Методы решения дробно-рациональных уравнений

▪ ***Примеры*** Решите уравнения:

№1. $\dfrac{2}{8x^3+4x^2-2x-1}+\dfrac{1}{1-4x^2}+\dfrac{x}{4x^2+4x+1}=0.$

№2. $1+\left(2+\left(x+3^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}=\dfrac{9x+6}{6x+5}.$

№3. $\dfrac{x(3-x)}{\dfrac{1}{x-7}-\dfrac{2}{x-10}}=\dfrac{4}{\dfrac{2}{x-10}+\dfrac{1}{7-x}}.$

№4. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}.$

№5. $x^2+\left(\dfrac{2x}{x+2}\right)^2=21.$

№6. $\dfrac{20x}{x^2+3x+10}+1=\dfrac{20x}{x^2+2x+10}.$

№1.

$$\frac{2}{8x^3+4x^2-2x-1}+\frac{1}{1-4x^2}+\frac{x}{4x^2+4x+1}=0$$

$$\frac{2}{4x^2(2x+1)-(2x+1)}-\frac{1}{4x^2-1}+\frac{x}{(2x+1)^2}=0$$

$$\frac{2}{(2x+1)(4x^2-1)}-\frac{1}{4x^2-1}+\frac{x}{(2x+1)^2}=0$$

ОДЗ: $4x^2-1\neq 0,\ x^2=\frac{1}{4},\ \begin{matrix} x\neq\frac{1}{2} \\ x\neq-\frac{1}{2}\end{matrix}$

$$\frac{2}{(2x+1)^2(2x-1)}-\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}+\frac{x}{(2x+1)^2}=0$$

$$2-(2x+1)+x(2x-1)=0$$

$$2-2x-1+2x^2-x=0$$

$$2x^2-3x+1=0,\quad x=\frac{3\pm1}{4}=\left|\begin{matrix}1\in \text{ОДЗ}\\ \frac{1}{2}\notin\text{ОДЗ}\end{matrix}\right.$$

$\underline{x=1}$

Ответ: 1.

№2.

$$1+\left(2+\left(x+3^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}=\frac{9x+6}{6x+5}$$

1) $x+3^{-1}=x+\frac{1}{3}=\frac{3x+1}{3}$

2) $\left(\frac{3x+1}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{3x+1},\ 3x+1\neq0,\ x\neq-\frac{1}{3}$

3) $2+\frac{3}{3x+1}=\frac{6x+2+3}{3x+1}=\frac{6x+5}{3x+1}$

4) $\left(\frac{6x+5}{3x+1}\right)^{-1}=\frac{3x+1}{6x+5},\ 6x+5\neq0,\ x\neq-\frac{5}{6}$

5) $1+\frac{3x+1}{6x+5}=\frac{6x+5+3x+1}{6x+5}=\frac{9x+6}{6x+5}$

Вернемся к уравнению

$$\frac{9x+6}{6x+5}=\frac{9x+6}{6x+5},\quad x\in R$$

С учетом ОДЗ $\underline{x\in\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right)\cup\left(-\frac{5}{6};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\infty\right)}$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right)\cup\left(-\frac{5}{6};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\infty\right)$.

№3.

$$\frac{x(3-x)}{\frac{1}{x-7}-\frac{2}{x-10}}=\frac{4}{\frac{2}{x-10}+\frac{1}{7-x}}$$

1) $\frac{1}{x-7}-\frac{2}{x-10}=\frac{x-10-2(x-7)}{(x-7)(x-10)}=$

$=\frac{-x+4}{(x-7)(x-10)}=\frac{-(x-4)}{(x-7)(x-10)}$

2) $\frac{2}{x-10}+\frac{1}{7-x}=\frac{2}{x-10}-\frac{1}{x-7}=$

$=-\left(\frac{1}{x-7}-\frac{2}{x-10}\right)=-\frac{-x+4}{(x-7)(x-10)}=$

$=\frac{x-4}{(x-7)(x-10)}$

Вернемся к уравнению

$$\frac{-x(x-3)}{\frac{-(x-4)}{(x-7)(x-10)}}=\frac{4}{\frac{x-4}{(x-7)(x-10)}}$$

ОДЗ: $x\neq 7,\ x\neq 10,\ x\neq 4$

$x^2-3x-4=0$

$x_1=4\notin$ ОДЗ $\quad x_2=-1\in$ ОДЗ

$\underline{x=-1}$

Ответ: -1.

№4.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}-\frac{6}{x+6}=0$$

$$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{6}{x+6}\right)+\left(\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}\right)=0$$

$$\frac{x+6-6x+6}{(x-1)(x+6)}+\frac{2x-6+3x-6}{(x-2)(x-3)}=0$$

$$\frac{-5x+12}{(x-1)(x+6)}+\frac{5x-12}{(x-2)(x-3)}=0$$

$$(5x-12)\left(\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{1}{(x-1)(x+6)}\right)=0$$

$5x-12=0$ или $\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{(x-1)(x+6)}$

$5x=12$

$\underline{x=2{,}4}$

или

$(x-2)(x-3)=(x-1)(x+6)$

$x^2-5x+6=x^2+5x-6$

$10x=12$

$\underline{x=1{,}2}$

ОДЗ: $x\neq 2\quad x\neq 1$
$x\neq 3\quad x\neq -6$

Ответ: 1,2 и 2,4.

№5.

$$x^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=21$$

$$x^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=21 \quad (x\neq -2)$$

$$x^2+2x\cdot\frac{2x}{x+2}-2x\cdot\frac{2x}{x+2}+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=21$$

$$\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}-21=0$$

$$\left(\frac{x^2+2x-2x}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}-21=0$$

$$\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}-21=0$$

$$t=\frac{x^2}{x+2}$$

$$t^2+4t-21=0$$

$t_1=-7$ $\qquad$ $t_2=3$

$\frac{x^2}{x+2}=-7$ $\qquad$ $\frac{x^2}{x+2}=3$

$x^2+7x+14=0$ $\qquad$ $x^2-3x-6=0$

$D=49-56<0$ $\qquad$ $D=9+24=33$

$\varnothing$ $\qquad$ $x=\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}$

Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}$.

№6.

$$\frac{20x}{x^2+3x+10}+1=\frac{20x}{x^2+2x+10}$$

$$\frac{20x:x}{\left(x^2+3x+10\right):x}+1=\frac{20x:x}{\left(x^2+2x+10\right):x}$$

$x=0$ не является корнем данного уравнения

$$\frac{20}{x+3+\frac{10}{x}}+1=\frac{20}{x+2+\frac{10}{x}}$$

Пусть $x+2+\frac{10}{x}=t$

$$\frac{20}{t+1}+1=\frac{20}{t}\Bigg|\cdot t(t+1)$$

$$20t+t(t+1)=20(t+1)$$

$$t^2+t-20=0$$

$t_1=-5$ $\qquad$ $t_2=4$

$x+2+\frac{10}{x}=-5$ $\qquad$ $x^2+2+\frac{10}{x}=4$

$x^2+7x+10=0$ $\qquad$ $x^2-2x+10=0$

$x_1=-5$ $\qquad$ $D<0$

$x_2=-2$ $\qquad$ $\varnothing$

Ответ: -5 и -2.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $$\frac{1}{(3x-2)^2}=\frac{x+1}{9x^3-4x}+\frac{3x}{27x^3-18x^2-12x+8}$$

№2. $$1+\left(3+\left(2+x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}=\frac{9x+4}{7x+3}$$

№3. $$\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-4}=0$$

№4. $$x^2+\left(\frac{3x}{x+3}\right)^2=27$$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $$\frac{4x}{x^2+4x-1}+\frac{2x}{x^2+2x-1}=2$$

№2. $$\frac{8}{x^2+x+3}+\frac{10}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{x}$$

№3. $$6\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2}+5\frac{(x-4)^2}{(x-3)^2}=11\frac{x^2-16}{x^2-9}$$

Вариант 3

Решите уравнения:

№1. $$\frac{4}{x^2-16}-\frac{1}{x^2+8x+16}=\frac{10}{x^3-4x^2-16x+64}$$

№2. $$\frac{x(x+1)}{\frac{2}{x-6}+\frac{1}{4-x}}=\frac{6}{\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-4}}$$

№3. $$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0$$

№4. $$x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=40$$

Вариант 4

Решите уравнения:

№1. $$\frac{4x}{x^2-4x+1}+\frac{3x}{x^2+x+1}=-1$$

№2. $$-\frac{10}{x^2-x-6}+\frac{9}{x^2-5x-6}=\frac{1}{x}$$

№3. $$\frac{(x+1)^2}{(x-3)^2}+14\frac{x^2-1}{x^2-9}=15\frac{(x-1)^2}{(x+3)^2}$$

Ответы (тест)   Методы решения дробно-рациональных уравнений

	№1	№2	№3	№4
Вар.1	*1*	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{7}\right)\cup\left(-\frac{3}{7};0\right)\cup(0;\infty)$	*5,5 и* $\frac{11+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3\pm\sqrt{45}}{2}$
Вар.2	$\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$	*-12; 0; 1*	
Вар.3	*-3 и 10/3*	*-3*	*3,5 и* $\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$	*-6 и 2*
Вар.4	*1 и* $-3\pm2\sqrt{2}$	$\frac{9\pm\sqrt{105}}{2};\ -2\pm\sqrt{10}$	*0; 1,5; 2*	

Решение (тест)   Методы решения дробно-рациональных уравнений

Вариант 1

№1.

$$\frac{1}{(3x-2)^2}=\frac{x+1}{9x^3-4x}+\frac{3x}{27x^3-18x^2-12x+8}$$

$$\frac{1}{(3x-2)^2}=\frac{x+1}{x(9x^2-4)}+\frac{3x}{9x^2(3x-2)-4(3x-2)}$$

$$\frac{1}{(3x-2)^2}-\frac{x+1}{x(3x-2)(3x+2)}-\frac{3x}{(3x-2)(9x^2-4)}=0$$

$$\frac{1}{(3x-2)^2}-\frac{x+1}{x(3x-2)(3x+2)}-\frac{3x}{(3x-2)^2(3x+2)}=0$$

$$\frac{x(3x+2)-(x+1)(3x-2)-3x^2}{x(3x-2)^2(3x+2)}=0$$

ОДЗ: $x\neq0,\ x\neq\frac{2}{3},\ x\neq-\frac{2}{3}$

$$3x^2+2x-3x^2+2x-3x+2-3x^2=0$$

$$-3x^2+x+2=0,\quad 3x^2-x-2=0$$

$$D=1+24=25,\quad x=\frac{1\pm5}{6}=\left|\begin{array}{l}1\in\text{ОДЗ}\\ -\frac{2}{3}\notin\text{ОДЗ}\end{array}\right.\Leftrightarrow \underline{x=1}$$

№2.

$$1+\left(3+\left(2+x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}=\frac{9x+4}{7x+3}$$

1) $2+x^{-1}=2+\frac{1}{x}=\frac{2x+1}{x},x\neq0$

2) $\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{-1}=\frac{x}{2x+1},\ 2x+1\neq0,\ x\neq-\frac{1}{2}$

3) $3+\frac{x}{2x+1}=\frac{6x+3+x}{2x+1}=\frac{7x+3}{2x+1}$

4) $\left(\frac{7x+3}{2x+1}\right)^{-1}=\frac{2x+1}{7x+3},\ 7x+3\neq0,\ x\neq-\frac{3}{7}$

5) $1+\frac{2x+1}{7x+3}=\frac{7x+3+2x+1}{7x+3}=\frac{9x+4}{7x+3}$

$\frac{9x+4}{7x+3}=\frac{9x+4}{7x+3},\quad x\in R$

С учетом ОДЗ $x\neq0,\ x\neq-\frac{1}{2},\ x\neq-\frac{3}{7}$

Имеем $\underline{x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{7}\right)\cup\left(-\frac{3}{7};0\right)\cup(0;\infty)}$

№3.

$$\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-4}=0$$

$$\left(\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-4}\right)+\left(\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-6}\right)=0$$

$$\frac{x-4+x-7}{(x-7)(x-4)}+\frac{x-6+x-5}{(x-5)(x-6)}=0$$

$$\frac{2x-11}{(x-7)(x-4)}+\frac{2x-11}{(x-5)(x-6)}=0$$

ОДЗ: $x\neq 7,\ x\neq 4,\ x\neq 5,\ x\neq 6$

$$(2x-11)(x-5)(x-6)+(2x-11)(x-7)(x-4)=0$$

$$(2x-11)\left(x^2-11x+30+x^2-11x+28\right)=0$$

$2x-11=0$

$x=5{,}5\in$ ОДЗ

или

$2x^2-22x+58=0\,|:2$

$x^2-11x+29=0$

$D=121-116=5$

$x=\frac{11\pm\sqrt{5}}{2}\in$ ОДЗ

Ответ: $5{,}5$ и $\frac{11\pm\sqrt{5}}{2}$

№4.

$$x^2+\left(\frac{3x}{x+3}\right)^2=27$$

$$x^2+2x\cdot\frac{3x}{x+3}-2x\cdot\frac{3x}{x+3}+\left(\frac{3x}{x+3}\right)^2=27$$

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2+6\cdot\frac{x^2}{x+3}-27=0$$

$$\left(\frac{x^2+3x-3x}{x+3}\right)^2+6\cdot\frac{x^2}{x+3}-27=0$$

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\cdot\frac{x^2}{x+3}-27=0$$

$t=\frac{x^2}{x+3}$

$t^2+6t-27=0$

$t_1=-9$

$\frac{x^2}{x+3}=-9$

$x^2+9x+27=0$

$D=81-108<0$

$x\in\varnothing$

$t_2=3$

$\frac{x^2}{x+3}=3$

$x^2-3x-9=0$

$D=9+36=45$

$x=\frac{3\pm\sqrt{45}}{2}\in$ ОДЗ

Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{45}}{2}$

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

Вариант 2

№1.

$$\frac{4x}{x^2+4x-1}+\frac{2x}{x^2+2x-1}=2$$

$$\frac{4x:x}{\left(x^2+4x-1\right):x}+\frac{2x:x}{\left(x^2+2x-1\right):x}=2$$

$(x=0$ не является корнем данного уравнения$)$

$$\frac{4}{x+4-\frac{1}{x}}+\frac{2}{x+2-\frac{1}{x}}=2$$

Пусть $t=x+\frac{1}{x}+2$

$\frac{4}{t+2}+\frac{2}{t}-2=0\Big|\cdot t(t+2)\neq 0,\quad \begin{matrix} t\neq 0 \\ t\neq -2 \end{matrix}$

$4t+2(t+2)-2t(t+2)=0$

$4t+2t+4-2t^2-4t=0$

$-2t^2+2t+4=0$

$t^2-t-2=0$

$t_1=2\in$ ОДЗ

$x+\frac{1}{x}+2=2$

$x^2+1=0$

$\varnothing$

или

$t_2=-1\in$ ОДЗ

$x+\frac{1}{x}+2=-1$

$x+\frac{1}{x}+3=0$

$x^2+3x+1=0$

$D=9-4=5$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

№2.

$$\frac{8}{x^2+x+3}+\frac{10}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{x}$$

$\frac{8}{x^2+x+3}+\frac{10}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{x}\Big|\cdot x$

$(x\neq 0)$

$\frac{8x}{x^2+x+3}+\frac{10x}{x^2-5x+3}=-3$

$\frac{8x:x}{\left(x^2+x+3\right):x}+\frac{10x:x}{\left(x^2-5x+3\right):x}=-3$

$\frac{8}{x+1+\frac{3}{x}}+\frac{10}{x-5+\frac{3}{x}}=-3$

$t=x+\frac{3}{x}$

$\frac{8}{t+1}+\frac{10}{t-5}+3=0\Big|\cdot(t-1)(t-5)\neq 0,\quad \begin{matrix} t\neq -1 \\ t\neq 5 \end{matrix}$

$8(t-5)+10(t+1)+3(t+1)(t-5)=0$

$8t-40+10t+10+3t^2-12t-15=0$

$3t^2+6t-45=0\Big|:3$

$t^2+2t-15=0$

$t_1=-5\in$ ОДЗ

$x+\frac{3}{x}=-5$

$x^2+5x+3=0$

$D=25-12=13$

$x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

$t_2=3\in$ ОДЗ

$x+\frac{3}{x}=3$

$x^2-3x+3=0$

$D=9-12<0$

$\varnothing$

Ответ: $\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

№3.

$$6\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2}+5\frac{(x-4)^2}{(x-3)^2}=11\frac{x^2-16}{x^2-9}$$

$$6\cdot\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2-11\cdot\frac{(x-4)(x+4)}{(x-3)(x+3)}+5\cdot\left(\frac{x-4}{x-3}\right)^2=0$$ ОДЗ: $x\neq-3,\ x\neq3.$

Пусть $\frac{x+4}{x+3}=a,\ \frac{x-4}{x-3}=b,$ тогда $6a^2-11ab+5b^2=0.$

Однородное уравнение второй степени.

$x=-4$ и $x=4$ не являются корнями данного уравнения.

$6\cdot\frac{a^2}{b^2}-11\frac{a}{b}+5=0,\quad \frac{a}{b}=t,\quad 6t^2-11t+5=0,\quad t=1$ и $t=\frac{5}{6}$

$\frac{a}{b}=1$ или $\frac{a}{b}=\frac{5}{6}$

$a=b\ (1)\qquad 6a=5b\ \ (2)$

$(1)\ \frac{x+4}{x+3}=\frac{x-4}{x-3}$

$(x+4)(x-3)=(x+3)(x-4)$

$x^2+x-12=x^2-x-12$

$x+x=0$

$\underline{x=0}\in$ ОДЗ

$(2)\ \frac{6\cdot(x+4)}{x+3}=\frac{5(x-4)}{x-3}$

$6(x+4)(x-3)=5(x-4)(x+3)$

$6(x^2+x-12)=5(x^2-x-12)$

$6x^2+6x-72-5x^2+5x+60=0$

$x^2+11x-12=0$

$x_1=-12\in$ ОДЗ $\quad x_2=1\in$ ОДЗ

<u>Ответ: $-12;\ 0;\ 1$</u>

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

Вариант 3

№1.

$$\frac{4}{x^2-16}-\frac{1}{x^2+8x+16}=\frac{10}{x^3-4x^2-16x+64}$$

$$\frac{4}{(x-4)(x+4)}-\frac{1}{(x+4)^2}=\frac{10}{x^2(x-4)-16(x-4)}$$

$$\frac{4}{(x-4)(x+4)}-\frac{1}{(x+4)^2}-\frac{10}{(x-4)(x^2-16)}=0$$

$$\frac{4}{(x-4)(x+4)}-\frac{1}{(x+4)^2}-\frac{10}{(x-4)^4(x+4)}=0$$

$$\frac{4(x+4)(x-4)-(x-4)^2-10(x+4)}{(x-4)^2(x+4)^2}=0$$

$$\begin{cases}4x^2-64-x^2+8x-16-10x-40=0\\ x\neq 4,\ x\neq -4\end{cases}$$

$$3x^2-2x-120=0,\quad D/4=1+360=361$$

$$x=\frac{1\pm 19}{6}=\left[\begin{array}{l}\frac{10}{3}\in \text{ОДЗ}\\ -3\in \text{ОДЗ}\end{array}\right.\Leftrightarrow \underline{x=\left\{-3;\frac{10}{3}\right\}}$$

№2.

$$\frac{\frac{x(x+1)}{2}}{\frac{2}{x-6}+\frac{1}{4-x}}=\frac{6}{\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-4}}$$

$$\frac{2}{x-6}+\frac{1}{4-x}=\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-4}=$$

$$=\frac{2x-8-x+6}{(x-6)(x-4)}=\frac{x-2}{(x-6)(x-4)}$$

$$\frac{x(x+1)}{\frac{x-2}{(x-6)(x-4)}}=\frac{6}{\frac{x-2}{(x-6)(x-4)}}$$

ОДЗ: $\frac{x-2}{(x-6)(x-4)}\neq 0$

$x\neq 2,\ x\neq 6,\ x\neq 4$

$x^2+x-6=0$

$x_1=-3\in$ ОДЗ

$x_2=2\notin$ ОДЗ

<u>Ответ: -3</u>

№3.

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0$$

$$\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}\right)+\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}\right)=0$$

$$\frac{x-5+x-2}{(x-2)(x-5)}+\frac{x-4+x-3}{(x-3)(x-4)}=0$$

$$\frac{2x-7}{(x-2)(x-5)}+\frac{2x-7}{(x-3)(x-4)}=0$$

ОДЗ: $x\neq 2,\ x\neq 5,\ x\neq 3,\ x\neq 4$

$$(2x-7)(x-3)(x-4)+(2x-7)(x-2)(x-5)=0$$

$$(2x-7)(x^2-7x+12+x^2-7x+10)=0$$

$2x-7=0$

$x=3{,}5\in$ ОДЗ

или

$2x^2-14x+22=0$

$x^2-7x+11=0$

$D=49-44=5$

$x=\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}\in$ ОДЗ

<u>Ответ: 3,5 и $\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$</u>

№4.

$$x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=40$$

$$x^2+2x\cdot\frac{3x}{x-3}-2x\cdot\frac{3x}{x-3}+\left(\frac{3x}{x-3}\right)^2=40\quad (x\neq 3)$$

$$\left(x+\frac{3x}{x-3}\right)^2-6\cdot\frac{x^2}{x-3}-40=0$$

$$\left(\frac{x^2-3x+3x}{x-3}\right)^2-6\cdot\frac{x^2}{x-3}-40=0$$

$$\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-6\cdot\frac{x^2}{x-3}-40=0$$

$t=\frac{x^2}{x-3},\quad t^2-6t-40=0$

$t_1=10$

$\frac{x^2}{x-3}=10$

$x^2-10x+30=0$

$D/4=25-30<0$

$x\in\varnothing$

$t_2=-4$

$\frac{x^2}{x-3}=-4$

$x^2+4x-12=0$

$x_1=-6\in$ ОДЗ

$x_2=2\in$ ОДЗ

<u>Ответ: -6 и 2</u>

Вариант 4

№1.

$$\frac{4x}{x^2-4x+1}+\frac{3x}{x^2+x+1}=-1$$

$$\frac{4x:x}{\left(x^2-4x+1\right):x}+\frac{3x:x}{\left(x^2+x+1\right):x}=-1$$

$\left(x=0 \text{ не является корнем данного уравнения}\right)$

$$\frac{4}{x-4+\frac{1}{x}}+\frac{3}{x+1+\frac{1}{x}}=-1$$

$$t=x+\frac{1}{x}$$

$$\frac{4}{t-4}+\frac{3}{t+1}+1=0\Big|\cdot(t-4)(t+1),\ \begin{matrix} t\neq 4 \\ t\neq -1 \end{matrix}$$

$$4(t+1)+3(t-4)+(t-4)(t+1)=0$$

$$4t+4+3t-12+t^2-3t-4=0$$

$$t^2+4t-12=0$$

$t_1=-6$ $\qquad$ $t_2=2$

$x+\frac{1}{x}=-6$ $\qquad$ $x+\frac{1}{x}=2$

$x^2+6x+1=0$ $\qquad$ $x^2-2x+1=0$

$D/4=9-1=8$ $\qquad$ $(x-1)^2=0$

$x=-3\pm 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $x=1$

Ответ: 1 и $-3\pm 2\sqrt{2}$

№2.

$$-\frac{10}{x^2-x-6}+\frac{9}{x^2-5x-6}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{-10}{x^2-x-6}+\frac{9}{x^2-5x-6}=\frac{1}{x}\Big|\cdot x\neq 0$$

$$\frac{-10x}{x^2-x-6}+\frac{9x}{x^2-5x-6}=1$$

$$\frac{-10x:x}{\left(x^2-x-6\right):x}+\frac{9x:x}{\left(x^2-5x-6\right):x}=1$$

$$\frac{-10}{x-1-\frac{6}{x}}+\frac{9}{x-5-\frac{6}{x}}=1$$

$$t=x-\frac{6}{x}$$

$$\frac{-10}{t-1}+\frac{9}{t-5}=1\Big|\cdot(t-1)(t-5),\ \begin{matrix} t\neq 1 \\ t\neq 5 \end{matrix}$$

$$-10(t-5)+9(t-1)-(t-1)(t-5)=0$$

$$-10t+50+9t-9-t^2+6t-5=0$$

$$-t^2+5t+36=0$$

$$t^2-5t-36=0$$

$t_1=9$ $\qquad$ $t_2=-4$

$x-\frac{6}{x}=9$ $\qquad$ $x-\frac{6}{x}=-4$

$x^2-9x-6=0$ $\qquad$ $x^2+4x-6=0$

$D=81+24=105$ $\qquad$ $D/4=4+6=10$

$x=\frac{9\pm\sqrt{105}}{2}$ $\qquad$ $x=-2\pm\sqrt{10}$

Ответ: $\frac{9\pm\sqrt{105}}{2}$; $-2\pm\sqrt{10}$

№3.

$$\frac{(x+1)^2}{(x-3)^2}+14\frac{x^2-1}{x^2-9}=15\frac{(x-1)^2}{(x+3)^2}$$

$$\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2+14\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+3)}-15\cdot\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2=0 \quad \text{ОДЗ: } x\neq 3,\ x\neq -3$$

Пусть $a=\frac{x+1}{x-3},\ b=\frac{x-1}{x+3},\quad a^2+14ab-15b^2=0\Big|:b^2$

$x=-1$ и $x=1$ корнями данного уравнения не являются.

$\left(\frac{a}{b}\right)^2+14\frac{a}{b}-15=0,\ \ t=\frac{a}{b}$

$t^2+14t-15=0$

$t_1=-15 \qquad t_2=1$

$\frac{a}{b}=-15 \qquad \frac{a}{b}=1$

$(1)\ a=-15b \quad (2)\ a=b$

$(1)\ \ \frac{x+1}{x-3}=-15\cdot\frac{x-1}{x+3}$

$(x+1)(x+3)=-15(x-1)(x-3)$

$x^2+4x+3=-15x^2+60x-45$

$16x^2-56x+48=0$

$2x^2-7x+6=0,\quad D=49-48=1,\quad x=\frac{7\pm1}{4}=\left|\begin{matrix}2\in \text{ОДЗ}\\ 1{,}5\in\text{ОДЗ}\end{matrix}\right.$

$(2)\ \ \frac{x+1}{x-3}=\frac{x-1}{x+3}$

$(x+1)(x+3)=(x-1)(x-3)$

$x^2+4x+3=x^2-4x+3$

$8x=0$

$x=0\in\text{ОДЗ}$

Ответ: 0; 1,5; 2

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

- *Алгоритм решения дробно-рационального уравнения*:
  1. *Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;*
  2. *Решить получившееся целое уравнение;*
  3. *Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей.*

- *Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.*
  ОДЗ – область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.

- *Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.*

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$