

## Методы решения целых уравнений (продолжение)

## ■ Примеры

Решите уравнения:

№1.  $60x - 38x^2 - 3x^3 + x^4 + 400 = 0.$

---

№2.  $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$

---

№3.  $(x^2 + 2x - 5)^4 + (x^2 - 4x - 5)^4 = 272x^4.$

---

№4. а) Решите уравнение  $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}\right) - 1.$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $[-2; 3].$

№1.  $60x - 38x^2 - 3x^3 + x^4 + 400 = 0$

Проверкой установим, что  $x = 0$  корнем не является, поэтому разделим каждую часть уравнения на  $x^2$ .

$$\frac{60}{x} - 38 - 3x + x^2 + \frac{400}{x^2} = 0$$

$$\left( x^2 + \frac{400}{x^2} \right) + 3\left( \frac{20}{x} - x \right) - 38 = 0$$

Пусть  $t = \frac{20}{x} - x$ , тогда  $t^2 = \left( \frac{20}{x} - x \right)^2$ ,  $t^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{20}{x} \cdot x + \frac{400}{x^2}$ ,  $t^2 + 40 = x^2 + \frac{400}{x^2}$

$$t^2 + 40 + 3t - 38 = 0$$

$$t^2 + 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = -1 \quad t_2 = -2$$

$$\frac{20}{x} - x = -1 \quad \frac{20}{x} - x = -2$$

$$x^2 - x - 20 = 0 \quad x^2 - 2x - 20 = 0$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = 5 \quad x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{21}$$

*Ответ:*  $-4; 5; 1 \pm \sqrt{21}$

№2.  $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$

Однородное уравнение второй степени. Проверкой установим, что  $x = 0$  корнем не является, поэтому разделим каждую часть уравнения на  $x^4$ .

$$\frac{(x^2 - x + 1)^4}{x^4} - \frac{10x^2(x^2 - x + 1)^2}{x^2 \cdot x^2} + 9 = 0$$

$$\left( \frac{x^2 - x + 1}{x} \right)^4 - 10 \cdot \left( \frac{x^2 - x + 1}{x} \right)^2 + 9 = 0$$

Пусть  $t = \left( \frac{x^2 - x + 1}{x} \right)^2$ , тогда  $t^2 - 10t + 9 = 0$ ,  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 9$

$$\left( \frac{x^2 - x + 1}{x} \right)^2 = 1 \quad \left( \frac{x^2 - x + 1}{x} \right)^2 = 9$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - x + 1}{x} = 1 \\ \frac{x^2 - x + 1}{x} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2 - x + 1}{x} = 3 \\ \frac{x^2 - x + 1}{x} = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x \in \emptyset \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{3} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x = \{-1; 1; 2 \pm \sqrt{3}\}$$

*Ответ:*  $\pm 1, 2 \pm \sqrt{3}$

**№3.**  $(x^2 + 2x - 5)^4 + (x^2 - 4x - 5)^4 = 272x^4$

1) Проверкой установим, что  $x=0$  корнем не является. Разделим каждую часть уравнения на  $x^4$ .

$$\left(\frac{x^2 + 2x - 5}{x}\right)^4 + \left(\frac{x^2 - 4x - 5}{x}\right)^4 = 272$$

$$\left(x + 2 - \frac{5}{x}\right)^4 + \left(x - 4 - \frac{5}{x}\right)^4 = 272$$

Пусть  $t = x - \frac{5}{x}$ , тогда

$$(t+2)^4 + (t-4)^4 = 272$$

$$(t-1+3)^4 + (t-1-3)^4 = 272$$

2) Пусть  $z = t - 1$ , тогда

$$(z+3)^4 + (z-3)^4 = 272$$

$$(z^2 + 6z + 9)^2 + (z^2 - 6z + 9)^2 = 272$$

$$z^4 + 54z^2 - 55 = 0$$

$$(z^2)_1 = 1 \quad (z^2)_2 = -55$$

$$z_1 = 1 \quad z_2 = -1 \quad z \in \emptyset$$

$$t_1 = 2 \quad t_2 = 0$$

$$x - \frac{5}{x} = 2 \quad x - \frac{5}{x} = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{6} \quad x = \pm \sqrt{5}$$

*Ответ:*  $1 \pm \sqrt{6}; \pm \sqrt{5}$

**№4.** а) Решите уравнение  $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}\right) - 1$ .

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $[-2; 3]$ .

*Решение:*

а) Пусть  $t = \frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}$ , тогда

$$t^2 = \left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}\right)^2 = \frac{(x-1)^2}{16} - 1 + \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} \right) - 1$$

$$2t^2 + 2 = \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2}$$

Получим уравнение  $2t^2 + 2 = 7t - 1$ ,  $2t^2 - 7t + 3 = 0$ ,  $t_1 = 3$  или  $t_2 = \frac{1}{2}$ . Вернемся к замене.

$$\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} = 3$$

$$x^2 - 14x + 5 = 0$$

$$x = 7 \pm 2\sqrt{11}$$

$$\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = -1; x = 5$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку  $[-2; 3]$ .

$$x = -1 \in [-2; 3]; \quad x = 5 \notin [-2; 3]; \quad x = 7 + 2\sqrt{11} \notin [-2; 3]$$

$$x = 7 - 2\sqrt{11} \in [-2; 3]$$

$$7 - 2\sqrt{11} \vee 3$$

$$7 - 2\sqrt{11} \vee -2$$

$$4 \vee 2\sqrt{11}$$

$$11 \vee 2\sqrt{11}$$

$$16 \vee 44, \quad 7 - 2\sqrt{11} < 3; \quad 121 \vee 44; \quad 7 - 2\sqrt{11} > -2$$

*Ответ:* а)  $7 \pm 2\sqrt{11}, -1, 5$ ; б)  $7 - 2\sqrt{11}; -1$ .

**Вариант 1**

Решите уравнения:

№1.  $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

№2.  $x^4 - 10x^2 - 3x^3 - 45x + 225 = 0$

№3.  $(x^2 + 2)^2 + x(x^2 + 2) = 12x^2$

№4.  $2x^4 - x^2(x+2) - (x+2)^2 = 0$

№5.  $(x^2 + x + 1)^2 - 14(x-1)^2 = 5(x^3 - 1)$

№6.  $(\sqrt{x} + 1)^4 + (\sqrt{x} - 3)^4 = 32$

№7.

а) Решите уравнение  $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10$ .

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $[-2; 2]$ .

**Вариант 2**

Решите уравнения:

№1.  $x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0$

№2.  $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0$

№3.  $3x(x^2 + 1) + (x^2 - 4x + 1)^2 = 12x^2$

№4.  $3x^4 + 2x^2(x-2) - (x-2)^2 = 0$

№5.  $10(x^2 - x + 1)^2 - 3(x+1)^2 = 7(x^3 + 1)$

№6.  $(\sqrt{x} - 4)^4 + (\sqrt{x} - 8)^4 = 32$

№7.

а) Решите уравнение  $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{20}{(x+3)^2} = 8\left(\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3}\right) + 1$ .

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $[-6; -4]$ .

■ Ответы (тест)

Методы решения целых уравнений (продолжение)

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
Вар.1	$1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$	3 и 5	$1; 2; -2 \pm \sqrt{2}$	-1; 2	$2; 4; \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$	1	a) -1; 4; $6 \pm \sqrt{22}$ б) -1; $6 - \sqrt{22}$
Вар.2	$\frac{1}{2}; \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$	$2 \pm \sqrt{2}$	$2 \pm \sqrt{3}$	-2; 1	0 и 2	36	a) -5; 2; $\frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$ б) -5; $\frac{1 + \sqrt{65}}{2}$

■ Решение (тест)

Методы решения целых уравнений (продолжение)

Вариант 1

№1.

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0 \mid : x^2$$

( $x = 0$  корнем не является)

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$$\left| t = x + \frac{1}{x}, t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}, t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \right.$$

$$t^2 - 2 - 5t + 8 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = 3$$

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\underline{x=1}$$

№2.

$$x^4 - 10x^2 - 3x^3 - 45x + 225 = 0$$

$$x^4 - 10x^2 - 3x^3 - 45x + 225 = 0 \mid : x^2$$

$$x^2 - 10 - 3x - \frac{45}{x} + \frac{225}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{15}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{15}{x}\right) - 10 = 0$$

$$\left| t = x + \frac{15}{x}, t^2 = x^2 + 30 + \frac{225}{x^2}, t^2 - 30 = x^2 + \frac{225}{x^2} \right.$$

$$t^2 - 30 - 3t - 10 = 0$$

$$t^2 - 3t - 40 = 0$$

$$t_1 = 8 \quad t_2 = -5$$

$$x + \frac{15}{x} = 8 \quad x + \frac{15}{x} = -5$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad x^2 + 5x + 15 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad D < 0$$

$$x_2 = 5 \quad x \in \emptyset$$

$$\underline{x = \{3; 5\}}$$

**№3.**

$$(x^2 + 2)^2 + x(x^2 + 2) = 12x^2$$

$$(x^2 + 2)^2 + x(x^2 + 2) = 12x^2 \Big| : x^2$$

( $x = 0$  корнем не является)

$$\left(\frac{x^2 + 2}{x}\right)^2 + \frac{x^2 + 2}{x} - 12 = 0$$

$$t = \frac{x^2 + 2}{x}$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$t_1 = -4 \quad t_2 = 3$$

$$\frac{x^2 + 2}{x} = -4 \quad \frac{x^2 + 2}{x} = 3$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$D/4 = 4 - 2 = 2 \quad x_3 = 1$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2} \quad x_4 = 2$$

$$x = \{1; 2; -2 \pm \sqrt{2}\}$$

**№4.**

$$2x^4 - x^2(x+2) - (x+2)^2 = 0$$

$$2x^4 - x^2(x+2) - (x+2)^2 = 0 \Big| : (x+2)^2$$

( $x = -2$  корнем не является)

$$2\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 - \frac{x^2}{x+2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{x+2} = t, \quad 2t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9, \quad t = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{x+2} = 1 \quad \frac{x^2}{x+2} = -\frac{1}{2}$$

$x^2 - x - 2 = 0 \quad 2x^2 + x + 2 = 0$

$$x_1 = 2 \quad D < 0$$

$$x_2 = -1 \quad x \in \emptyset$$

$$x \in \{-1; 2\}$$

**№5.**

$$(x^2 + x + 1)^2 - 14(x-1)^2 = 5(x^3 - 1)$$

$$(x^2 + x + 1)^2 - 14(x-1)^2 = 5(x-1)(x^2 + x + 1) \Big| : (x-1)^2$$

( $x = 1$  корнем не является)

$$\left(\frac{x^2 + x + 1}{x-1}\right)^2 - 14 - 5 \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x-1} = 0$$

$$t = \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$$

$$t^2 - 5t - 14 = 0$$

$$t_1 = 7 \quad t_2 = -2$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x-1} = 7 \quad \frac{x^2 + x + 1}{x-1} = -2$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad D = 9 + 4 = 13$$

$$x_2 = 4 \quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \left\{ 2; 4; \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \right\}$$

**№6.**

$$(\sqrt{x} + 1)^4 + (\sqrt{x} - 3)^4 = 32$$

$$\text{Пусть } t = \sqrt{x}$$

$$(t+1)^4 + (t-3)^4 = 32$$

$$z = t - \frac{-1+3}{2} = t-1; \quad t = z+1$$

$$(z+2)^4 + (z-2)^4 = 32$$

$$(z^2 + 4z + 4)^2 + (z^2 - 4z + 4)^2 = 32$$

$$2z^4 + 48z^2 + 32 = 32$$

$$z^2(z^2 + 24) = 0$$

$$z^2 = 0 \quad z^2 + 24 = 0$$

$$z = 0 \quad \emptyset$$

$$t = 1$$

$$1 = \sqrt{x}$$

$$x = 1$$

№7. а) Решите уравнение  $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10.$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $[-2; 2]$ .

*Решение:*

а) Пусть  $t = \frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}$ , тогда

$$t^2 = \left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right)^2 = \frac{(x-2)^2}{4} - 3 + \frac{9}{(x-2)^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} \right) - 3$$

$$2t^2 + 6 = \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2}$$

Получим уравнение  $2t^2 + 6 = 7t + 10$ ,  $2t^2 - 7t - 4 = 0$ ,  $t_1 = 4$  или  $t_2 = -\frac{1}{2}$ . Вернемся к замене.

$$\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = 4$$

$$x^2 - 12x + 14 = 0$$

$$x = 6 \pm \sqrt{22}$$

$$\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = -1; x = 4$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку  $[-2; 2]$ .

$$x = -1 \in [-2; 2]; \quad x = 4 \notin [-2; 2]; \quad x = 6 + \sqrt{22} \notin [-2; 2]$$

$$x = 6 - \sqrt{22} \in [-2; 2]$$

$$6 - \sqrt{22} \vee 2$$

$$6 - \sqrt{22} \vee -2$$

$$4 \vee \sqrt{22}$$

$$8 \vee \sqrt{22}$$

$$16 \vee 22, \quad 6 - \sqrt{22} < 2; \quad 64 \vee 22; \quad 6 - \sqrt{22} > -2$$

*Ответ:* а)  $6 \pm \sqrt{22}, -1, 4$ ; б)  $6 - \sqrt{22}; -1$ .

## Вариант 2

**№1.**

$$\begin{aligned}
 & x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0 \\
 & x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0 \quad | : x^2 \\
 & (x=0 \text{ корнем не является}) \\
 & x^2 - 7x + 12 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \\
 & x^2 + \frac{1}{x^2} - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0 \\
 & \left| \begin{array}{l} t = x + \frac{1}{x}, \quad t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}, \quad t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ t^2 - 2 - 7t + 12 = 0 \end{array} \right. \\
 & t^2 - 7t + 12 = 0 \\
 & t^2 - 7t + 10 = 0 \\
 & t_1 = 2 \qquad \qquad t_2 = 5 \\
 & x + \frac{1}{x} = 2 \qquad \qquad x + \frac{1}{x} = 5 \\
 & x^2 - 2x + 1 = 0 \quad x^2 - 5x + 1 = 0 \\
 & (x-1)^2 = 0 \qquad \qquad x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \\
 & \underline{x=1}
 \end{aligned}$$

**№2.**

$$\begin{aligned}
 & x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0 \\
 & x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0 \quad | : x^2 \\
 & x^2 - 6x + 12 - \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \\
 & x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{2}{x}\right) + 12 = 0 \\
 & \left| \begin{array}{l} t = x + \frac{2}{x}, \quad t^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2}, \quad t^2 - 4 = x^2 + \frac{4}{x^2} \\ t^2 - 4 - 6t + 12 = 0 \end{array} \right. \\
 & t^2 - 6t + 8 = 0 \\
 & t_1 = 2 \qquad \qquad t_2 = 4 \\
 & x + \frac{2}{x} = 2 \qquad \qquad x + \frac{2}{x} = 4 \\
 & x^2 - 2x + 2 = 0 \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \\
 & D < 0 \qquad \qquad x = 2 \pm \sqrt{2} \\
 & x \in \emptyset \\
 & \underline{x = 2 \pm \sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

**№3.**

$$\begin{aligned}
 & 3x(x^2 + 1) + (x^2 - 4x + 1)^2 = 12x^2 \\
 & 3x(x^2 + 1) + (x^2 - 4x + 1)^2 = 12x^2 \quad | : x^2 \\
 & (x=0 \text{ корнем не является}) \\
 & 3\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) + \left(\frac{x^2 + 1}{x} - 4\right)^2 - 12 = 0 \\
 & t = \frac{x^2 + 1}{x} \\
 & 3t + (t - 4)^2 - 12 = 0 \\
 & t^2 - 5t + 4 = 0 \\
 & t_1 = 4 \qquad \qquad t_2 = 1 \\
 & \frac{x^2 + 1}{x} = 4 \qquad \qquad \frac{x^2 + 1}{x} = 1 \\
 & x^2 - 4x + 1 = 0 \quad x^2 - x + 1 = 0 \\
 & D/4 = 4 - 1 = 3 \quad D < 0 \\
 & \underline{x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}} \\
 & \underline{x = \{2 \pm \sqrt{3}\}}
 \end{aligned}$$

**№4.**

$$\begin{aligned}
 & 3x^4 + 2x^2(x-2) - (x-2)^2 = 0 \\
 & 3x^4 + 2x^2(x-2) - (x-2)^2 = 0 \quad | : (x-2)^2 \\
 & (x=2 \text{ корнем не является}) \\
 & 3\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{x-2} - 1 = 0 \\
 & \frac{x^2}{x-2} = t \\
 & 3t^2 + 2t - 1 = 0 \\
 & D/4 = 1 + 3 = 4, \quad t = \frac{-1 \pm 2}{3} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{3} \end{cases} \\
 & \frac{x^2}{x-2} = -1 \qquad \frac{x^2}{x-2} = \frac{1}{3} \\
 & x^2 + x - 2 = 0 \quad 3x^2 - x + 2 = 0 \\
 & x_1 = -2 \qquad D < 0 \\
 & x_2 = 1 \qquad x \in \emptyset \\
 & \underline{x = \{1; -2\}}
 \end{aligned}$$

## №5.

$$10(x^2 - x + 1)^2 - 3(x+1)^2 = 7(x^3 + 1)$$

$$10(x^2 - x + 1)^2 - 3(x+1)^2 = 7(x+1)(x^2 - x + 1) \Big| : (x+1)^2$$

$(x = -1$  корнем не является)

$$10\left(\frac{x^2 - x + 1}{x+1}\right)^2 - 3 - 7 \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x+1} = 0$$

$$t = \frac{x^2 - x + 1}{x+1}$$

$$10t^2 - 7t - 3 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = -\frac{3}{10}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x+1} = 1 \quad \frac{x^2 - x + 1}{x+1} = -\frac{3}{10}$$

$$x^2 - 2x = 0 \quad 10x^2 - 7x + 13 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad D < 0$$

$$x_2 = 0 \quad \emptyset$$

$$x = \underline{\{0; 2\}}$$

## №6.

$$(\sqrt{x}-4)^4 + (\sqrt{x}-8)^4 = 32$$

$$\text{Пусть } t = \sqrt{x}$$

$$(t-4)^4 + (t-8)^4 = 32$$

$$z = t - \frac{4+8}{2} = t - 6; \quad t = z + 6$$

$$(z+2)^4 + (z-2)^4 = 32$$

$$(z^2 + 4z + 4)^2 + (z^2 - 4z + 4)^2 = 32$$

$$2z^4 + 48z^2 + 32 = 32$$

$$z^2(z^2 + 24) = 0$$

$$z^2 = 0 \quad z^2 + 24 = 0$$

$$z = 0 \quad \emptyset$$

$$t = 6$$

$$6 = \sqrt{x}$$

$$x = \underline{36}$$

№7. а) Решите уравнение  $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{20}{(x+3)^2} = 8\left(\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3}\right) + 1$ .

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $[-6; -4]$ .

Решение:

а) Пусть  $t = \frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3}$ , тогда

$$t^2 = \left(\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3}\right)^2 = \frac{(x+3)^2}{25} - \frac{4}{5} + \frac{4}{(x+3)^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{20}{(x+3)^2}\right) - \frac{4}{5}$$

$$5t^2 + 4 = \frac{(x+3)^2}{5} + \frac{20}{(x+3)^2}$$

Получим уравнение  $5t^2 + 4 = 8t + 1$ ,  $5t^2 - 8t + 3 = 0$ ,  $t_1 = 1$  или  $t_2 = \frac{3}{5}$ . Вернемся к замене.

$$\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3} = 1$$

$$x^2 + x - 16 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$$

$$\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3} = \frac{3}{5}$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = 2; \quad x = -5$$

6) Найдите корни, принадлежащие отрезку  $[-6; -4]$ .

$$x = -5 \in [-6; -4]; \quad x = 2 \notin [-6; -4]; \quad x = \frac{-1 + \sqrt{65}}{2} \notin [-6; -4]$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{65}}{2} \in [-6; -4]$$

$$\frac{-1 - \sqrt{65}}{2} \vee -6 \quad \frac{-1 - \sqrt{65}}{2} \vee -4$$

$$11 \vee \sqrt{65} \quad 7 \vee \sqrt{65}$$

$$121 \vee 65, \quad \frac{-1 - \sqrt{65}}{2} > -6; \quad 49 \vee 65; \quad \frac{-1 - \sqrt{65}}{2} < -4$$

Ответ: а)  $\frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}, 2, -5;$  б)  $\frac{-1 - \sqrt{65}}{2}; -5.$

- ✓ Уравнение вида  $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) \cdot g(x) + c \cdot g^2(x) = 0$  называют однородным второй степени.

Найдите те значения переменной, при которых  $f(x) = 0$  или  $g(x) = 0$ .

Проверкой установите: является ли это значение корнем уравнения.

Сводим к квадратному уравнению делением на одно из выражений в квадрате:

$$f^2(x) \text{ или } g^2(x).$$

$$a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) \cdot g(x) + c \cdot g^2(x) = 0 \quad | :g^2(x)$$

$$a \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} + b \cdot \frac{f(x) \cdot g(x)}{g^2(x)} + c = 0$$

$$a \cdot \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 + b \cdot \frac{f(x)}{g(x)} + c = 0$$

$$t = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$$

- ✓ В уравнениях вида  $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$  рекомендуется делать замену  $t = x - \frac{a+b}{2}$ .