

Модуль в целых уравнениях

Примеры Решите уравнения:

№1

$$|2x+3|=5$$

№2

$$|2x+3|=0$$

№3

$$|2x+3|=-7$$

№4

$$|2x+3|=4x+1$$

№5

$$\left| \sqrt{\left(\sqrt{(x-3)^2 - 7} \right)^2} + 5 \right| = 6$$

№6

$$2x+3+|x^2+x-3|=0$$

№7

$$|3x-9+|2-x||=5$$

Решение (примеры) Модуль в целых уравнениях

№1.

$$|2x+3|=5$$

$$\begin{cases} 2x+3=5 \\ 2x+3=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=2 \\ 2x=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Ответ: -4 и 1.

№2.

$$|2x+3|=0$$

$$\begin{cases} 2x+3=0 \\ x=-1,5 \end{cases}$$

Ответ: -1,5.

№3.

$$|2x+3|=-7$$

Т.к. $-7 < 0$,
а $|2x+3| \geq 0$, то
 $x \in \emptyset$

Ответ: нет решений.

№4.

$$|2x+3|=4x+1$$

$$\begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ \begin{cases} 2x+3=4x+1 \\ 2x+3=-4x-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -0,25 \\ \begin{cases} -2x = -2 \\ 6x = -4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -0,25 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$$

Ответ: 1.

№5.

$$\left| \sqrt{\left(\sqrt{(x-3)^2 - 7} \right)^2} + 5 \right| = 6$$

$$\left| |x-3| - 7 \right| + 5 = 6$$

$$\left[|x-3| - 7 \right] + 5 = 6$$

$$\left[|x-3| - 7 \right] + 5 = -6$$

$$\left[|x-3| - 7 \right] = 1$$

$$\left[|x-3| - 7 \right] = -11, \emptyset$$

$$\left[|x-3| - 7 = 1 \right]$$

$$\left[|x-3| - 7 = -1 \right]$$

$$\left[|x-3| = 8 \right]$$

$$\left[|x-3| = 6 \right]$$

$$\begin{cases} x-3=8 \\ x-3=-8 \\ x-3=6 \\ x-3=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=-5 \\ x=9 \\ x=-3 \end{cases}$$

Ответ: -5; -3; 9 и 11.

№6.

$$2x+3+|x^2+x-3|=0$$

$$|x^2+x-3|=-2x-3$$

$$\begin{cases} -2x-3 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2+x-3=-2x-3 \\ x^2+x-3=2x+3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1,5 \\ \begin{cases} x^2+3x=0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1,5 \\ \begin{cases} x=0, x=-3 \\ x=3, x=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\underline{x = \{-3; -2\}}$$

Ответ: $\{-3; -2\}$.

№7.

$$|3x-9+|2-x||=5$$

$$\left[3x-9+|2-x| \right] = 5$$

$$\left[3x-9+|2-x| \right] = -5$$

$$\left[|x-2| \right] = 14-3x$$

$$\left[|x-2| \right] = 4-3x$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \begin{cases} x-2=14-3x \\ x-2=4-3x \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ \begin{cases} x=6 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\underline{x=1}$$

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ \begin{cases} x-2=3x-14 \\ x-2=3x-4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x=4 \\ x=1,5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\underline{x=4}$$

Ответ: 1 и 4.

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $|5x + 3| = 2$

№2. $4x + 11 - |2x + 5| = 4$

№3. $||x - 1| + 2| - 3| = 1$

№4. $|x^2 - 7x + 12| = x - 4$

№5. $||x - 1| - 3x| = 5$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $|4x - 3| = 5$

№2. $|8x + 1| - 4x - 1 = 4$

№3. $\left| \sqrt{\left(\sqrt{(x+1)^2 - 2} \right)^2 + 3} \right| = 4$

№4. $3x + 4 + |x^2 + 5x - 4| = 0$

№5. $|2x - |x + 2|| = 4$

▪ **Ответы (тест)** Модуль в целых уравнениях

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	-1 и -0,2	-1	-1; 1 и 3	4	-1 и 2
Вар.2	-0,5 и 2	-0,5 и 1	-4; -2; 0 и 2	-8 и -4	-2 и 6

▪ **Решение (тест)** Модуль в целых уравнениях

Вариант 1

№1.

$$|5x+3|=2$$

$$\begin{cases} 5x+3=2 \\ 5x+3=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x=-1 \\ 5x=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{5} \\ x=-1 \end{cases}$$

Ответ: -1 и -0,2.

№2.

$$4x+11-|2x+5|=4$$

$$4x+11-4=|2x+5|$$

$$|2x+5|=4x+7$$

$$\begin{cases} 4x+7 \geq 0 \\ 2x+5=4x+7 \\ 2x+5=-4x-7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{7}{4} \\ x=-1 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

Ответ: -1.

№3.

$$||x-1|+2|-3|=1$$

$$\begin{cases} |x-1|+2-3=1 \\ |x-1|+2-3=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-1|+2=4 \\ |x-1|+2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-1|+2=4 \\ |x-1|+2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-1|=2 \\ |x-1|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ x-1=-2 \\ x-1=0 \end{cases}$$

$$x=3, x=-1, x=1$$

Ответ: -1; 1 и 3.

№4.

$$|x^2-7x+12|=x-4$$

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x^2-7x+12=x-4 \\ x^2-7x+12=4-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ (x-4)^2=0 \\ x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x=4 \Leftrightarrow x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

Ответ: 4.

№5.

$$||x-1|-3x|=5$$

$$\begin{cases} |x-1|-3x=5 \\ |x-1|-3x=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-1|=5+3x \\ |x-1|=3x-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1=5+3x \\ x-1=3x-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-1=-5-3x \\ x-1=-3x+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x=-3 \\ x=2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq 1 \\ x=-1 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=-1 \end{cases}$$

$$x=2$$

Ответ: -1 и 2.

Вариант 2

№1.

$$|4x - 3| = 5$$

$$\begin{cases} 4x - 3 = 5 \\ 4x - 3 = -5 \\ 4x = 8 \\ 4x = -2 \\ x = 2 \\ x = -0,5 \end{cases}$$

Ответ: -0,5 и 2.

№2.

$$|8x + 1| - 4x - 1 = 4$$

$$\begin{cases} |8x + 1| = 4x + 5 \\ 4x + 5 \geq 0 \\ \begin{cases} 8x + 1 = 4x + 5 \\ 8x + 1 = -4x - 5 \end{cases} \\ x \geq -\frac{5}{4} \\ \begin{cases} 4x = 4 \\ 12x = -6 \end{cases} \\ x \geq -\frac{5}{4} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: -0,5 и 1.

№3.

$$\left| \sqrt{\left(\sqrt{(x+1)^2 - 2} \right)^2 + 3} \right| = 4$$

$$\begin{cases} ||x+1| - 2| + 3 = 4 \\ ||x+1| - 2| + 3 = 4 \\ ||x+1| - 2| = 1 \\ \begin{cases} |x+1| - 2 = 1 \\ |x+1| - 2 = -1 \end{cases} \\ |x+1| = 3 \\ |x+1| = 1 \\ \begin{cases} x+1 = 3 \\ x+1 = -3 \\ x+1 = 1 \\ x+1 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: -4; -2; 0 и 2.

№4.

$$3x + 4 + |x^2 + 5x - 4| = 0$$

$$\begin{cases} |x^2 + 5x - 4| = -3x - 4 \\ \begin{cases} -3x - 4 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 + 5x - 4 = -3x - 4 \\ x^2 + 5x - 4 = 3x + 4 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -\frac{4}{3} \\ \begin{cases} x(x+8) = 0 \\ x = -4 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -\frac{4}{3} \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = -4 \end{cases} \\ x = -4 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: -8 и -4.

№5.

$$|2x - |x + 2|| = 4$$

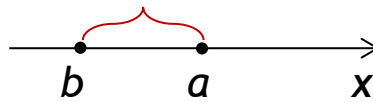
$$\begin{cases} |2x - |x + 2|| = 4 \\ \begin{cases} 2x - |x + 2| = 4 \\ 2x - |x + 2| = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} |x + 2| = 2x - 4 \\ |x + 2| = 2x + 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ \begin{cases} x + 2 = 2x - 4 \\ x + 2 = 2x + 4 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 \leq 0 \\ \begin{cases} x + 2 = -2x + 4 \\ x + 2 = -2x - 4 \end{cases} \end{cases} \\ \text{или} \\ \begin{cases} x \leq -2 \\ \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -2 \end{cases} \\ x = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = 6 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: -2 и 6.

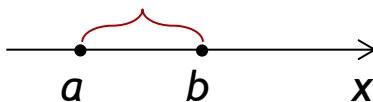
✓ **Модуль - это расстояние между точками a и b**

$$|a - b| = \rho(a; b)$$

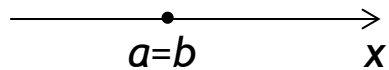
$$|a - b| = a - b, \text{ если } a > b$$



$$|a - b| = b - a, \text{ если } b > a$$



$$|a - b| = 0, \text{ если } b = a$$



Т.к. расстояние - это геометрическая величина, и оно принимает только неотрицательные значения, то $|a - b| \geq 0$

✓ **Правило раскрытия модуля**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Если подмодульное выражение больше или равно нулю, то модуль раскрываем со знаком «плюс»;

Если подмодульное выражение меньше нуля, то модуль раскрываем со знаком «минус».

✓ **Некоторые свойства модуля**

$$|x|^2 = x^2$$

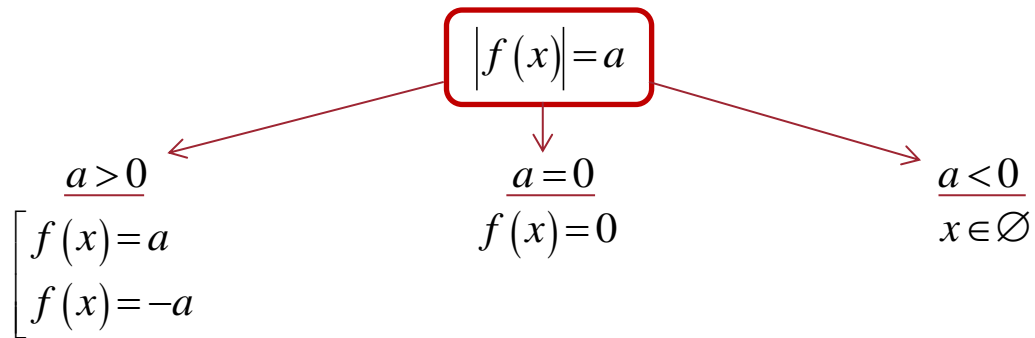
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| = |-x|$$

$$|x| \geq 0$$

✓ Основные эквивалентности

1.



2.

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

3.

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

или

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$