Линейные уравнения с параметром

▪ *Примеры*

№1. При каком значении *a* уравнение $a^2x+1=x+a^3$ имеет бесконечное множество решений?

№2. При каком значении *a* уравнение $4x-3a=a^2x-6$ не имеет решений?

№3. Для каждого значения *a* решите уравнение $\left(a^2-9\right)x=a+3$.

▪ *Решение (примеры)* Линейные уравнения с параметром

№1. **При каком значении *a* уравнение $a^2x+1=x+a^3$ имеет бесконечное множество решений?**

Решение:

Разрешим уравнение относительно x.

$$x\left(a^2-1\right)=a^3-1$$

$$x(a-1)(a+1)=a^3-1.$$

Чтобы уравнение имело бесконечное множество решений, необходимо выполнить следующие условия: $\begin{cases}(a-1)(a+1)=0\\ a^3-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-1\end{array}\right.\\ a=1\end{cases} \Leftrightarrow a=1.$

Ответ:1

№2. **При каком значении *a* уравнение $4x-3a=a^2x-6$ не имеет решений?**

Решение:

$$4x-3a=a^2x-6$$
$$4x-a^2x=3a-6$$
$$x\left(4-a^2\right)=3(a-2)$$
$$x(a-2)(a+2)=-3(a-2)$$

Уравнение не имеет решений, если

$$\begin{cases}(a-2)(a+2)=0\\ a-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2,\ a=-2\\ a\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow a=-2$$

Ответ: -2.

№3. **Для каждого значения *a* решите уравнение $\left(a^2-9\right)x=a+3.$**

Решение:

$$\left(a^2-9\right)x=a+3$$
$$(a-3)(a+3)x=a+3$$

1) Если $(a-3)(a+3)\neq 0$

$a\neq 3,\ a\neq -3$ уравнение имеет единственное решение

$$x=\frac{a+3}{(a+3)(a-3)}$$

$x=\dfrac{1}{a-3}$ при $a\neq 3,\ a\neq -3$

2) Если $\begin{cases}(a-3)(a+3)=0\\ a+3\neq 0\end{cases}$ уравнение не имеет решений

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=3\\ a=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow a=3\\ a\neq -3\end{cases}$$

3) Если $\begin{cases}(a-3)(a+3)=0\\ a+3=0\end{cases}$ уравнение имеет бесконечное множество решений

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=3\\ a=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow a=-3\\ a=-3\end{cases}$$

Ответ: 1) при $a\neq 3,\ a\neq -3$ единственное решение $x=\dfrac{1}{a-3}$;

2) при $a=3$ нет решений;

3) при $a=-3$ бесконечное множество решений.

Вариант 1

№1. При каком значении a уравнение $(a^2+a)x-2=a+(a+4)x$ имеет бесконечное множество решений?

№2. Для каждого значения a решите уравнение $(a^2-25)x=a+5$.

№3. При каких значениях a уравнение не имеет решений $(3x-a)^2+(4x+1)^2=(5x-1)^2$.

№4. Найти значения a, при которых равенство $\frac{8x-35a-3}{15a}=\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{5a}\right)(x-1)+\frac{x}{3}$ верно при любых значениях x.

№5. При каких значениях параметра *b* уравнение $9x+b^2-(2-\sqrt{3})b-2\sqrt{3}=b^4x-b^2(b+\sqrt{3})$ имеет бесконечно много корней.

Вариант 2

№1. При каком значении a уравнение $x=\frac{a-9}{10}x+25$ не имеет решений?

№2. Для каждого значения a решите уравнение $(a-5)(a+3)x=a^2-25$.

№3. При каких значениях a уравнение не имеет решений $(2x-3a)^2+(x-1)^2=5(x-2)(x+2)$.

№4. Найти все значения a, при которых равенство $\frac{a(2x-7)-8x-35}{5+a}=\frac{x-21}{3}$ верно для всех x.

№5. При каком значении параметра a уравнение $(x-13)(x-14)(x-15)=(x-a)(x^2-28x+195)$ имеет больше десяти решений?

Вариант 3

№1. Найти значения a, при которых равенство $\frac{a-1}{5}x-\frac{2}{5}=\frac{6}{a+6}x-\frac{a}{a+6}$ имеет место при любом значении x.

№2. При каком значении параметра a уравнение $(a-1)(a+6)x-2(a+6)=30x-5a$ не имеет решений?

№3. Для каждого значения a решите уравнение $(a-7)(a+5)x=a^2-49$.

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	*-2*	1) $a \neq 5,\ a \neq -5,\ x = \dfrac{1}{a-5}$ 2) $a = 5,\ x \in \varnothing$ 3) $a = -5,\ x \in \mathbb{R}$	*3*	*0,125*	$-\sqrt{3}$
Вар.2	*19*	1) $a \neq 5, a \neq -3, x = \dfrac{a+5}{a+3}$ 2) $a = -3,\ x \in \varnothing$ 3) $a = 5,\ x \in \mathbb{R}$	*-1/6*	*5,8*	*14*
Вар.3	*4*	*-9*	1) $a \neq 7,\ a \neq -5,\ x = \dfrac{a+7}{a+5}$ 2) $a = -5,\ x \in \varnothing$ 3) $a = 7,\ x \in \mathbb{R}$		

Вариант 1

№1. **При каком значении** a **уравнение** $\left(a^2+a\right)x-2=a+(a+4)x$ **имеет бесконечное множество решений?**

Решение:

$$\left(a^2+a\right)x-2=a+(a+4)x$$
$$\left(a^2+a\right)x-(a+4)x=a+2$$
$$x\left(a^2+a-a-4\right)=a+2$$
$$x\left(a^2-4\right)=a+2$$
$$x(a-2)(a+2)=a+2$$

Уравнение имеет бесконечное множество решений, если

$$\begin{cases}(a-2)(a+2)=0\\ a+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2,\ a=-2\\ a=-2\end{cases} \Leftrightarrow a=-2$$

***Ответ:* -2.**

№2. **Для каждого значения a решите уравнение $(a^2-25)x=a+5$.**

Решение:

$$(a^2-25)x=a+5$$

$$(a-5)(a+5)x=a+5$$

1) При $(a-5)(a+5)\neq 0,\ a\neq 5$ и $a\neq -5$ единственное решение $x=\dfrac{1}{a-5}$

2) При $\begin{cases}(a-5)(a+5)=0\\ a+5\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5, a=-5\\ a\neq -5\end{cases}\Leftrightarrow a=5,$ нет решений

3) При $\begin{cases}(a-5)(a+5)=0\\ a+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5,\ a=-5\\ a=-5\end{cases}\Leftrightarrow a=-5,$ бесконечное множество решений

Ответ: 1) $a\neq 5,\ a\neq -5,\ x=\dfrac{1}{a-5}$ 2) $a=5,\ x\in\varnothing$ 3) $a=-5,\ x\in\mathbb{R}$.

№3. **При каких значениях a уравнение не имеет решений $(3x-a)^2+(4x+1)^2=(5x-1)^2$.**

Решение:

$$(3x-a)^2+(4x+1)^2=(5x-1)^2$$

$$9x^2-6xa+a^2+16x^2+8x+1=25x^2-10x+1$$

$$-6ax+8x+10x=-a^2$$

$$x(18-6a)=-a^2$$

$$x=\frac{a^2}{6a-18}$$

$$x=\frac{a^2}{6(a-3)}$$

Если $a=3$, то уравнение не имеет решений.

Ответ: 3.

№4. **Найти значения a, при которых равенство $\dfrac{8x-35a-3}{15a}=\left(\dfrac{7}{3}+\dfrac{1}{5a}\right)(x-1)+\dfrac{x}{3}$ верно при любых значениях x.**

Решение:

$$\frac{8x-35a-3}{15a}=\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{5a}\right)(x-1)+\frac{x}{3}$$

$$\frac{8x-35a-3}{15a}=\frac{(35a+3)(x-1)}{15a}+\frac{x}{3}\quad\Bigg|\cdot 15a\neq 0,\ a\neq 0$$

$$8x-35a-3=(35a+3)x-35a-3+5ax$$

$$8x-(35a+3)x-5ax=0$$

$$x(8-35a-3-5a)=0$$

$$x(5-40a)=0$$

Равенство верно при любых x, если $5-40a=0,\ \ a=\dfrac{1}{8},\ a=0{,}125$

Ответ: 0,125.

№5. **При каких значениях параметра b уравнение $9x+b^2-\left(2-\sqrt{3}\right)b-2\sqrt{3}=b^4x-b^2\left(b+\sqrt{3}\right)$ имеет бесконечно много корней.**

Решение:

$$9x+b^2-\left(2-\sqrt{3}\right)b-2\sqrt{3}=b^4\cdot x-b^2\left(b+\sqrt{3}\right)$$

$$x\left(9-b^4\right)=2\sqrt{3}+\left(2-\sqrt{3}\right)b-b^2-b^2\left(b+\sqrt{3}\right)$$

$$x\left(9-b^4\right)=2\sqrt{3}+2b-\sqrt{3}b-b^2-b^3-b^2\sqrt{3}$$

$$x\left(9-b^4\right)=2\left(b+\sqrt{3}\right)-b\left(\sqrt{3}+b\right)-b^2\left(b+\sqrt{3}\right)$$

$$x\left(9-b^4\right)=\left(b+\sqrt{3}\right)\left(2-b-b^2\right)$$

$$\left(b^4-9\right)x=\left(b+\sqrt{3}\right)\left(b^2+b-2\right)$$

Уравнение имеет бесконечно много корней, если

$$\begin{cases}b^4-9=0\\ \left(b+\sqrt{3}\right)\left(b^2+b-2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^4=9\\ \left[\begin{array}{l}b=-\sqrt{3}\\ b=-2\\ b=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}b=\sqrt{3}\\ b=-\sqrt{3}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}b=-\sqrt{3}\\ b=-2\\ b=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow b=-\sqrt{3}$$

Ответ: $-\sqrt{3}$.

Вариант 2

№1. **При каком значении a уравнение $x=\dfrac{a-9}{10}x+25$ не имеет решений?**

Решение:

$$x=\frac{a-9}{10}x+25\quad\Big|\cdot 10$$

$$10x=\left(a-9\right)x+250$$

$$10x+9x-ax=250$$

$$x\left(19-a\right)=250$$

$$x=\frac{250}{19-a}\quad \text{при } a=19 \text{ уравнение не имеет корней}$$

Ответ: ***19***.

№2. **Для каждого значения a решите уравнение $(a-5)(a+3)x=a^2-25$.**

Решение:

$$(a-5)(a+3)x=a^2-25$$
$$(a-5)(a+3)x=(a-5)(a+5)$$

1) При $(a-5)(a+3)\neq 0,\ a\neq 5$ и $a\neq -3$ уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{a+5}{a+3}$;

2) При $\begin{cases}(a-5)(a+3)=0\\(a-5)(a+5)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5, a=-3\\a\neq 5, a\neq -5\end{cases}\Leftrightarrow a=-3$ нет решений;

3) При $\begin{cases}(a-5)(a+3)=0\\(a-5)(a+5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5, a=-3\\a=5, a=-5\end{cases}\Leftrightarrow a=5$ бесконечное множество решений.

Ответ: 1) $a\neq 5, a\neq -3, x=\dfrac{a+5}{a+3}$ 2) $a=-3,\ x\in\varnothing$ 3) $a=5,\ x\in\mathbb{R}$.

№3. **При каких значениях a уравнение не имеет решений $(2x-3a)^2+(x-1)^2=5(x-2)(x+2)$.**

Решение:

$$4x^2-12ax+9a^2+x^2-2x+1=5x^2-20$$
$$x(-12a-2)=-9a^2-21$$
$$x=\frac{9a^2+21}{12a+2},\quad x=\frac{9a^2+21}{2(6a+1)}$$

При $6a+1=0,\ a=-\dfrac{1}{6}$ уравнение не имеет корней.

Ответ: -1/6.

№4. **Найти все значения a, при которых равенство $\dfrac{a(2x-7)-8x-35}{5+a}=\dfrac{x-21}{3}$ верно для всех x.**

Решение:

$$\frac{a(2a-7)-8x-35}{5+a}=\frac{x-21}{3}\quad\Big|\cdot 3(5+a)\neq 0,\ a\neq -5$$
$$3\big(a(2x-7)-8x-35\big)=(5+a)(x-21)$$
$$3a(2x-7)-24x-105=5x-105+ax-21a$$
$$6ax-21a-24x-105-5x+105-ax+21a=0$$
$$x(5a-29)=0$$

Равенство верно при любых x, если $5a-29=0,\ a=5{,}8$

Ответ: 5,8.

№5. **При каком значении параметра a уравнение $(x-13)(x-14)(x-15)=(x-a)(x^2-28x+195)$ имеет больше десяти решений?**

Решение:

$$(x-13)(x-14)(x-15)=(x-a)(x^2-28x+195)$$
$$(x-13)(x-15)(x-14-x+a)=0$$
$$(x-13)(x-15)(a-14)=0$$

Уравнение имеет больше десяти решений, т.е. бесконечное множество при $a=14$

Ответ: 14.

Вариант 3

№1. **Найти значения a, при которых равенство $\frac{a-1}{5}x-\frac{2}{5}=\frac{6}{a+6}x-\frac{a}{a+6}$ имеет место при любом значении x.**

Решение:

$$\frac{a-1}{5}\cdot x-\frac{2}{5}=\frac{6}{a+6}\cdot x-\frac{a}{a+6}$$
$$\frac{x(a-1)-2}{5}=\frac{6x-a}{a+6}\quad\Big|\cdot 5(a+6)\neq 0,\ a\neq -6$$
$$x(a-1)(a+6)-2(a+6)=5(6x-a)$$
$$x(a^2+5a-6)-5\cdot 6x=2(a+6)-5a$$
$$x(a^2+5a-6-30)=-3a+12$$
$$x(a^2+5a-36)=-3(a-4)$$
$$x(a+9)(a-4)=-3(a-4)$$

Равенство имеет место при любом значении x, если

$$\begin{cases}(a+9)(a-4)=0\\(a-4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-9,\ \ a=4\\a=4\end{cases}\Leftrightarrow a=4$$

Ответ: 4.

№2. **При каком значении параметра a уравнение $(a-1)(a+6)x-2(a+6)=30x-5a$ не имеет решений?**

Решение:

$$(a-1)(a+6)x-2(a+6)=30x-5a$$
$$x(a^2+5a-6)-30x=2a+12-5a$$
$$x(a^2+5a-36)=12-3a$$
$$x(a+9)(a-4)=-3(a-4)$$

Уравнение не имеет решениё при

$$\begin{cases}(a+9)(a-4)=0\\a-4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-9,\ a=4\\a\neq 4\end{cases}\Leftrightarrow a=-9$$

Ответ: -9.

№3. **Для каждого значения a решите уравнение** $(a-7)(a+5)x=a^2-49$.

Решение:

$$(a-7)(a+5)x=a^2-49$$

$$(a-7)(a+5)x=(a-7)(a+7)$$

1) $(a-7)(a+5)\neq 0$, единственное решение

$x=\dfrac{a+7}{a+5}$, $a\neq 7$, $a\neq -5$

2) $\begin{cases}(a-7)(a+5)=0\\(a-7)(a+7)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7, a=-5\\a\neq 7, a\neq -7\end{cases}\Leftrightarrow a=-5$, нет решений

3) $\begin{cases}(a-7)(a+5)=0\\(a-7)(a+7)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7, a=-5\\a=7, a=-7\end{cases}\Leftrightarrow a=7$, бесконечное множество решений

Ответ: 1) $a\neq 7,\ a\neq -5,\ x=\dfrac{a+7}{a+5}$ 2) $a=-5,\ x\in\varnothing$ 3) $a=7,\ x\in\mathbb{R}$.

Справочные материалы

✓ *Уравнение вида $ax+b=0$, где a и b - некоторые постоянные, называется* ***линейным уравнением.***

Количество корней линейного уравнения

Один корень	Нет корней	Бесконечное множество корней
$a\neq 0$ и b - *любое число*	$a=0$ и $b\neq 0$	$a=0$ и $b=0$
$x=-\dfrac{b}{a}$	$0\cdot x=-b$ $x\in\varnothing$	$0\cdot x=0$ $x\in\mathbb{R}$