

## Методы решения целых уравнений с модулем

## ■ Примеры

Решите уравнения:

$$\text{№1. } x^2 - 3\sqrt{x^2} + 2 = 0.$$

---

$$\text{№2. } x^2 + 6x - 4|x+3| - 12 = 0.$$

---

$$\text{№3. } |3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|.$$

---

$$\text{№4. } |x^4 + 6x^3 + 5x^2| = -x^4 - 6x^3 - 5x^2.$$

---

$$\text{№5. } |x^4 - 4x^3 - 5x^2| = 45 + 36x - 9x^2.$$

№1.

$$x^2 - 3\sqrt{x^2} + 2 = 0$$

$$x^2 - 3|x| + 2 = 0$$

$$t = |x|, \quad t^2 = x^2$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 + t_2 = 3 \quad t_1 = 1$$

$$t_1 + t_2 = 2 \quad t_2 = 2$$

$$t \geq 0 \Rightarrow t = 1, \quad t = 2$$

$$|x| = 1 \quad |x| = 2$$

$$x = \pm 1 \quad x = \pm 2$$

*Ответ:* ±1; ±2.

№2.

$$x^2 + 6x - 4|x+3| - 12 = 0$$

$$x^2 + 6x - 4|x+3| - 12 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 - 4|x+3| - 9 - 12 = 0$$

$$(x+3)^2 - 4|x+3| - 21 = 0$$

$$t = |x+3|, \quad t^2 = |x+3|^2 = (x+3)^2$$

$$t^2 - 4t - 21 = 0$$

$$t_1 + t_2 = 4 \quad t_1 = 7$$

$$t_1 \cdot t_2 = -21 \quad t_2 = -3$$

$$t \geq 0 \Rightarrow t = 7$$

$$|x+3| = 7$$

$$\begin{cases} x+3 = 7 \\ x+3 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -10 \end{cases}$$

*Ответ:* -10 и 4.

№3.

$$|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 5x - 9 = 6x + 15 \\ 3x^2 + 5x - 9 = -6x - 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - x - 24 = 0 \\ 3x^2 + 11x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$x = \left\{ -3; -\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}; 3 \right\}$$

*Ответ:* -3;  $-\frac{8}{3}$ ;  $-\frac{2}{3}$ ; 3

**№4.**

$$|x^4 + 6x^3 + 5x^2| = -x^4 - 6x^3 - 5x^2$$

$$1) -x^4 - 6x^3 - 5x^2 \geq 0 \cdot (-1)$$

$$x^4 + 6x^3 + 5x^2 \leq 0$$

$$x^2(x^2 + 6x + 5) \leq 0$$

$$x^2(x+1)(x+5) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x+1)(x+5) \leq 0 \end{cases}$$

$$x \in [-5; -1] \cup \{0\}$$

$$2) |x^4 + 6x^3 + 5x^2| = -x^2(x^2 + 6x + 5)$$

$$x^2|x^2 + 6x + 5| = -x^2(x^2 + 6x + 5)$$

$x=0$  является корнем уравнения

Т.к.  $x^2 + 6x + 5 \leq 0$ , то

$$|x^2 + 6x + 5| = -(x^2 + 6x + 5)$$

$$-(x^2 + 6x + 5) = -(x^2 + 6x + 5)$$

$$\underline{x \in R}$$

$$3) \begin{cases} x \in [-5; -1] \cup \{0\} \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-5; -1] \cup \{0\}$$

*Ответ:*  $[-5; -1] \cup \{0\}$ .

**№5.**

$$|x^4 - 4x^3 - 5x^2| = 45 + 36x - 9x^2$$

$$1) 45 + 36x - 9x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0$$

$$(x+1)(x-5) \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 5$$

$$2) x^2|x^2 - 4x - 5| = -9(x^2 - 4x - 5)$$

Т.к.  $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ , то

$$|x^2 - 4x - 5| = -(x^2 - 4x - 5)$$

$$-x^2(x^2 - 4x - 5) + 9(x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 9) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -3$$

С учетом, что  $-1 \leq x \leq 5$ , получим

$$\underline{x = -1} \quad \underline{x = 3} \quad \underline{x = 5}$$

*Ответ:-1; 3 и 5.*

**Вариант 1**

Решите уравнения:

№1.  $x^2 + |x| - 2 = 0$

№2.  $x^2 + \sqrt{x^2} - 12 = 0$

№3.  $2(x-3)^2 - 5|x-3| + 2 = 0$

№4.  $|x^4 - 5x^3 + 4x^2| = 20x - 4x^2 - 16$

№5.  $|x^4 - 9x^3 + 14x^2| = 9x^2 - 14x^2 - x^4$

№6.  $|x^2 - 5x + 4| = |x^2 - 4|$

**Вариант 2**

Решите уравнения:

№1.  $x^2 + \sqrt{x^2} - 30 = 0$

№2.  $5(2x-1)^2 - 7|2x-1| - 6 = 0$

№3.  $x^2 - 4x - 2|x-2| + 1 = 0$

№4.  $|x^4 - 6x^3 + 8x^2| = 54x - 9x^2 - 72$

№5.  $|x^4 - 7x^3 + 6x^2| = 7x^3 - 6x^2 - x^4$

№6.  $|x^2 - 8x + 5| = |x^2 - 5|$

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	$\pm 1$	$\pm 3$	$5; 1; 2,5 \text{ и } 3,5$	$1; 2 \text{ и } 4$	$\{0\} \cup [2; 7]$	$0; 1,6 \text{ и } 2,5$
Вар.2	$\pm 5$	$-0,5 \text{ и } 1,5$	$-1 \text{ и } 5$	$2; 3 \text{ и } 4$	$\{0\} \cup [1; 6]$	$0; 1,25 \text{ и } 4$

## Вариант 1

№1.

$$\begin{aligned}x^2 + |x| - 2 = 0 \\ t = |x|, \quad t^2 = |x|^2 = x^2 \\ t^2 + t - 2 = 0 \\ t_1 + t_2 = -1 \quad t_1 = -2 \\ t_1 \cdot t = -2 \quad t_2 = 1 \\ t \geq 0 \Leftrightarrow t = 1 \\ |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1\end{aligned}$$

**Ответ:**  $\pm 1$ .

№2.

$$\begin{aligned}x^2 + \sqrt{x^2} - 12 = 0 \\ x^2 + |x| - 12 = 0 \\ |x| = t, t \geq 0 \\ x^2 = |x|^2 = t^2 \\ t^2 + t - 12 = 0 \\ t_1 + t_2 = -1 \\ t_1 \cdot t_2 = -12 \\ t_1 = 3 \quad t_2 = -4 \quad (\text{не подходит, т.к. } t \geq 0) \\ |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3\end{aligned}$$

**Ответ:**  $\pm 3$ .

№3.

$$\begin{aligned}2(x-3)^2 - 5|x-3| + 2 = 0 \\ |x-3| = t, \quad t \geq 0 \\ |x-3|^2 = (x-3)^2 = t^2 \\ 2t^2 - 5t + 2 = 0, \quad t_1 = 2 \quad t_2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x-3| = 2 \\ |x-3| = -2 \\ x-3 = 2 \\ x-3 = -2 \\ x = 5 \\ x = 1\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}|x-3| = \frac{1}{2} \\ x-3 = \frac{1}{2} \\ x-3 = -\frac{1}{2} \\ x = 3,5 \\ x = 2,5\end{aligned}$$

**Ответ:** 5; 1; 3,5; 2,5.

№4.

$$\begin{aligned}|x^4 - 5x^3 + 4x^2| = 20x - 4x^2 - 16 \\ 1) 20x - 4x^2 - 16 \geq 0 : (-4) \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ (x-1)(x-4) \leq 0 \\ 1 \leq x \leq 4 \\ 2) x^2 |x^2 - 5x + 4| = -4(x^2 - 5x + 4) \\ \text{T.к. } x^2 - 5x + 4 \leq 0, \text{ то } |x^2 - 5x + 4| = -(x^2 - 5x + 4) \\ -x^2(x^2 - 5x + 4) = -4(x^2 - 5x + 4) \\ x^2(x^2 - 5x + 4) - 4(x^2 - 5x + 4) = 0 \\ (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 4) = 0 \\ x_1 = 1 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 2 \\ \text{С учетом, что } 1 \leq x \leq 4, \text{ получим} \\ x = 1 \quad x = 4 \quad x = 2\end{aligned}$$

**Ответ:** 1; 2; 4.

№5.

$$\begin{aligned}|x^4 - 9x^3 + 14x^2| = 9x^3 - 14x^2 - x^4 \\ 1) 9x^3 - 14x^2 - x^4 \geq 0 \\ x^2(x^2 - 9x + 14) \leq 0 \\ x^2(x-2)(x-7) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x-2)(x-7) \leq 0 \end{cases} \\ x \in \{0\} \cup [2; 7] \\ 2) x^2 |x^2 - 9x + 14| = -x^2(x^2 - 9x + 14) \\ x=0 \text{ является корнем уравнения} \\ |x^2 - 9x + 14| = -(x^2 - 9x + 14) \\ \text{T.к. } x^2 - 9x + 14 \leq 0, \text{ то } |x^2 - 9x + 14| = -(x^2 - 9x + 14) \\ \text{Получим уравнение} \\ -(x^2 - 9x + 14) = -(x^2 - 9x + 14), \quad x \in R \\ \text{С учетом (1), имеем } x \in \{0\} \cup [2; 7]\end{aligned}$$

**Ответ:**  $\{0\} \cup [2; 7]$ .

**№6.**

$$\begin{aligned} |x^2 - 5x + 4| &= |x^2 - 4| \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = x^2 - 4 \\ x^2 - 5x + 4 = -x^2 + 4 \end{cases} \\ \begin{cases} -5x = -8 \\ 2x^2 - 5x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1,6 \\ x = 0 \\ x = 2,5 \end{cases} \end{aligned}$$

*Ответ: 0; 1,6; 2,5.*

**Вариант 2**

**№1.**

$$x^2 + \sqrt{x^2} - 30 = 0$$

$$x^2 + |x| - 30 = 0$$

$$t = |x|, t \geq 0$$

$$t^2 = |x|^2 = x^2$$

$$t^2 + t - 30 = 0$$

$$t_1 + t_2 = -1 \quad t_1 = -6$$

$$t_1 \cdot t_2 = -30 \quad t_2 = 5$$

$$|x| = -6, \quad \emptyset$$

$$|x| = 5 \Leftrightarrow x = \pm 5$$

*Ответ: ±5.*

**№2.**

$$5(2x-1)^2 - 7|2x-1| - 6 = 0$$

$$|2x-1| = t, t \geq 0$$

$$t^2 = |2x-1|^2 = (2x-1)^2$$

$$5t^2 - 7t - 6 = 0$$

$$t = 2 \quad \text{или} \quad t = -0,6$$

$$|2x-1| = 2 \quad |2x-1| = -0,6$$

$$\begin{cases} 2x-1 = 2 \\ 2x-1 = -2 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$2x = 3$$

$$2x = -1$$

$$x = 1,5$$

$$x = -0,5$$

*Ответ: -0,5 и 1,5.*

**№3.**

$$x^2 - 4x - 2|x-2| + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x - 2|x-2| + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 2|x-2| - 4 + 1 = 0$$

$$(x-2)^2 - 2|x-2| - 3 = 0$$

$$t = |x-2|, \quad t^2 = (x-2)^2 = |x-2|^2$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t_1 + t_2 = 2 \quad t_1 = 3$$

$$t_1 \cdot t_2 = -3 \quad t_2 = -1$$

$$t \geq 0 \Rightarrow t = 3$$

$$|x-2| = 3$$

$$\begin{cases} x-2 = 3 \\ x-2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

*Ответ: -1 и 5.*

**№4.**

$$|x^4 - 6x^3 + 8x^2| = 54x - 9x^2 - 72$$

$$1) 54x - 9x^2 - 72 \geq 0 : (-9)$$

$$x^2 - 6x + 8 \leq 0$$

$$(x-2)(x-4) \leq 0$$

$$2 \leq x \leq 4$$

$$2) x^2 |x^2 - 6x + 8| = -9(x^2 - 6x + 8)$$

$$\text{Т.к. } x^2 - 6x + 8 \leq 0,$$

$$\text{то } |x^2 - 6x + 8| = -(x^2 - 6x + 8)$$

$$-x^2(x^2 - 6x + 8) + 9(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 9) = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -3$$

С учетом, что  $2 \leq x \leq 4$ , получим

$$x = 2 \quad x = 3 \quad x = 4$$

*Ответ: 2; 3 и 4.*

**№5.**

$$|x^4 - 7x^3 + 6x^2| = 7x^3 - 6x^2 - x^4$$

$$1) 7x^3 - 6x^2 - x^4 \geq 0$$

$$x^4 - 7x^3 + 6x^2 \leq 0$$

$$x^2(x^2 - 7x + 6) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x-1)(x-6) \leq 0 \end{cases}$$

$$x \in \{0\} \cup [1; 6]$$

$$2) x^2 |x^2 - 7x + 6| = -x^2(x^2 - 7x + 6)$$

$x = 0$  является корнем

$$|x^2 - 7x + 6| = -(x^2 - 7x + 6)$$

$$\text{Т.к. из (1) } x^2 - 7x + 6 \leq 0,$$

$$\text{то } |x^2 - 7x + 6| = -(x^2 - 7x + 6)$$

Получим уравнение

$$-(x^2 - 7x + 6) = -(x^2 - 7x + 6), x \in R$$

С учетом (1) имеем, что  $x \in \{0\} \cup [1; 6]$

*Ответ: {0} \cup [1; 6]*

**№6.**

$$|x^2 - 8x + 5| = |x^2 - 5|$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 5 = x^2 - 5 \\ x^2 - 8x + 5 = 5 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x = -10 \\ 2x^2 - 8x = 0 \end{cases}$$

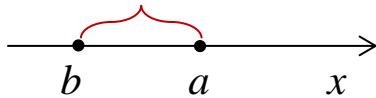
$$\begin{cases} x = 1,25 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

*Ответ: 0; 1,25 и 4.*

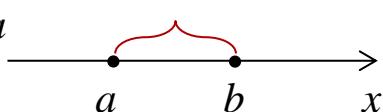
- ✓ Модуль - это расстояние между точками  $a$  и  $b$ .

$$|a-b| = \rho(a; b)$$

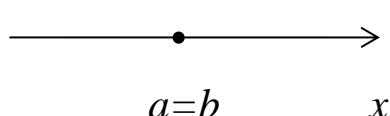
$$|a-b|=a-b, \text{ если } a>b$$



$$|a-b|=b-a, \text{ если } b>a$$



$$|a-b|=0, \text{ если } b=a$$



Т.к. расстояние - это геометрическая величина, и оно принимает только неотрицательные значения, то

$$|a-b| \geq 0$$

- ✓ Правило раскрытия модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Если подмодульное выражение больше или равно нулю, то модуль раскрываем со знаком «плюс»;

Если подмодульное выражение меньше нуля, то модуль раскрываем со знаком «минус».

- ✓ Некоторые свойства модуля

$$|x|^2 = x^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| = |-x|$$

$$|x| \geq 0$$

## ✓ Основные эквивалентности

1.

$$\boxed{|f(x)|=a} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad a>0 \quad} \\ f(x)=a \\ \left[ \begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad a=0 \quad} \\ f(x)=0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad a<0 \quad} \\ x \in \emptyset \end{array}$$

2.

$$\boxed{|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{cases}}$$

3.

$$\boxed{|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{cases} \end{cases}}$$

или

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ f(x)=-g(x) \end{cases} \end{cases}$$