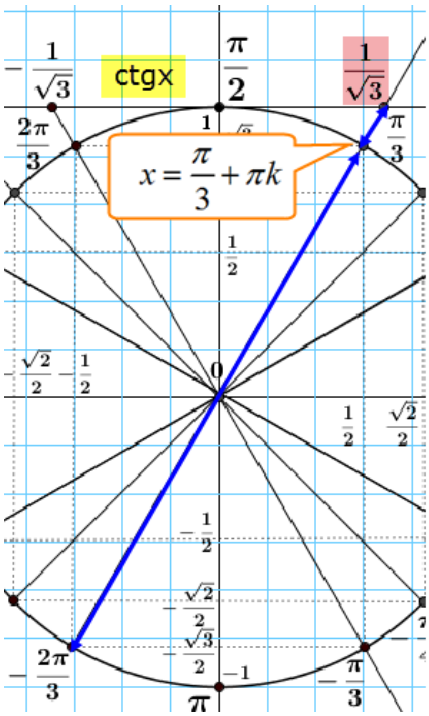
Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№11.

$$ctgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Решение:

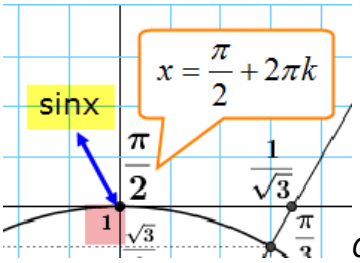


Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$

Вариант 2

№1. $\sin x = 1$

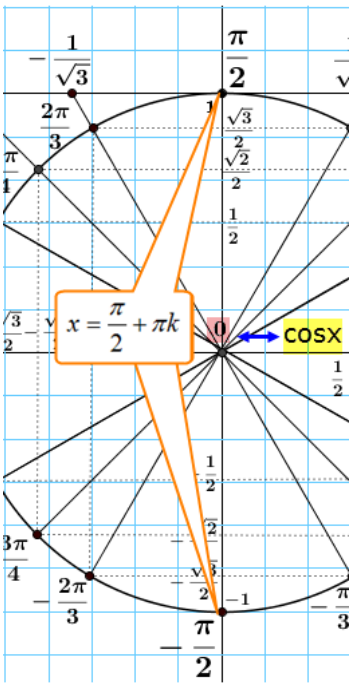
Решение:



Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

№2. $\cos x = 0$

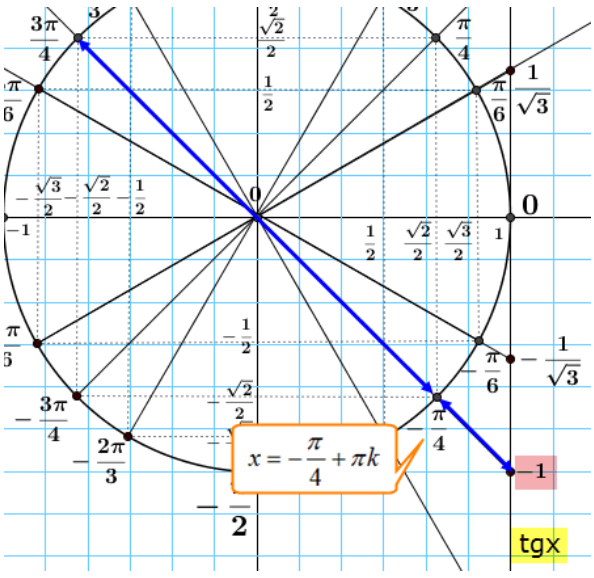
Решение:



Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

№3. $tgx = -1$

Решение:



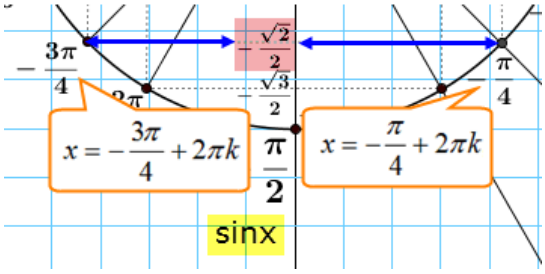
Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№4.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решение:

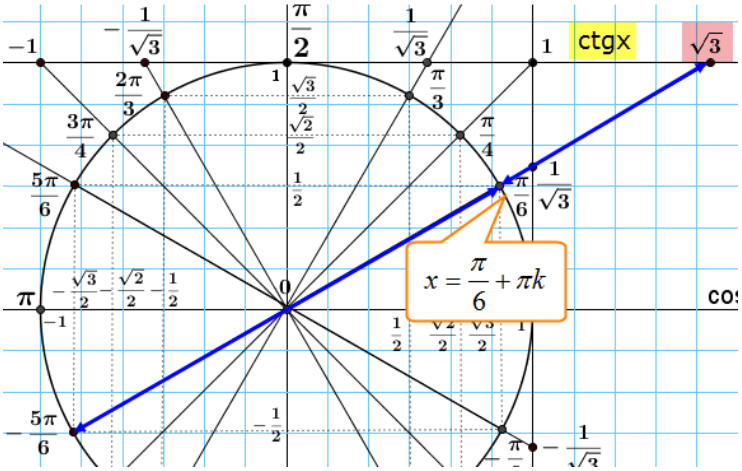


Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

№5.

$$ctgx = \sqrt{3}$$

Решение:

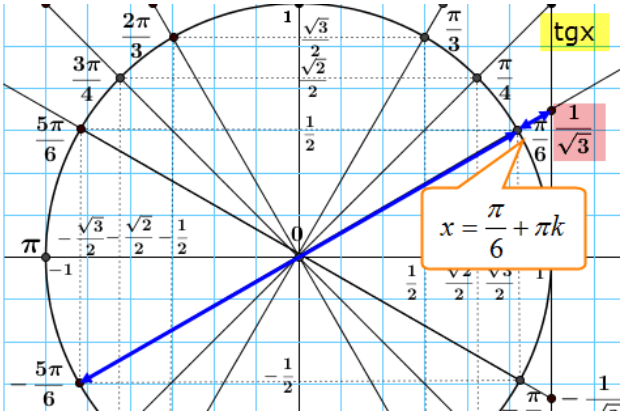


Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$

№6.

$$tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Решение:



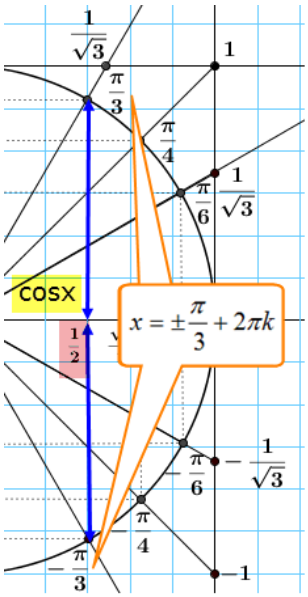
Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$

№7.

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

Решение:

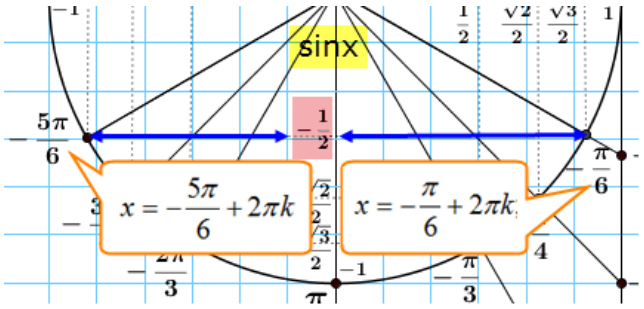


Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

№8.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

Решение:

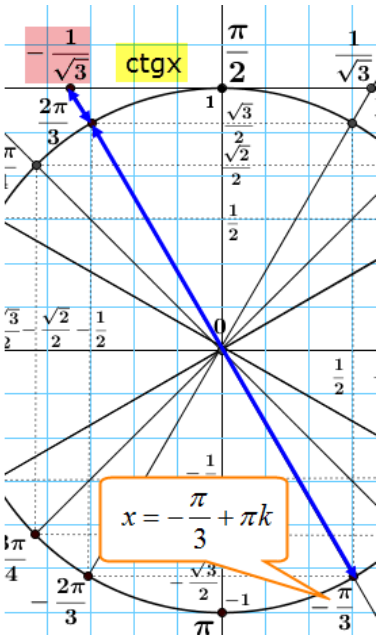


Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

№9.

$$ctgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Решение:

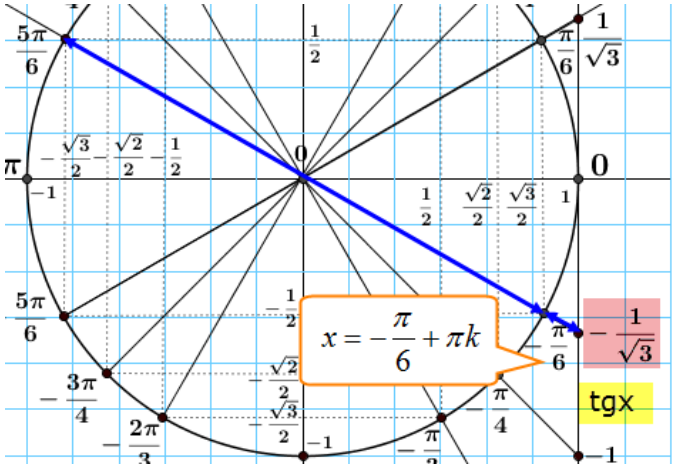


Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$

№10.

$$tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Решение:

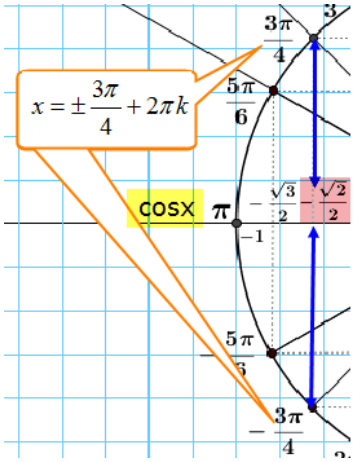


Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$

№11.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решение:



Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$