## Модуль в дробно-рациональных уравнениях

- ***Примеры*** Решите уравнения:

**№1.** $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1}=1.$

---

**№2.** $\dfrac{3-|4-x|-|x-1|}{|5x^2-12x+4|}=0.$

---

**№3.** $x^2\left(21-9\left|\dfrac{x+3}{x}\right|\right)+6x+9=0.$

---

**№4.** $\dfrac{5|x+7|}{x+7}+\dfrac{6|x+5|}{x+5}+\dfrac{10|x+4|}{x+4}+\dfrac{7|x+1|}{x+1}=-6.$

**№1.**

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1$$

Нули подмодульных выражений:

$x-2=0 \qquad x-1=0$

$x=2 \qquad x=1$

Знаки подмодульных выражений:

| | (1) | | (2) | | (3) |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x-2)$ | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $(x-1)$ | $-$ | 1 | $+$ | 2 | $+$ |

1) $x\le 1$

$\frac{-x+2}{-x+1-1}=1$

$\frac{-x+2}{-x}=1$

$\frac{x-2}{x}=1$

$\begin{cases} x-2=x \\ x\ne 0 \end{cases}$

$-2=0\cdot x$

$\varnothing$

2) $1\le x\le 2$

$\frac{-x+2}{x-1-1}=1$

$\frac{-x+2}{x-2}=1$

$\begin{cases} -x+2=x-2 \\ x\ne 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ x\ne 2 \end{cases}$

$\varnothing$

3) $x\ge 2$

$\frac{x-2}{x-1-1}=1$

$\frac{x-2}{x-2}=1$

$\begin{cases} 1=1 \\ x\ne 2 \end{cases}$

$\underline{x>2}$

***Ответ:*** $(2;\infty)$.

**№2.**

$$\frac{3-|4-x|-|x-1|}{|5x^2-12x+4|}=0$$

$$\frac{|x-1|+|x-4|-3}{|5x^2-12x+4|}=0$$

ОДЗ: $|5x^2-12x+4|\ne 0$

$5x^2-12x+4\ne 0$

$x\ne 2 \quad x\ne 0,4$

$|x-1|+|x-4|-3=0$

Нули подмодульных выражений:

$x-1=0 \quad x-4=0$

$x=1 \qquad x=4$

Знаки подмодульных выражений:

| | (1) | | (2) | | (3) |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)$ | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $(x-4)$ | $-$ | 1 | $-$ | 4 | $+$ |

1) $x\le 1, \quad -x+1-x+4-3=0$

$\underline{x=1}\in(-\infty;1]$

2) $1\le x\le 4, \quad x-1-x+4-3=0$

$0\cdot x=0 \Rightarrow \underline{x\in[1;4]}$

3) $x\ge 4, \quad x-1+x-4-3=0$

$\underline{x=4}\in[4;\infty)$

В объединении

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x\in[1;4] \\ x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[1;4]$

С учетом ОДЗ

$\underline{\underline{x\in[1;2)\cup(2;4]}}$

***Ответ:*** $[1;2)\cup(2;4]$.

**№3.**

$$x^2\left(21-9\left|\frac{x+3}{x}\right|\right)+6x+9=0$$

$$x^2\left(21-9\left|\frac{x+3}{x}\right|\right)+6x+9=0 \quad \Big| : x^2 \neq 0$$

$$21-9\left|1+\frac{3}{x}\right|+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}=0$$

$$\left|\begin{array}{l} t=1+\dfrac{3}{x} \to t^2=1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{9}{x^2} \to t^2-1=\dfrac{6}{x}+\dfrac{9}{x^2} \\ |t|^2=t^2 \end{array}\right.$$

$$21-9|t|+t^2-1=0$$

$$|t|^2-9|t|+20=0$$

$$|t|=4 \qquad |t|=5$$

$$1+\frac{3}{x}=4 \quad \text{или} \quad 1+\frac{3}{x}=-4 \quad \text{или} \quad 1+\frac{3}{x}=5 \quad \text{или} \quad 1+\frac{3}{x}=-5$$

$$x=1 \qquad x=-\frac{3}{5} \qquad x=\frac{3}{4} \qquad x=-\frac{1}{2}$$

***Ответ:*** $-\frac{3}{5}; -\frac{1}{2}; \ \frac{3}{4}; \ 1.$

---

**№4.**

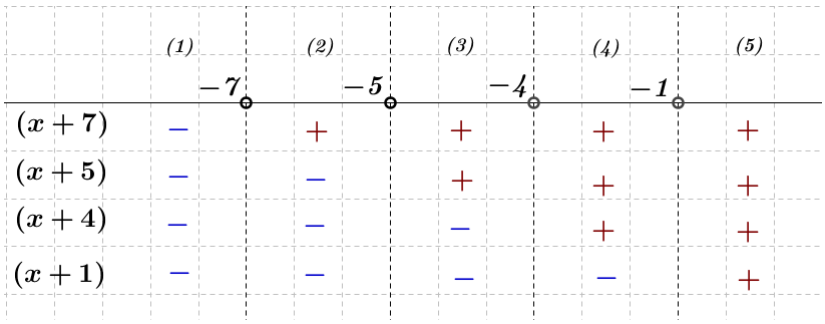
$$\frac{5|x+7|}{x+7}+\frac{6|x+5|}{x+5}+\frac{10|x+4|}{x+4}+\frac{7|x+1|}{x+1}=-6$$

ОДЗ: $x \neq -7 \ \ x \neq -5 \ \ x \neq -4 \ \ x \neq -1$

Нули подмодульных выражений:

$x=-7 \ \ x=-5 \ \ x=-4 \ \ x=-1$

Знаки подмодульных выражений:




(1) $-5-6-10-7=-6$, неверно

(2) $5-6-10-7=-6$, неверно

(3) $5+6-10-7=-6$, $-6=-6$, верно

$\Rightarrow x \in (-5;-4)$

(4) $5+6+10-7=-6$, неверно

(5) $5+6+10+7=-6$, неверно

***Ответ:*** $(-5;-4)$.

## Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $$\frac{|x+1|}{|x+2|-1}=1$$

№2. $$\frac{|x-5|+|2-x|-3}{|2x^2-15x+28|}=0$$

№3. $$\frac{|x^2-25|-|81-x^2|-56}{\sqrt{182-x-x^2}}=0$$

№4. $$\frac{6|x+2|}{x+2}+\frac{4|x-2|}{x-2}+\frac{8|x-5|}{x-5}+\frac{3|x-9|}{x-9}=-1$$

## Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $$\frac{5}{3-|x-1|}=|x|+2$$

№2. $$\frac{5-|x+2|-|3-x|}{|2+3x-2x^2|}=0$$

№3. $$x^2\left(22-10\left|\frac{x+8}{x}\right|\right)+16x+64=0$$

№4. $$\left|\frac{3x^2-2x-5}{x-2}\right|+|x^2-x|=\left|\frac{x^3-5}{x-2}\right|$$

| | №1 | №2 | №3 | №4 |
|---|---|---|---|---|
| Вар.1 | $(-1;\infty)$ | $[2;3,5)\cup(3,5;4)\cup(4;5]$ | $(-14;-9]\cup[9;13)$ | $(2;5)$ |
| Вар.2 | $\sqrt{5}-2;\ 3$ | $\left[-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};2\right)\cup(2;3]$ | $-2;\ -1;\ \frac{4}{3};\ 4$ | $[-1;0]\cup\left[1;1\frac{2}{3}\right]\cup(2;\infty)$ |



## Вариант 1

**№1.**

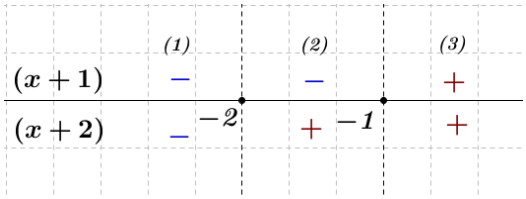
$$\frac{|x+1|}{|x+2|-1}=1$$

Нули подмодульных выражений:

$x+1=0 \quad x+2=0$

$x=-1 \quad x=-2$

Знаки подмодульных выражений:




1) $x\le -2$

$\frac{-x-1}{-x-2-1}=1$

$\frac{-x-1}{-x-3}=1$

$\frac{x+1}{x+3}=1$

$x+1=x+3$

$1=3$

$\varnothing$

2) $-2\le x\le -1$

$\frac{-x-1}{x+2-1}=1$

$\frac{-x-1}{x+1}=1$

$\begin{cases}-x-1=x+1\\ x\ne -1\end{cases}$

$\begin{cases}-2x=2\\ x\ne -1\end{cases}$

$\begin{cases}x=-1\\ x\ne -1\end{cases}$

$\varnothing$

3) $x\ge -1$

$\frac{x+1}{x+2-1}=1$

$\begin{cases}x+1=x+1\\ x\ne -1\end{cases}$

$\begin{cases}x\in R\\ x\ge -1\\ x\ne -1\end{cases}$

$\underline{x>-1}$

***Ответ:*** $x>-1$.

**№2.**

$$\frac{|x-5|+|2-x|-3}{|2x^2-15x+28|}=0$$

$$\frac{|x-5|+|x-2|-3}{|2x^2-15x+28|}=0$$

ОДЗ: $|2x^2-15x+28|\neq 0$

$2x^2-15x+28\neq 0$

$x\neq 4 \quad x\neq 3{,}5$

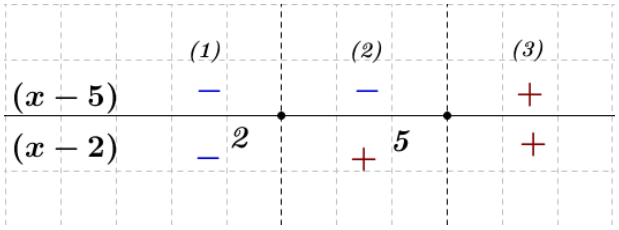
$|x-5|+|x-2|-3=0$

Нули подмодульных выражений

$x-5=0 \quad x-2=0$

$x=5 \qquad x=2$

Знаки подмодульных выражений:




1) $x\leq 2$

$-x+5-x+2-3=0$

$-2x+4=0$

$\underline{x=2}\in(-\infty;2]$

2) $2\leq x\leq 5$

$-x+5+x-2-3=0$

$0=0$

$\underline{x\in[2;5]}$

3) $x\geq 5$

$x-5+x-2-3=0$

$2x-10=0$

$\underline{x=5}\in[5;\infty)$

В объединении $x\in[2;5]$

С учетом ОДЗ: $\underline{\underline{x\in[2;3{,}5)\cup(3{,}5;4)\cup(4;5]}}$

***Ответ:*** $[2;3{,}5)\cup(3{,}5;4)\cup(4;5]$.

**№3.**

$$\frac{|x^2-25|-|81-x^2|-56}{\sqrt{182-x-x^2}}=0$$

ОДЗ: $182-x-x^2>0$

$x^2+x-182<0$

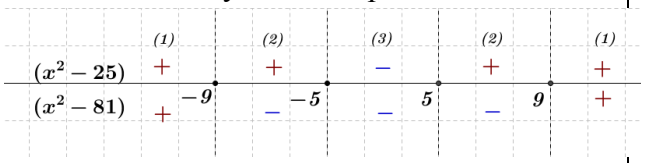
$(x+14)(x-13)<0$

$-14<x<13$

$|x^2-25|-|x^2-81|-56=0$

Нули подмодульных выражений: $x=\pm 5$, $x=\pm 9$

Знаки подмодульных выражений:




1) $x\in(-\infty;-9]\cup[9;\infty)$

$x^2-25-x^2+81-56=0$

$0=0$

$\underline{x\in(-\infty;-9]\cup[9;\infty)}$

2) $x\in(-9;-5)\cup(5;9)$

$x^2-25+x^2-81-56=0$

$x^2=81$

$x=\pm 9\notin(-9;-5)\cup(5;9)$

3) $x\in[-5;5]$

$-x^2+25+x^2-81-56=0$

$-112=0,\ \varnothing$

В объединении: $x\in(-\infty;-9]\cup[9;\infty)$

С учетом ОДЗ: $\underline{\underline{x\in(-14;-9]\cup[9;13)}}$

***Ответ:*** $(-14;-9]\cup[9;13)$

**№4.**

$$\frac{6|x+2|}{x+2}+\frac{4|x-2|}{x-2}+\frac{8|x-5|}{x-5}+\frac{3|x-9|}{x-9}=-1$$

ОДЗ: $x \neq -2,\ x \neq 2,\ x \neq 5,\ x \neq 9$

Нули подмодульных выражений:

$x=-2,\ x=2,\ x=5,\ x=9$

Знаки подмодульных выражений:

| | (1) | $-2$ | (2) | $2$ | (3) | $5$ | (4) | $9$ | (5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x+2)$ | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(x-2)$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(x-5)$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $(x-9)$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |

1) $x<-2$

$-6-4-8-3=-1,$ неверно $\varnothing$

2) $-2<x<2$

$6-4-8-3=-1,$ неверно $\varnothing$

3) $2<x<5$

$6+4-8-3=-1$

$10=10,$ верно

$\begin{cases} x \in R \\ 2<x<5 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x \in (2;5)}$

4) $5<x<9$

$6+4+8-3=-1,$ неверно $\varnothing$

5) $x>9$

$6+4+8+3=-1,$ неверно $\varnothing$

***Ответ:*** $(2;5)$.

## Вариант 2

**№1.**

$$\frac{5}{3-|x-1|}=|x|+2$$

Нули подмодульных выражений:

$x-1=0 \quad x=0$

$x=1$

Знаки подмодульных выражений:

| | (1) | | (2) | | (3) |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)$ | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $1$ | $+$ |

1) $x \le 0$

$$\frac{5}{3+x-1}=-x+2$$

$$\frac{5}{x+2}=-x+2$$

$$\begin{cases} 5=-(x-2)(x+2) \\ x \ne -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(x^2-4)=5 \\ x \ne -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2+4=5 \\ x \ne -2 \end{cases}$$

$$x^2=-1$$

$$\varnothing$$

2) $0 \le x \le 1$

$$\frac{5}{3+x-1}=x+2$$

$$\frac{5}{x+2}=x+2$$

$$\begin{cases} 5=(x+2)^2 \\ x \ne -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2=\sqrt{5} \\ x+2=-\sqrt{5} \end{array}\right. \\ x \ne -2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{5}-2 \\ x=-\sqrt{5}-2 \end{array}\right.$$

$$\underline{x=\sqrt{5}-2} \in [0;1]$$

3) $x \ge 1$

$$\frac{5}{3-x+1}=x+2$$

$$\frac{5}{4-x}=x+2$$

$$\begin{cases} 5=(x+2)(4-x) \\ x \ne 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x \ne 4 \end{cases}$$

$$\underline{x=3} \ge 1$$

***Ответ:*** $\sqrt{5}-2;\ 3$

**№2.**

$$\frac{5-|x+2|-|3-x|}{|2+3x-2x^2|}=0$$

$$\frac{|x+2|+|x-3|-5}{|2x^2-3x-2|}=0$$

ОДЗ: $|2x^2-3x-2|=0$

$$2x^2-3x-2=0$$

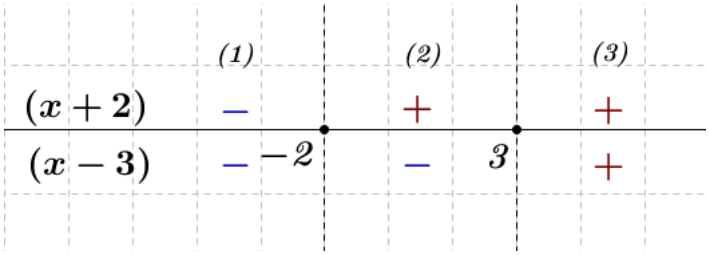
$$x\neq 2 \quad x\neq -\frac{1}{2}$$

$$|x+2|+|x-3|-5=0$$

Нули подмодульных выражений:

$$x=-2 \quad x=3$$

Знаки подмодульных выражений:




| | | |
|---|---|---|
| $x\le -2$<br>$-x-2-x+3-5=0$<br>$-2x=4$<br>$\underline{x=-2}\in(-\infty;-2]$ | $-2\le x\le 3$<br>$x+2-x+3-5=0$<br>$5-5=0$<br>$0=0$<br>$\begin{cases}x\in R\\-2\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow \underline{x\in[-2;3]}$ | $x\ge 3$<br>$x+2+x-3-5=0$<br>$2x-6=0$<br>$\underline{x=3}\in[3;\infty)$ |

В объединении $\left[\begin{array}{l}x=-2\\x\in[-2;3]\Leftrightarrow x\in[-2;3]\\x=3\end{array}\right.$

С учетом ОДЗ: $\underline{\underline{x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};2\right)\cup(2;3]}}$

***Ответ:*** $\left[-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};2\right)\cup(2;3]$

**№3.**

$$x^2\left(22-10\left|\frac{x+8}{x}\right|\right)+16x+64=0$$

1) $\frac{x+8}{x}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -8 \\ x>0 \end{array}\right.$

$x^2\left(22-10\cdot\frac{x+8}{x}\right)+16x+64=0$

$22x^2-10x(x+8)+16x+64=0$

$22x^2-10x^2-80x+16x+64=0$

$12x^2-64x+64=0$

$6x^2-32x+32=0$

$3x^2-16x+16=0$

$D/4=64-48=16$

$x=\frac{8\pm 4}{3}=\left|\begin{array}{l} 4 \\ \frac{4}{3} \end{array}\right.,$ удовлетворяют условию $x\in(-\infty;-8]\cup(0;\infty)$

2) $\frac{x+8}{x}<0 \Rightarrow x\in(-8;0)$

$x^2\left(22+10\cdot\frac{x+8}{x}\right)+16x+64=0$

$22x^2+10x(x+8)+16x+64=0$

$22x^2+10x^2+80x+16x+64=0$

$32x^2+96x+64=0$

$x^2+3x=2=0$

$\left.\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-2 \end{array}\right.,$ удовлетворяют условию $x\in(-8;0)$

***Ответ:*** $-2;\ -1;\ \frac{4}{3};\ 4$

**№4.**

$$\left|\frac{3x^2-2x-5}{x-2}\right|+\left|x^2-x\right|=\left|\frac{x^3-5}{x-2}\right|$$

Заметим, что $\frac{3x^2-2x-5}{x-2}+x^2-x=\frac{3x^2-2x-5+x^3-2x^2+2x}{x-2}=\frac{x^3-5}{x-2}$.

Пусть $a=\frac{3x^2-2x-5}{x-2},\ b=x^2-x.$

Уравнение примет вид $|a|+|b|=|a+b|$.

По свойствам модулей имеем $|a+b|\le|a|+|b|$.

Равенство верно, если $ab\ge 0$.

$\frac{3x^2-2x-5}{x-2}\cdot\left(x^2-x\right)\ge 0$

$\frac{(x+1)\left(x-\frac{5}{3}\right)\cdot x\cdot(x-1)}{x-2}\ge 0$

$\underline{\underline{x\in[-1;0]\cup\left[1;1\frac{2}{3}\right]\cup(2;\infty)}}$

***Ответ:*** $[-1;0]\cup\left[1;1\frac{2}{3}\right]\cup(2;\infty)$

## ✓ Правило раскрытия модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Если подмодульное выражение больше или равно нулю, то модуль раскрываем со знаком «плюс»;

Если подмодульное выражение меньше нуля, то модуль раскрываем со знаком «минус».

## ✓ Некоторые свойства модуля

$$|x|^2 = x^2$$
$$\sqrt{x^2} = |x|$$
$$|x| = |-x|$$
$$|x| \geq 0$$

## ✓ Основные эквивалентности

**1.**

$$|f(x)| = a$$

$a > 0$: $\left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$

$a = 0$: $f(x) = 0$

$a < 0$: $x \in \varnothing$

**2.**

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

**3.**

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

*или*

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$