Общие корни рациональных уравнений с параметром

- ***Примеры***

№1. Найти значения a, при которых уравнения $x^2-(a+3)x+2a+2=0$ и $x^2+(a+3)x+4a-4=0$ имеют общий корень.

№2. Найти значения a, при которых уравнения $x^2+(a-2)x-2=0$ и $x^2+(5-a)x+3=0$ имеют общий корень.

№3. При каких значениях a уравнения $x^2+\frac{a}{2}x+1=0$ и $x^2+x+\frac{a}{2}=0$ имеют хотя бы один общий корень?

№4. При каких значениях a уравнения $x^3+ax-2x+3=0$ и $x^4+ax^2-2x^2+3=0$ имеют общий корень?

№5. Уравнения $x^2+(b-3a-4)x-5=0$ и $x^2+(2a-7b+14)x+2a+b-2=0$ имеют одинаковые корни. Найти b.

№1. **Найти значения a, при которых уравнения $x^2-(a+3)x+2a+2=0$ и $x^2+(a+3)x+4a-4=0$ имеют общий корень.**

Решение:

$$\begin{array}{lcl} x^2-(a+3)x+2a+2=0 & \text{или} & x^2+(a+3)x+4a-4=0 \\ D_1=(a-1)^2 & & D_2=(a-5)^2 \\ x_{1/1}=a+1 & & x_{1/2}=-4 \\ x_{2/1}=2 & & x_{2/2}=-a+1 \end{array}$$

Общий корень:

$$\left[\begin{array}{l} a+1=-4 \\ a+1=-a+1 \\ 2=-a+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-5 \\ a=0 \\ a=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a\in\{-5;-1;0\}$$

Ответ: -5; -1; 0.

№2. **Найти значения a, при которых уравнения $x^2+(a-2)x-2=0$ и $x^2+(5-a)x+3=0$ имеют** общий корень.

Решение:

$$(1)\quad x^2+(a-2)x-2=0 \quad D_1=(a-2)^2+8>0 \text{ при } \forall a$$

$$(2)\quad x^2+(5-a)x+3=0 \quad D_2=(5-a)^2-12=a^2-10a+13$$

Пусть x_0- общий корень, тогда

$$\boxed{-}\begin{cases} x^2+(a-2)x-2=0 \\ x^2+(5-a)x+3=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(a-2)x-(5-a)x-5=0$$

$$x(a-2-5+a)=5$$

$$x_0=\frac{5}{2a-7}$$

Подставим x_0 в одно из уравнений

$$\left(\frac{5}{2a-7}\right)^2+(a-2)\cdot\frac{5}{2a-7}-2=0 \quad \Big|\cdot(2a-7)^2$$

$$2a^2+a-3=0,\quad D=25,\quad a=\frac{-1\pm5}{4}=\left[\begin{array}{l} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{array}\right.$$

Проверим $D_2=a^2-10a+13$ при $a=-\frac{3}{2}$, $a=1$ $D_2>0$

Общие корни уравнения имеют при $a=\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$.

Ответ: -1,5 и 1.

№3. **При каких значениях а уравнения** $x^2+\frac{a}{2}x+1=0$ **и** $x^2+x+\frac{a}{2}=0$ **имеют хотя бы один общий корень?**

Решение:

$$x^2+\frac{a}{2}x+1=0,\quad D_1=\frac{a^2}{4}-4=\frac{a^2-16}{4}\qquad D_1\ge 0\qquad a\in(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$$

$$x^2+x+\frac{a}{2}=0,\quad D_2=1-2a\ge 0,\quad a\le\frac{1}{2}$$

Корни общие будут, если $a\in(-\infty;-4]$

Пусть x_0 – общий корень

$$\boxed{-}\begin{cases}x^2+\frac{a}{2}x+1=0\\ x^2+x+\frac{a}{2}=0\end{cases}\Rightarrow x\left(\frac{a}{2}-1\right)+a-\frac{a}{2}=0,\quad \left(\frac{a}{2}-1\right)(x-1)=0,\quad a=2\notin(-\infty;-4]\ \text{ и }\ x_0=1.$$

Если $x_0=1$, то $1+\frac{a}{2}+1=0,\quad a=-4.$

Ответ: -4.

№4. **При каких значениях а уравнения** $x^3+ax-2x+3=0$ **и** $x^4+ax^2-2x^2+3=0$ **имеют общий корень?**

Решение:

Пусть уравнения имеют общий корень, тогда рассмотрим систему из этих уравнений.

$$\begin{cases}x^3+ax-2x+3=0\\ x^4+ax^2-2x^2+3=0\end{cases}\Big|-\uparrow$$

$$x^4-x^3+ax^2-ax-2x^2+2x=0$$

$$x^3(x-1)+ax(x-1)-2x(x-1)=0$$

$$x(x-1)(x^2+a-2)=0$$

$$x=0\qquad x-1=0\qquad x^2+a-2=0$$

$$x=1\qquad x=\pm\sqrt{2-a},\ a<2$$

1) Если $x=0$, то при подстановке в одно из исходных уравнений, получим $3=0$, неверно. Значит, $x=0$ корнем не является.

2) Если $x=1$, то $\begin{cases}1+a-2+3=0\\1+a-2+3=0\end{cases}\Rightarrow a=-2$. Значит, при $a=-2$ уравнения имеют общий корень.

3) Если $x=\pm\sqrt{2-a}$, то подставив это значение в уравнение $x^4+ax^2-2x^2+3=0$, **получим неверное числовое равенство** $3=0$. Значит, $x=\pm\sqrt{2-a}$ корнями не являются.

Ответ: -2.

№5. **Уравнения** $x^2+(b-3a-4)x-5=0$ **и** $x^2+(2a-7b+14)x+2a+b-2=0$ **имеют одинаковые корни. Найти b.**

Решение:

Пусть x_1 и x_2 одинаковые корни уравнений

$x^2+(b-3a-4)x-5=0\ \ (1)$ и $x^2+(2a-7b+14)x+2a+b-2=0\ \ (2)$.

По формулам Виета

$$(1)\ \begin{cases} x_1+x_2=-b+3a+4 \\ x_1\cdot x_2=-5 \end{cases} \quad \text{и} \quad (2)\ \begin{cases} x_1+x_2=-2a+7b-14 \\ x_1\cdot x_2=2a+b-2 \end{cases}$$

Левые части соответствующих уравнений равны, тогда и правые части тоже равны. Составим систему уравнений.

$$\begin{cases} -b+3a+4=-2a+7b-14 \\ -5=2a+b-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-3-2a=1 \end{cases}.$$

Проверкой, установим, что при $a=-2$ и $b=1$ уравнения принимают вид $x^2+3x-5=0$, которое имеет корни.

Ответ: 1.

▪ *Тест* Общие корни рациональных уравнений с параметром

№1. Найти значения a, при которых уравнения $x^2-(a+5)x+a+4=0$ и $x^2+(a-2)x+3a-15=0$ имеют общий корень.

№2. Найти значения a, при которых уравнения $x^2+(a-10)x-5=0$ и $x^2+(3-a)x-10=0$ имеют общий корень.

№3. При каких значениях a уравнения $x^2+3ax-4=0$ и $x^2+4x-3a=0$ имеют хотя бы один общий действительный корень?

№4. При каких значениях a уравнения $x^4-x-ax+1=0$ и $x^5-x^2-ax^2+1=0$ имеют общий корень?

▪ *Ответы (тест)* Общие корни рациональных уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4
-7; 0,5; 4	***6; 49/6***	***4/3; -1***	***1***

▪ *Решение (тест)* Общие корни рациональных уравнений с параметром

№1. **Найти значения a, при которых уравнения $x^2-(a+5)x+a+4=0$ и $x^2+(a-2)x+3a-15=0$ имеют общий корень.**

Решение:

$$x^2-(a+5)x+a+4=0 \quad \text{или} \quad x^2+(a-2)x+3a-15=0$$

$$D_1=(a+3)^2 \qquad D_2=(a-8)^2$$

$$x_{1/1}=a+4,\ \ x_{2/1}=1 \qquad x_{1/2}=-2,\ \ x_{2/2}=-a+5$$

Общий корень:

$$\left[\begin{array}{l} a+4=-2 \\ a+4=-a+5 \\ 1=-a+5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-6 \\ a=0,5 \\ a=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow a\in\{-6;\ 0,5;\ 4\}$$

Ответ: -6; 0,5; 4.

№2. **Найти значения a, при которых уравнения $x^2+(a-10)x-5=0$ и $x^2+(3-a)x-10=0$ имеют общий корень.**

Решение:

$$(1)\ \ x^2+(a-10)x-5=0 \quad D_1=(a-10)^2+20>0 \text{ при } \forall a$$

$$(2)\ \ x^2+(3-a)x-10=0 \quad D_2=(3-a)^2+40>0 \text{ при } \forall a$$

Пусть x_0 – общий корень, тогда

$$\boxed{-}\ \begin{cases} x^2+(a-10)x-5=0 \\ x^2+(3-a)x-10=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(a-10)x-(3-a)x+5=0$$

$$x(a-10-3+a)=-5,\ \ x_0=-\frac{5}{2a-13}$$

Подставим x_0 в одно из уравнений

$$\left(-\frac{5}{2a-13}\right)^2+(a-10)\cdot\frac{-5}{2a-13}-5=0 \quad \Big|\cdot(2a-13)^2$$

$$-6a^2+45a-290=0,\ \ D=169,\ \ a=\frac{-85\pm13}{-12}=\left[\begin{array}{l} \frac{49}{6} \\ 6 \end{array}\right.$$

Общие корни уравнения имеют при $a=\left\{\frac{49}{6};6\right\}$.

Ответ: 6 и 49/6.

№3. **При каких значениях a уравнения $x^2+3ax-4=0$ и $x^2+4x-3a=0$ имеют хотя бы один общий действительный корень?**

Решение:

$x^2+3ax-4=0,\quad D_1=9a^2+16 \qquad D_1>0$ при $\forall a$

$x^2+4x-3a=0,\quad D_2/4=4+3a\ge 0,\quad a\ge -\dfrac{4}{3}$

Корни общие будут, если $a\in\left[-\dfrac{4}{3};\infty\right)$

Пусть x_0 – общий корень

$$\boxed{-}\ \begin{cases}x^2+3ax-4=0\\ x^2+4x-3a=0\end{cases}\Rightarrow x(3a-4)+3a-4=0,\quad (3a-4)(x+1)=0,\quad a=\frac{4}{3}\in\left[-\frac{4}{3};\infty\right)\ \text{и}\ x_0=-1.$$

Если $x_0=-1$, то $1-3a-4=0,\quad a=-1.$

Если $a=\dfrac{4}{3}$, то $x^2+4x-4=0,\quad x=-2$

Ответ: -1 и 4/3.

№4. **При каких значениях a уравнения $x^4-x-ax+1=0$ и $x^5-x^2-ax^2+1=0$ имеют общий корень?**

Решение:
Пусть уравнения имеют общий корень, тогда рассмотрим систему из этих уравнений.

$$\begin{cases}x^4-x-ax+1=0\\ x^5-x^2-ax^2+1=0\end{cases}\Big|-\uparrow$$

$$x^5-x^4-ax^2+ax-x^2+x=0$$

$$x^4(x-1)-ax(x-1)-x(x-1)=0$$

$$x(x-1)(x^3-a-1)=0$$

$$x=0\qquad x-1=0\qquad x^3-a-1=0$$

$$x=1\qquad x=\sqrt[3]{1+a}$$

1) Если $x=0$, то при подстановке в одно из исходных уравнений, получим $1=0$, неверно. Значит, $x=0$ корнем не является.

2) Если $x=1$, то $\begin{cases}1-1-a+1=0\\ 1-1-a+1=0\end{cases}\Rightarrow a=1$. Значит, при $a=1$ уравнения имеют общий корень.

3) Если $x=\sqrt[3]{1+a}$, то подставив это значение в уравнение $x^4-x-ax+1=0$, **получим неверное числовое равенство** $1=0$. Значит, $x=\sqrt[3]{1+a}$ корнем не является.

Ответ: 1.