Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

- ***Примеры*** Решите уравнения:

№1. $|x+1|+|x-5|=8$.

№2. $|x^2-4x|-|x-3|=7$.

№3. $|x^2-25|+|100-x^2|=75$.

№4. $\sqrt{(5x-3)^2}-\sqrt{(7x-4)^2}=2x-1$.

№5. $|x^2+x-20|+|x^2-11x+28|=2|x^2-5x+4|$.

№1.

$$|x+1|+|x-5|=8$$

Нули подмодульных выражений:

$x+1=0 \quad x-5=0$

$x=-1 \quad\quad x=5$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	-1	(2)	5	(3)
$(x+1)$	$-$		$+$		$+$
$(x-5)$	$-$		$-$		$+$

$$(1)\ \begin{cases} x\le -1 \\ -x-1-x+5=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ -2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$$

$$(2)\ \begin{cases} -1\le x\le 5 \\ x+1-x+5=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 5 \\ 6=8 \end{cases},\varnothing$$

$$(3)\ \begin{cases} x\ge 5 \\ x+1+x-5=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=6$$

Ответ: -2 и 6.

№2.

$$|x^2-4x|-|x-3|=7$$

Нули подмодульных выражений

$x^2-4x=0 \quad\quad x-3=0$

$x(x-4)=0 \quad\quad x=3$

$x=0$ или $x=4$

Знаки подмодульных выражений

	(1)	0	(2)	3	(3)	4	(4)
$x(x-4)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$(x-3)$	$-$		$-$		$+$		$+$

$$(1)\ \begin{cases} x\le 0 \\ x^2-4x+x-3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2-3x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x_1=5 \quad x_2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$$

$$(2)\ \begin{cases} 0<x\le 3 \\ -x^2+4x+x-3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\le 3 \\ -x^2+5x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\le 3 \\ x^2-5x+10=0, D<0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

$$(3)\ \begin{cases} 3<x\le 4 \\ -x^2+4x-x+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x\le 4 \\ -x^2+3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x\le 4 \\ x^2-3x+4=0, D<0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

$$(4)\ \begin{cases} x\ge 4 \\ x^2-4x-x+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x^2-5x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{41}}{2}$$

Ответ: $\left\{-2;\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}\right\}$

№3.

$$\left|x^2-25\right|+\left|100-x^2\right|=75$$

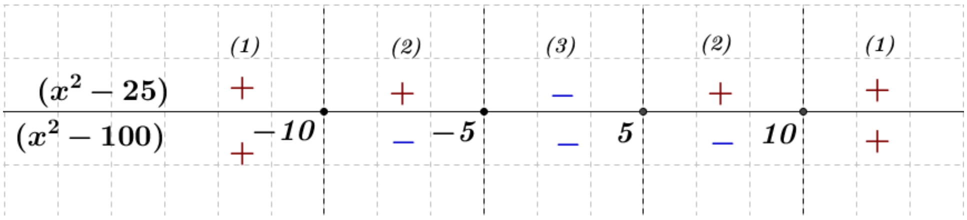
$$\left|x^2-25\right|+\left|x^2-100\right|=75$$

Нули подмодульный выражений:

$$x^2-25=0 \qquad x^2-100=0$$

$$x=\pm 5 \qquad\quad x=\pm 10$$

Знаки подмодульных выражений



1) $x\in(-\infty;-10]\cup[10;\infty),\quad x^2-25+x^2-100=75,\quad x^2=100$

$\underline{x=\pm 10}\in(-\infty;-10]\cup[10;\infty)$

2) $x\in(-10;-5)\cup(5;10),\quad x^2-25-x^2+100=75,\quad 75=75,\quad x\in R$

$\underline{x\in(-10;-5)\cup(5;10)}$

3) $x\in[-5;5],\quad -x^2+25-x^2+100=75,\quad x^2=25$

$\underline{x=\pm 5}\in[-5;5]$

В объединении

$$\left[\begin{array}{l} x=\pm 10 \\ x\in(-10;-5)\cup(5;10) \Leftrightarrow \underline{\underline{x\in[-10;-5]\cup[5;10]}} \\ x=\pm 5 \end{array}\right.$$

Ответ: $[-10;-5]\cup[5;10]$

№4.

$$\sqrt{(5x-3)^2}-\sqrt{(7x-4)^2}=2x-1$$

$$|5x-3|-|7x-4|=2x-1$$

Нули подмодульных выражений:

$5x-3=0 \qquad 7x-4=0$

$x=0,6 \qquad x=\frac{4}{7}\ (\approx 0,57)$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)		(2)		(3)
$(5x-3)$	$-$		$-$		$+$
$(7x-4)$	$-$	$\frac{4}{7}$	$+$	$0,6$	$+$

1) $\begin{cases} x\le\frac{4}{7} \\ -5x+3+7x-4=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le\frac{4}{7} \\ 2x-1=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\le\frac{4}{7}$

2) $\begin{cases} \frac{4}{7}<x<0,6 \\ -5x+3-7x+4=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{7}<x<0,6 \\ x=\frac{4}{7} \end{cases}, \varnothing$

3) $\begin{cases} x\ge 0,6 \\ 5x-3-7x+4=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0,6 \\ x=0,5 \end{cases}, \varnothing$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{4}{7}\right]$

№5.

$$|x^2+x-20|+|x^2-11x+28|=2|x^2-5x+4|$$

Пусть $a=x^2+x-20,\ b=x^2-11x+28,$

тогда $a+b=x^2+x-20+x^2-11x+28=2x^2-10x+8=2\left(x^2-5x+4\right).$

Уравнение примет вид: $|a|+|b|=|a+b| \quad (1).$

По свойству модулей $\quad |a+b|\le|a|+|b|.$

Равенство (1) будет верным, если a и b одного знака, т.е. $ab\ge 0.$

$$\left(x^2+x-20\right)\left(x^2-11x+28\right)\ge 0$$

$$(x-4)(x+5)(x-7)(x-4)\ge 0$$

$$x\in(-\infty;-5]\cup\{4\}\cup[7;\infty)$$

Ответ: $(-\infty;-5]\cup\{4\}\cup[7;\infty)$

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $|x-1|+|x+7|=12$

№2. $\sqrt{x^2-4x+4}=|2x+2|+1$

№3. $2|x^2+4x|-|x-5|+5=0$

№4. $3|1-x|-x-12=|2x+3|$

№5. $|x^2+3x-4|+|x^2+3x-28|=24$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $|x+3|+|x-1|=10$

№2. $\sqrt{4x^2+4x+1}-3=|x-2|$

№3. $|x^2-64|+|169-x^2|=105$

№4. $|5-2x|+|x+3|=2-3x$

№5. $|x^2-16|+|x+4|=x^2+x-12$

- ***Ответы (тест)*** Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	*-9 и 3*	*-3 и -1/3*	*-4,5; -3,5 и 0*	*-3*	$[-7;-4]\cup[1;4]$
Вар.2	*-6 и 4*	*-6 и 4/3*	$[-13;-8]\cup[8;13]$	$(-\infty;-3]\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}$	$\{-4\}\cup[4;\infty)$

- ***Решение (тест)*** Методы решения целых уравнений с несколькими модулями

Вариант 1

№1.

$$|x-1|+|x+7|=12$$

Нули подмодульных выражений:

$x-1=0 \quad x+7=0$

$x=1 \qquad x=-7$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	−7	(2)	1	(3)
$(x-1)$	−		−		+
$(x+7)$	−		+		+

$$(1)\ \begin{cases} x\le -7 \\ -x+1-x-7=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -7 \\ x=-9 \end{cases} \Leftrightarrow x=-9$$

$$(2)\ \begin{cases} -7\le x\le 1 \\ -x+1+x+7=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7\le x\le 1 \\ 0\cdot x=4 \end{cases},\varnothing$$

$$(3)\ \begin{cases} x\ge 1 \\ x-1+x+7=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Ответ: -9 и 3.

№2.

$$\sqrt{x^2-4x+4}=|2x+2|+1$$

$\sqrt{(x-2)^2}=|2x+2|+1$

$|x-2|=|2x+2|+1$

Нули подмодульных выражений:

$x-2=0 \quad 2x+2=0$

$x=2 \qquad x=-1$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	−1	(2)	2	(3)
$(x-2)$	−		−		+
$(2x+2)$	−		+		+

$$1)\ \begin{cases} x\le -1 \\ -x+2=-2x-2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x=-3}$$

$$2)\ \begin{cases} -1<x<2 \\ -x+2=2x+2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x=-\frac{1}{3}}$$

$$3)\ \begin{cases} x\ge 2 \\ x-2=2x+2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x=-5 \end{cases},\varnothing$$

Ответ: -3 и -1/3.

№3.

$$2\left|x^2+4x\right|-\left|x-5\right|+5=0$$

Нули подмодульных выражений:

$x^2+4x=0 \qquad x-5=0$

$x=0 \quad x=-4 \qquad x=5$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	-4	(2)	0	(3)	5	(4)
$x(x+4)$	+		−		+		+
$(x-5)$	−		−		−		+

1) $x\in(-\infty;-4]\cup[0;5]$

$2\left(x^2+4x\right)+x-5+5=0,\quad x(2x+9)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=-4{,}5 \\ x=0 \end{array}\right. \in(-\infty;-4]\cup[0;5]$$

2) $x\in[-4;0]$

$-2\left(x^2+4x\right)+(x-5)+5=0,\ \ x(2x+7)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3{,}5 \end{array}\right. \in[-4;0]$$

3) $x\in[5;\infty)$

$2\left(x^2+4x\right)-(x-5)+5=0,\ \ 2x^2+7x+10=0$

$D<0,\ \varnothing$

Ответ: -4,5; -3,5 и 0.

№4.

$$3\left|1-x\right|-x-12=\left|2x+3\right|$$

$3\left|x-1\right|-x-12=\left|2x+3\right|$

Нули подмодульных выражений:

$x-1=0 \qquad 2x+3=0$

$x=1 \qquad x=-1{,}5$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	$-1,5$	(2)	1	(3)
$(x-1)$	−		−		+
$(2x+3)$	−		+		+

1) $x\le-1{,}5$

$-3(x-1)-x-12=-(2x+3)$

$\underline{x=-3}\in(-\infty;-1{,}5]$

2) $-1{,}5\le x\le1$

$-3(x-1)-x-12=2x+3$

$x=-2\notin[-1{,}5;1]$

3) $x\ge1$

$3(x-1)-x-12=2x+3$

$-18=0,$

$x\in\varnothing$

***Ответ*: -3.**

№5.

$$\left|x^2+3x-4\right|+\left|x^2+3x-28\right|=24$$

Пусть $a=x^2+3x-4,\ b=x^2+3x-28$

$$a-b=x^2+3x-4-x^2-3x+28=24$$

Уравнение примет вид: $|a|+|b|=|a-b|$

Равенство будет, если a и b разных знаков.

$$a\cdot b\le0$$

$$\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+3x-28\right)\le0$$

$$(x-1)(x+4)(x-4)(x+7)\le0$$

$$x\in[-7;-4]\cup[1;4]$$

Ответ: $[-7;-4]\cup[1;4]$

Вариант 2

№1.

$$|x+3|+|x-1|=10$$

Нули подмодульных выражений:

$x+3=0 \qquad x-1=0$

$x=-3 \qquad\quad x=1$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	-3	(2)	1	(3)
$(x+3)$	$-$		$+$		$+$
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$

1) $x \le -3$

$-(x+3)-(x-1)=10$

$\underline{x=-6} \in (-\infty;-3]$

2) $-3 \le x \le 1$

$x+3-(x-1)=10$

$4=10, \quad \varnothing$

3) $x \ge 1$

$x+3+x-1=10$

$\underline{x=4} \in [1;\infty)$

Ответ: -6 и 4.

№2.

$$\sqrt{4x^2+4x+1}-3=|x-2|$$

$\sqrt{(2x+1)^2}-3=|x-2|$

$|2x+1|-3=|x-2|$

Нули подмодульных выражений:

$2x+1=0 \qquad x-2=0$

$x=-0,5 \qquad\ x=2$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	$-0,5$	(2)	2	(3)
$(2x+1)$	$-$		$+$		$+$
$(x-2)$	$-$		$-$		$+$

1) $x \le -0,5$

$-2x-1-3=-x+2$

$\underline{x=-6} \in (-\infty;-0,5]$

2) $-0,5 \le x \le 2$

$2x+1-3=-x+2$

$\underline{x=\frac{4}{3}} \in [-0,5;2]$

3) $x \ge 2$

$2x+1-3=x-2$

$x=0 \notin [2;\infty)$

Ответ: -6 и 4/3.

№3.

$$\left|x^2-64\right|+\left|169-x^2\right|=105$$

$$\left|x^2-64\right|+\left|x^2-169\right|=105$$

Нули подмодульных выражений:

$x^2-64=0 \qquad x^2-169=0$

$x=\pm 8 \qquad x=\pm 13$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	-13	(2)	-8	(3)	8	(2)	13	(1)
(x^2-64)	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$
(x^2-169)	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$

1) $x\in(-\infty;-13]\cup[13;\infty)$

$x^2-64+x^2-169=105$

$x^2=169$

$\underline{x=\pm 13}\in(-\infty;-13]\cup[13;\infty)$

2) $x\in(-13;-8)\cup(8;13)$

$x^2-64-x^2+169=105$

$105=105$

$x\in R$

$\underline{x\in(-13;-8)\cup(8;13)}$

3) $x\in[-8;8]$

$-x^2+64-x^2+169=105$

$x^2=64$

$\underline{x=\pm 8}\in[-8;8]$

В объединении

$$\left[\begin{array}{l} x=\pm 13 \\ x\in(-13;-8)\cup(8;13) \\ x=\pm 8 \end{array}\right.$$

$\underline{x\in[-13;-8]\cup[8;13]}$

Ответ: $[-13;-8]\cup[8;13]$

№4.

$$\left|5-2x\right|+\left|x+3\right|=2-3x$$

$$\left|2x-5\right|+\left|x+3\right|=2-3x$$

Нули подмодульных выражений:

$2x-5=0 \qquad x+3=0$

$x=0,4 \qquad x=-3$

Знаки подмодульных выражений:

	(1)	-3	(2)	$0,4$	(3)
$(2x-5)$	$-$		$-$		$+$
$(x+3)$	$-$		$+$		$+$

1) $x\le -3$

$-2x+5-x-3=2-3x$

$2=2\Rightarrow \underline{x\in(-\infty;-3]}$

2) $-3\le x\le 0,4$

$-2x+5+x+3=2-3x$

$\underline{x=-3}\in[-3;0,4]$

3) $x\ge 0,4$

$2x-5+x+3=2-3x$

$\underline{x=\frac{2}{3}}\in[0,4;\infty)$

В объединении

$$\left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;-3] \\ x=-3 \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \underline{\underline{x\in(-\infty;-3]\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}}}$$

Ответ: $(-\infty;-3]\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}$

№5.

$$\left|x^2-16\right|+\left|x+4\right|=x^2+x-12$$

Пусть $a=x^2-16,\ b=x+4,$ тогда

$a+b=x^2-16+x+4=x^2+x-12$

Уравнение примет вид: $|a|+|b|=|a+b|$.

Равенство будет выполняться, если

a и b одного знака, т.е. $a\cdot b\geq 0$.

$$\left(x^2-16\right)\left(x+4\right)\geq 0$$

$$\left(x-4\right)\left(x+4\right)^2\geq 0$$

$$\underline{\underline{x\in\{-4\}\cup[4;\infty)}}$$

Ответ: $\{-4\}\cup[4;\infty)$

Правило раскрытия модуля

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

Если подмодульное выражение больше или равно нулю, то модуль раскрываем со знаком «плюс»;

Если подмодульное выражение меньше нуля, то модуль раскрываем со знаком «минус».

Некоторые свойства модуля

$$|x|\ge 0$$
$$|x|^2=x^2$$
$$\sqrt{x^2}=|x|$$
$$|x|=|-x|$$
$$|x+y|\le |x|+|y|$$

Основные эквивалентности

1.

$$\boxed{|f(x)|=a}$$

$\underline{a>0}$: $\left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{array}\right.$

$\underline{a=0}$: $f(x)=0$

$\underline{a<0}$: $x\in\varnothing$

2.

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$$

3.

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

или

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ f(x)=-g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$