

## Методы решения целых уравнений

▪ **Примеры** Решите уравнения:

№1. Решите уравнение  $x(x+2)(x+3)(x+5) = 72$ .

---

№2. Решите уравнение  $(x-2)(x-3)(x-8)(x-12) = 4x^2$ .

---

№3. Решите уравнение  $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 9x + 20) = 25(x^2 - 7x) + 118$ .

---

№4. Решите уравнение  $150x - 5x^2 - 10x^3 + x^4 + 125 = 0$ .

---

№5. Решите уравнение  $(4x+3)(2-4x)(16x^2+24x+14) = 4(4x+4)^2$ .

№1.

$$x(x+2)(x+3)(x+5) = 72$$

$$(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 6) - 72 = 0$$

Пусть  $t = x^2 + 5x$

$$t(t+6) - 72 = 0$$

$$t^2 + 6t - 72 = 0$$

$$t_1 = 6 \quad \text{или} \quad t_2 = -12$$

$$x^2 + 5x = 6 \quad x^2 + 5x = -12$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \quad x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$x_1 = -6 \quad D < 0$$

$$x_2 = 1 \quad x \in \emptyset$$

Ответ: -6 и 1.

№2.

$$(x-2)(x-3)(x-8)(x-12) = 4x^2$$

$$(x^2 - 14x + 24)(x^2 - 11x + 24) = 4x^2$$

Разделим каждую часть уравнения на  $x^2$ .

Проверкой установим, что  $x = 0$  корнем не является.

$$\frac{x^2 - 14x + 24}{x} \cdot \frac{x^2 - 11x + 24}{x} = 4$$

$$\left(x - 14 + \frac{24}{x}\right)\left(x - 11 + \frac{24}{x}\right) = 4$$

Пусть  $t = x + \frac{24}{x}$

$$(t-14)(t-11) - 4 = 0$$

$$t^2 - 25t + 150 = 0$$

$$t_1 = 15 \quad t_2 = 10$$

$$x + \frac{24}{x} = 15 \quad x + \frac{24}{x} = 10$$

$$x^2 - 15x + 24 = 0 \quad x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{129}}{2} \quad x_3 = 6 \quad x_2 = 4$$

Ответ:  $\frac{15 \pm \sqrt{129}}{2}$ ; 4 и 6.

№3.

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 9x + 20) = 25(x^2 - 7x) + 118$$

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 25(x^2 - 7x) + 118$$

$$(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 12) - 25(x^2 - 7x) - 118 = 0$$

Пусть  $t = x^2 - 7x$

$$(t+10)(t+12) - 25t - 118 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 2$$

$$x^2 - 7x - 1 = 0 \quad x^2 - 7x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2} \quad x_{3,4} = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{2}$$

Ответ:  $\frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$ ;  $\frac{7 \pm \sqrt{57}}{2}$

№4.

$$150x - 5x^2 - 10x^3 + x^4 + 125 = 0$$

$$(x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 5x + 25x^2 - 30x^2 + 150x + 125 = 0$$

$$(x^2 - 5x)^2 - 30(x^2 - 5x) + 125 = 0$$

Пусть  $t = x^2 - 5x$

$$t^2 - 30t + 125 = 0$$

$$t_1 = 25 \quad t_2 = 5$$

$$x^2 - 5x - 25 = 0 \quad x^2 - 5x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 5\sqrt{5}}{2} \quad x_{3,4} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

Ответ:  $\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ ;  $\frac{5 \pm 5\sqrt{5}}{2}$

№5.

$$(4x+3)(2-4x)(16x^2+24x+14) = 4(4x+4)^2$$

$$(-16x^2 - 4x + 6)(16x^2 + 24x + 14) = 4(4x+4)^2$$

Разделим каждую часть уравнения на  $(4x+4)$ .

Проверкой установим, что  $x = -1$  корнем не является.

$$\frac{-16x^2 - 4x + 6}{4x+4} \cdot \frac{16x^2 + 24x + 14}{4x+4} = 4$$

$$\text{Пусть } a = \frac{-16x^2 - 4x + 6}{4x+4}, b = \frac{16x^2 + 24x + 14}{4x+4}.$$

$$\text{Заметим, что } a + b = \frac{-16x^2 - 4x + 6}{4x+4} + \frac{16x^2 + 24x + 14}{4x+4} = 5.$$

$$\text{Получим систему условий } \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \quad (1)$$
$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(1) \begin{cases} \frac{-16x^2 - 4x + 6}{4x+4} = 1 \\ \frac{16x^2 + 24x + 14}{4x+4} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 8x^2 + 4x - 1 = 0, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{4}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{-16x^2 - 4x + 6}{4x+4} = 4 \\ \frac{16x^2 + 24x + 14}{4x+4} = 1 \end{cases} \quad \text{Второе уравнение системы решений не имеет, поэтому } x \in \emptyset$$

$$\text{Ответ: } \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{4}.$$

Вариант 1

Решите уравнения:

№1.  $(x+6)(x+7)(x+9)(x+10)=10$

№2.  $(x-3)(x-9)(x^2+8x+12)=56x^2$

---

№3.  $(x^2-11x+30)(x^2-15x+56)=86(x^2-13x)+1677$

№4.  $x^4-12x^3-6x^2+252x+216=0$

---

№5.  $(2x+3)(1-2x)(4x^2+12x+13)=3(2x+4)^2$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1.  $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=105$

№2.  $(x-3)(x+9)(x^2-4x-12)=300x^2$

---

№3.  $(2x+1)(3-2x)(4x^2+4x+5)=3(2x+2)^2$

№4.  $80x-4x^2-8x^3+x^4+64=0$

---

№5.  $25(x+13)(x+16)(x+21)=432x$

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	$-8 \pm \sqrt{6}$	$\frac{11 \pm \sqrt{193}}{2}, 2 \text{ и } -9$	$\frac{13 \pm \sqrt{173}}{2}, \frac{13 \pm \sqrt{181}}{2}$	$3 \pm \sqrt{54}, 3 \pm \sqrt{5}$	$\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$
Вар.2	$-6 \text{ и } 2$	$\frac{-21 \pm \sqrt{369}}{2}, 1 \text{ и } 18$	$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$	$2 \pm 2\sqrt{5}, 2 \pm 2\sqrt{2}$	$-25$

**Вариант 1**

№1.

$$(x+6)(x+7)(x+9)(x+10) = 10$$

$$(x^2 + 16x + 60)(x^2 + 16x + 63) - 10 = 0$$

$$t = x^2 + 16x + 60$$

$$t(t+3) - 10 = 0$$

$$t^2 + 3t - 10 = 0$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = 5$$

$$x^2 + 16x + 60 = 2 \quad x^2 + 16x + 60 = -5$$

$$x^2 + 16x + 58 = 0 \quad x^2 + 16x + 65 = 0$$

$$D/4 = 64 - 58 = 6 \quad D/4 = 64 - 65 = -1 < 0$$

$$x = -8 \pm \sqrt{6}$$

$$x \in \emptyset$$

**Ответ:**  $-8 \pm \sqrt{6}$

№2.

$$(x-3)(x-9)(x^2 + 8x + 12) = 56x^2$$

$$(x-3)(x-9)(x+2)(x+6) = 56x^2$$

$$(x^2 + 3x - 18)(x^2 - 7x - 18) = 56x^2 \quad | : x^2$$

$$\left(x + 3 - \frac{18}{x}\right)\left(x - 7 - \frac{18}{x}\right) = 56$$

$$t = x - \frac{18}{x}$$

$$(t+3)(t-7) - 56 = 0$$

$$t^2 - 4t - 77 = 0$$

$$t = 11$$

$$x - \frac{18}{x} = 11$$

$$x^2 - 11x - 18 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{193}}{2}$$

$$t = -7$$

$$x - \frac{18}{x} = -7$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

$$x = 2 \quad x = -9$$

**Ответ:**  $\frac{11 \pm \sqrt{193}}{2}, 2 \text{ и } -9.$

№3.

$$(x^2 - 11x + 30)(x^2 - 15x + 56) = 86(x^2 - 13x) + 1677$$

$$(x-5)(x-6)(x-7)(x-8) = 86(x^2 - 13x) + 1677$$

$$(x^2 - 13x + 40)(x^2 - 13x + 42) - 86(x^2 - 13x) - 1677 = 0$$

$$t = x^2 - 13x$$

$$(t+40)(t+42) - 86t - 1677 = 0$$

$$t^2 + 82t + 1680 - 86t - 1677 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 3$$

$$x^2 - 13x = 1 \quad x^2 - 13x = 3$$

$$x^2 - 13x - 1 = 0 \quad x^2 - 13x - 3 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{173}}{2} \quad x = \frac{13 \pm \sqrt{181}}{2}$$

№4.

$$x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 252x + 216 = 0$$

$$(x^2)^2 - 2 \cdot 6x \cdot x^2 + 36x^2 - 42x^2 + 252x + 216 = 0$$

$$(x^2 - 6x)^2 - 42(x^2 - 6x) + 216 = 0$$

$$t = x^2 - 6x$$

$$t^2 - 42t + 216 = 0$$

$$D/4 = 21^2 - 216 = 225 = 15^2$$

$$t = 21 \pm 25 = \begin{cases} 46 \\ -4 \end{cases}$$

$$x^2 - 6x = 46 \quad x^2 - 6x = -4$$

$$x^2 - 6x - 46 = 0 \quad x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{54} \quad x = 3 \pm \sqrt{5}$$

№5.

$$(2x+3)(1-2x)(4x^2+12x+13) = 3(2x+4)^2$$

$$(-4x^2-4x+3)(4x^2+12x+13) = 3(2x+4)^2$$

$$\frac{-4x^2-4x+3}{2x+4} \cdot \frac{4x^2+12x+13}{2x+4} = 3$$

$$a = \frac{-4x^2-4x+3}{2x+4} \quad b = \frac{4x^2+12x+13}{2x+4}$$

$$a+b = \frac{-4x^2-4x+3}{2x+4} + \frac{4x^2+12x+13}{2x+4} = \frac{8x+16}{2x+4} = \frac{8(x+2)}{2(x+2)} = 4$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a \cdot b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} \frac{-4x^2-4x+3}{2x+4} = 1 \\ \frac{4x^2+12x+13}{2x+4} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+6x+1=0 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{-4x^2-4x+3}{2x+4} = 3 \\ \frac{4x^2+12x+13}{2x+4} = 1 \end{cases}$$

Первое уравнение системы (2) решений не имеет, поэтому и вся система решений не имеет.

$$\text{Ответ: } \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

## Вариант 2

№1.

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5) = 105$$

$$(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) - 105 = 0$$

$$t = x^2 + 4x$$

$$(t-5)(t+3) - 105 = 0$$

$$t^2 - 2t - 120 = 0$$

$$t_1 = 12 \quad t_2 = -10$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \quad x^2 + 4x + 10 = 0$$

$$\underline{x_1 = -6} \quad D < 0$$

$$\underline{x_2 = 2} \quad x \in \emptyset$$

**Ответ: -6 и 2**

№2.

$$(x-3)(x+9)(x^2 - 4x - 12) = 300x^2$$

$$(x-3)(x+9)(x-6)(x+2) = 300x^2$$

$$(x^2 - 9x + 18)(x^2 + 11x + 18) = 300x^2 \quad | : x^2$$

$$\frac{x^2 - 9x + 18}{x} \cdot \frac{x^2 + 11x + 18}{x} = 300$$

$$\left(x - 9 + \frac{18}{x}\right) \left(x + 11 + \frac{18}{x}\right) = 300$$

$$t = x + \frac{18}{x}, \quad (t-9)(t+11) - 300 = 0$$

$$t^2 + 2t - 399 = 0, \quad D/4 = 1 + 399 = 400$$

$$t_1 = 19 \quad t_2 = -21$$

$$x + \frac{18}{x} = 19 \quad x + \frac{18}{x} = -21$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0 \quad x^2 + 21x + 18 = 0$$

$$\underline{x_1 = 1} \quad \underline{x_2 = 18} \quad x = \frac{-21 \pm \sqrt{369}}{2}$$

№3.

$$(2x+1)(3-2x)(4x^2 + 4x + 5) = 3(2x+2)^2$$

$$(-4x^2 + 4x + 3)(4x^2 + 4x + 5) = 3(2x+2)^2$$

$$\frac{-4x^2 + 4x + 3}{2x+2} \cdot \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x+2} = 3$$

Пусть  $a = \frac{-4x^2 + 4x + 3}{2x+2}$ ,  $b = \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x+2}$

$$a + b = \frac{-4x^2 + 4x + 3}{2x+2} + \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x+2} = \frac{8x+8}{2x+2} = 4$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a \cdot b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(1) \begin{cases} \frac{-4x^2 + 4x + 3}{2x+2} = 1 \\ \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x+2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{-4x^2 + 4x + 3}{2x+2} = 3 \\ \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x+2} = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Первое уравнение системы не имеет} \\ \text{решений, поэтому система решений не имеет} \end{array}$$

№4.

$$80x - 4x^2 - 8x^3 + x^4 + 64 = 0$$

$$(x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 4x + 16x^2 - 20x^2 + 80x + 64 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 - 20(x^2 - 4x) + 64 = 0$$

$$t = x^2 - 4x$$

$$t^2 - 20t + 64 = 0$$

$$t_1 = 16$$

$$t_2 = 4$$

$$x^2 - 4x = 16$$

$$x^2 - 4x = 4$$

$$x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\underline{x = 2 \pm 2\sqrt{5}}$$

$$\underline{x = 2 \pm 2\sqrt{2}}$$

**Ответ:**  $2 \pm 2\sqrt{2}$  и  $2 \pm 2\sqrt{5}$ .

№5.

$$25(x+13)(x+16)(x+21) = 432x$$

$$\frac{13+16+21}{2} = 25$$

$$t = x + 25$$

$$25 \cdot (t-12)(t-9)(t-4) = 432(t-25)$$

$$25 \cdot (t^2 - 21t + 108)(t-4) = 432(t-25)$$

$$25t^3 - 625t^2 + 4368t = 0$$

$$t(25t^2 - 625t + 4368) = 0$$

$$t = 0$$

$$25t^2 - 626t + 4368 = 0$$

$$x + 25 = 0 \quad \text{или} \quad D < 0$$

$$\underline{x = -25}$$

∅

**Ответ:** -25.