Квадратные и, сводящиеся к ним, уравнения с параметром

▪ *Примеры*

№1. Найти все значения параметра p, при которых произведение корней уравнения $px^2+14x+p^3-13p^2=0$ равно 14, а их сумма является целым числом.

№2. Пусть x_1 - меньший корень, а x_2 - больший корни уравнения $x^2-10x+\frac{25}{49}p^2=0$. Найти все значения параметра p, при которых три числа x_1, $|p-6|$, x_2 в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.

№3. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4+10(a-10)x^2+9(2a+5)^2=0$ являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии?

№4. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $x^2-9x+t=0$, а x_3, x_4 - корни уравнения $x^2-81x+s=0$. При каких значениях параметра t и s четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 образуют геометрическую прогрессию с положительными членами? В ответе указать отношение s/t.

№5. Найти все значения параметра p, при которых расстояние между корнями уравнения $x^2+\left(\sqrt{p+19}-\frac{1}{\sqrt{p+19}}\right)x-1=0$ превышает число 2.

№6. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $|p|x^2-192x+144p=0$ имеет различные корни, принадлежащие промежутку $(-12;24]$.

№7. При каких значениях a уравнение $x^2-(4a-6)|x|+3a^2-6a=0$ имеет четыре различных решения?

№1. Найти все значения параметра p, при которых произведение корней уравнения $px^2+14x+p^3-13p^2=0$ равно 14, а их сумма является целым числом.

Решение:
При $p=0$ уравнение примет вид $14x=0$, которое имеет единственный корень $x=0$, что не удовлетворяет условию.
При $p\neq 0$ квадратное уравнение будет иметь корни, если $D\geq 0$. Найдем дискриминант этого уравнения.

$$D/4=49-p\left(p^3-13p^2\right)=49-p^3\left(p-13\right)\geq 0.$$

$$px^2+14x+p^3-13p^2=0 \quad \Big| :p$$

$$x^2+\frac{14}{p}x+p^2-13p=0$$

По формулам Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{14}{p} \\ x_1\cdot x_2=p^2-13p \end{cases}$$

По условию произведение корней равно 14, тогда $p^2-13p=14,\ \ p^2-13p-14=0,\ \ p_1=14,\ \ p_2=-1$.
Найденные значения p удовлетворяют условию, что сумма корней является целым числом.
Проверим значение дискриминанта при таких p.

Если $p=14$, то $D=49-14^3\cdot(14-13)<0$, уравнение корней не имеет.

Если $p=-1$, то $D=49-(-1)^3(-1-13)=49-14=35>0$, уравнение имеет два различных корня.

Ответ: -1.

№2. Пусть x_1 - меньший корень, а x_2 - больший корни уравнения $x^2-10x+\frac{25}{49}p^2=0$. Найти все значения параметра p, при которых три числа x_1, $|p-6|$, x_2 в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.

Решение:
Квадратное уравнение имеет различные корни, если $D>0$.

$$D/4=25-\frac{25}{49}p^2>0,\ \ 49-p^2>0,\ \ p\in(-7;7).$$

По формулам Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=10 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{25}{49}p^2 \end{cases}.$$

По свойству членов арифметической прогрессии имеем $|p-6|=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, тогда

$$|p-6|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p-6=5 \\ p-6=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=11\notin(-7;7) \\ p=1\in(-7;7) \end{array}\right. \Rightarrow p=1.$$

Ответ: 1.

№3. **При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4+10(a-10)x^2+9(2a+5)^2=0$ являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии?**

Решение:

$x_1, x_2, x_3, x_4 \uparrow$ арифметическая прогрессия

$x^2=t>0,\ \ t^2+10(a-10)t+9(2a+5)^2=0$

$$D/4=25(a-10)^2-9(2a+5)^2=\big(5(a-10)-3(2a+5)\big)\big(5(a-10)+3(2a+5)\big)=-(a+65)\left(a-\frac{35}{11}\right)$$

$$-(a+65)\left(a-\frac{35}{11}\right)>0 \Leftrightarrow a\in\left(-65;\frac{35}{11}\right)$$

$$\begin{matrix} t_1=u>0 \\ t_2=v>0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} u=x^2 \\ v=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm\sqrt{u} \\ x_{3,4}=\pm\sqrt{v} \end{cases}$$

Пусть $u>v>0$, тогда $-\sqrt{u};-\sqrt{v};\sqrt{v};\sqrt{u}$ – арифметическая прогрессия

По свойству членов арифметической прогрессии: $-\sqrt{v}=\dfrac{-\sqrt{u}+\sqrt{v}}{2};\ \ \sqrt{u}=3\sqrt{v};\ \ u=9v$

$$\begin{cases} u+v=-10a+100 \\ u\cdot v=9(2a+5)^2 \end{cases}$$

1) $u+v=-10a+100,\ \ 9v+v=-10a+100,\ \ v=-a+10$

2) $u\cdot v=9(2a+5)^2;\ \ 9v^2=9(2a+5)^2;\ \ (10-a)^2=(2a+5)^2$

$$\left[\begin{matrix} 10-a=2a+5 \\ a-10=2a+5 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} a=\dfrac{5}{3}\in\left(-65;\dfrac{35}{11}\right) \\ a=-15\in\left(-65;\dfrac{35}{11}\right) \end{matrix}\right.$$

Ответ: -15 и 5/3.

№4. **Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $x^2-9x+t=0$, а x_3, x_4 - корни уравнения $x^2-81x+s=0$. При каких значениях параметра t и s четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 образуют геометрическую прогрессию с положительными членами? В ответе указать отношение s/t.**

Решение:

По условию x_1, x_2, x_3, x_4 - положительные члены геометрической прогрессии со знаменателем $q>0$.

По формулам Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=9 \\ x_1\cdot x_2=t \\ x_3+x_4=81 \\ x_3\cdot x_4=s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_1q=9 \\ x_1\cdot x_1q=t \\ x_3+x_3q=81 \\ x_3\cdot x_3q=s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(1+q)=9 \\ x_1^2q=t \\ x_3(1+q)=81 \\ x_3^2q=s \end{cases}$$

$$\frac{x_3}{x_1}=\frac{81}{9},\ \ \frac{x_1q^2}{x_1}=9,\ \ q^2=9,\ \ q=3\ \ (q>0).$$

$$x_1(1+q)=9,\ \ x_1(1+3)=9,\ \ x_1=\frac{9}{4}$$

$$x_1^2q=t,\ \ \left(\frac{9}{4}\right)^2\cdot 3=t,\ \ t=\frac{243}{16}\qquad x_3^2q=s,\ \ \left(x_1q^2\right)^2\cdot 3=s,\ \ \frac{81}{16}\cdot 3^5=s$$

$$\frac{s}{t}=\frac{81\cdot 3^5}{16}:\frac{81\cdot 3}{16}=81$$

Ответ: 81.

№5. Найти все значения параметра p, при которых расстояние между корнями уравнения $x^2+\left(\sqrt{p+19}-\frac{1}{\sqrt{p+19}}\right)x-1=0$ **превышает число 2.**

Решение:
Квадратное уравнение имеет различные корни, если $D>0$.

$$D=\left(\sqrt{p+19}-\frac{1}{\sqrt{p+19}}\right)^2+4>0 \text{ при всех } p>-19.$$

Расстояние между корнями превышает число 2, значит, $|x_1-x_2|>2$.
По формулам Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{1}{\sqrt{p+19}}-\sqrt{p+19} \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x_1+x_2)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{p+19}}-\sqrt{p+19}\right)^2 \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=\frac{1}{p+19}-2+p+19-2x_1\cdot x_2 \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1^2+x_2^2=\frac{1}{p+19}+p+19 \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases}$$

$$|x_1-x_2|>2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2>4 \Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-4>0$$

$$\frac{1}{p+19}+(p+19)+2-4>0$$

$$\frac{1}{p+19}+(p+19)>2$$

$$\frac{(p+19)^2-2(p+19)+1}{p+19}>0$$

$$\frac{(p+18)^2}{p+19}>0$$

Т.к. $p+19>0$, то $p>-19$ и $p\neq-18$.

Ответ: $p\in(-19;-18)\cup(-18;\infty)$.

№6. **Найти все значения параметра p, при которых уравнение $|p|x^2-192x+144p=0$ имеет различные корни, принадлежащие промежутку $(-12;24]$.**

Решение:

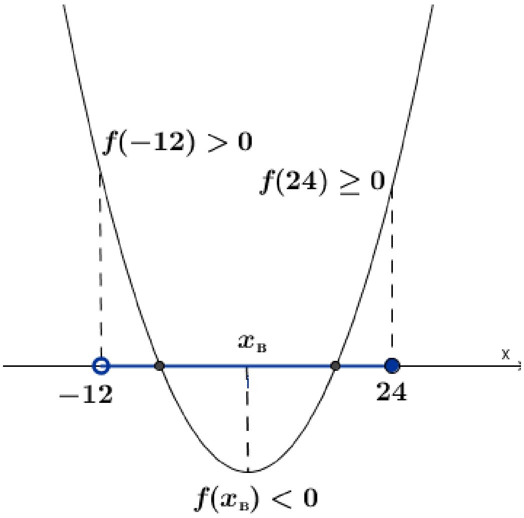
1) При $p=0$ уравнение принимает вид $-192x=0$, которое имеет единственное решение $x=0$, что не подходит по условию.

2) Пусть $p>0$, тогда рассмотрим функцию $f(x)=px^2-192x+144p$ - графиком является парабола с ветвями вверх и вершиной $x_в=-\dfrac{-192}{2p}=\dfrac{96}{p}$. Чтобы парабола пересекает ось ox в двух точках, необходимо задать значение $f(x_в)<0$ и тогда дискриминант будет $D>0$. При этом корни уравнения попадут в заданный промежуток, если $f(-12)>0$ и $f(24)\ge 0$.

Составим систему неравенств

$$\begin{cases} f(x_в)<0, \\ f(-12)>0 \\ f(24)\ge 0, \\ p>0; \end{cases}, \quad \begin{cases} p\cdot\left(\dfrac{96}{p}\right)^2-\dfrac{192\cdot 96}{p}+144p<0 \\ 144p+2304+144p>0 \\ 576p-4608+144p\ge 0 \\ p>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0<p<8 \\ p>-8 \\ p\ge 6,4 \end{cases} \Leftrightarrow p\in[6,4;8)$$



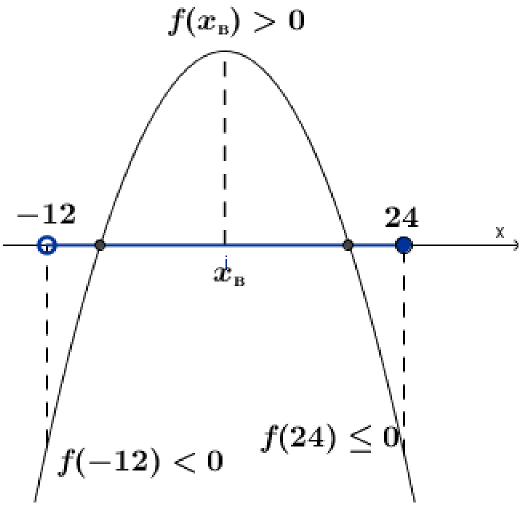
3) Пусть $p<0$, тогда рассмотрим функцию $f(x)=px^2-192x+144p$ - графиком является парабола с ветвями вниз и вершиной $x_в=-\dfrac{-192}{2p}=\dfrac{96}{p}$. Чтобы парабола пересекает ось ox в двух точках, необходимо задать значение $f(x_в)>0$ и тогда дискриминант будет $D>0$.

При этом корни уравнения попадут в заданный промежуток, если $f(-12)<0$ и $f(24)\le 0$.

Составим систему неравенств

$$\begin{cases} f(x_в)>0, \\ f(-12)<0 \\ f(24)\le 0, \\ p<0; \end{cases}, \quad \begin{cases} p\cdot\left(\dfrac{96}{p}\right)^2-\dfrac{192\cdot 96}{p}+144p>0 \\ 144p+2304+144p<0 \\ 576p-4608+144p\le 0 \\ p<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8<p<0 \\ p<-8 \\ p\le 6,4 \end{cases} \Leftrightarrow p\in\varnothing$$



Ответ: $[6,4;8)$.

№7. **При каких значениях a уравнение $x^2-(4a-6)|x|+3a^2-6a=0$ имеет четыре различных решения?**

Решение:

$$x^2-(4a-6)|x|+3a^2-6a=0$$

$$|x|=t,\quad t>0$$

$$t^2-(4a-6)t+3a^2-6a=0$$

$$D>0,\quad \frac{D}{4}=(a-3)^2,\quad (a-3)^2>0\Leftrightarrow a\neq 3$$

$$t_1=3a-6,\quad t_2=a$$

Уравнение в заменах имеет 2 различных положительных корня, если

$\begin{cases} D>0 \\ t_1>0 \\ t_2>0 \end{cases}$, тогда исходное уравнение имеет 4 различных решения.

$$\begin{cases} 3a-6>0 \\ a>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a>2 \\ a>0 \end{cases} \text{ и } a\neq 3\Rightarrow a\in(2;3)\cup(3;\infty)$$

Ответ: $(2;3)\cup(3;\infty)$.

▪ *Тест* Квадратные и, сводящиеся к ним, уравнения с параметром

№1. Найти все значения параметра p, при которых произведение корней уравнения $px^2+9x+p^3-8p^2=0$ равно 9, а их сумма является целым числом.

№2. Пусть x_1 - меньший корень, а x_2 - больший корни уравнения $x^2-10x+\frac{25}{169}p^2=0$. Найти все значения параметра p, при которых три числа x_1, $|p-12|$, x_2 в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.

№3. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4+10(a-16)x^2+9(2a+8)^2=0$ являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии?

№4. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $x^2-16x+t=0$, а x_3, x_4 - корни уравнения $x^2-64x+s=0$. При каких значениях параметра t и s четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 образуют геометрическую прогрессию с положительными членами? В ответе указать отношение s/t.

№5. Найти все значения параметра p, при которых расстояние между корнями уравнения $x^2+\left(\sqrt{p+31}-\frac{1}{\sqrt{p+31}}\right)x-1=0$ превышает число 2.

№6. При каких значениях a уравнение $x^2-(5a-9)|x|+4a^2-9a=0$ имеет два различных решения?

№7. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $|p|x^2-42x+9p=0$ имеет различные корни, принадлежащие промежутку $(-3;6]$.

▪ *Ответы (тест)* Квадратные и, сводящиеся к ним, уравнения с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
-1	***7***	***-24 и 8/3***	***16***	$(-31;-30)\cup(-30;\infty)$	$\left(0;\frac{9}{4}\right)\cup\{3\}$	$[5,6;7)$

№1. **Найти все значения параметра p, при которых произведение корней уравнения $px^2+9x+p^3-8p^2=0$ равно 9, а их сумма является целым числом.**

Решение:
При $p=0$ уравнение примет вид $9x=0$, которое имеет единственный корень $x=0$, что не удовлетворяет условию.
При $p\neq 0$ квадратное уравнение будет иметь корни, если $D\geq 0$. Найдем дискриминант этого уравнения.

$$D=81-p\left(p^3-8p^2\right)=81-p^3\left(p-8\right)\geq 0.$$

$$px^2+9x+p^3-8p^2=0 \ \Big| :p$$

$$x^2+\frac{9}{p}x+p^2-8p=0$$

По формулам Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{9}{p} \\ x_1\cdot x_2=p^2-8p \end{cases}$$

По условию произведение корней равно 9, тогда $p^2-8p=9,\ \ p^2-8p-9=0,\ \ p_1=9,\ \ p_2=-1$.
Найденные значения p удовлетворяют условию, что сумма корней является целым числом.
Проверим значение дискриминанта при таких p.
Если $p=9$, то $D=81-9^3\cdot(9-8)<0$, уравнение корней не имеет.
Если $p=-1$, то $D=81-(-1)^3(-1-8)=81-9=72>0$, уравнение имеет два различных корня.

Ответ: -1.

№2. **Пусть x_1 - меньший корень, а x_2 - больший корни уравнения $x^2-10x+\frac{25}{169}p^2=0$. Найти все значения параметра p, при которых три числа x_1, $|p-12|$, x_2 в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.**

Решение:
Квадратное уравнение имеет различные корни, если $D>0$.

$$D/4=25-\frac{25}{169}p^2>0,\ \ 169-p^2>0,\ \ p\in(-13;13).$$

По формулам Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=10 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{25}{169}p^2 \end{cases}.$$

По свойству членов арифметической прогрессии имеем $|p-12|=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, тогда

$$|p-12|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} p-12=5 \\ p-12=-5 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} p=17\notin(-13;13) \\ p=7\in(-13;13) \end{array}\right.\Rightarrow p=7.$$

Ответ: 7.

№3. **При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4+10(a-16)x^2+9(2a+8)^2=0$ являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии?**

Решение:

$$x^2=t\geq 0$$

$$t^2+10(a-16)t+9(2a+8)^2=0$$

$x_1,x_2,x_3,x_4\uparrow$ арифметическая прогрессия

$$\begin{matrix} t_1=u>0 \\ t_2=v>0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} u=x^2 \\ v=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm\sqrt{u} \\ x_{3,4}=\pm\sqrt{v} \end{cases}$$

Пусть $u>v>0$, тогда $-\sqrt{u};-\sqrt{v};\sqrt{v};\sqrt{u}$ – арифметическая прогрессия

По свойству членов арифметической прогрессии:

$$-\sqrt{v}=\frac{-\sqrt{u}+\sqrt{v}}{2};\quad \sqrt{u}=3\sqrt{v};\quad u=9v$$

$$\begin{cases} u+v=-10a+160 \\ u\cdot v=9(2a+8)^2 \end{cases}$$

1) $u+v=-10a+160,\quad 9v+v=-10a+160,\quad v=-a+16$

2) $u\cdot v=9(2a+8)^2;\quad 9v^2=9(2a+8)^2;\quad (16-a)^2=(2a+8)^2$

$$\left[\begin{matrix} 16-a=2a+8 \\ a-16=2a+8 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} a=\dfrac{8}{3} \\ a=-24 \end{matrix}\right.$$

Ответ: -24 и 8/3.

№4. **Пусть x_1,x_2 - корни уравнения $x^2-16x+t=0$, а x_3,x_4 - корни уравнения $x^2-64x+s=0$. При каких значениях параметра t и s четыре числа x_1,x_2,x_3,x_4 образуют геометрическую прогрессию с положительными членами? В ответе указать отношение s/t.**

Решение:

По условию x_1,x_2,x_3,x_4 - положительные члены геометрической прогрессии со знаменателем $q>0$.

По формулам Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=16 \\ x_1\cdot x_2=t \\ x_3+x_4=64 \\ x_3\cdot x_4=s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_1q=16 \\ x_1\cdot x_1q=t \\ x_3+x_3q=64 \\ x_3\cdot x_3q=s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(1+q)=16 \\ x_1^2q=t \\ x_3(1+q)=64 \\ x_3^2q=s \end{cases}$$

$$\frac{x_3}{x_1}=\frac{64}{16},\quad \frac{x_1q^2}{x_1}=4,\quad q^2=4,\quad q=2\quad (q>0).$$

$$x_1(1+q)=16,\quad x_1(1+2)=16,\quad x_1=\frac{16}{3}$$

$$x_1^2q=t,\quad \left(\frac{16}{3}\right)^2\cdot 2=t \text{ и } x_3^2q=s,\quad \left(x_1q^2\right)^2\cdot 2=s,\quad \left(\frac{16}{3}\right)^2\cdot 2^5=s$$

$$\frac{s}{t}=2^5:2=16$$

Ответ: 16.

№5. **Найти все значения параметра p, при которых расстояние между корнями уравнения $x^2+\left(\sqrt{p+31}-\frac{1}{\sqrt{p+31}}\right)x-1=0$ превышает число 2.**

Решение:

Квадратное уравнение имеет различные корни, если $D>0$.

$$D=\left(\sqrt{p+31}-\frac{1}{\sqrt{p+31}}\right)^2+4>0 \text{ при всех } p>-31.$$

Расстояние между корнями превышает число 2, значит, $|x_1-x_2|>2$.

По формулам Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{1}{\sqrt{p+31}}-\sqrt{p+31} \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x_1+x_2)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{p+31}}-\sqrt{p+31}\right)^2 \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=\frac{1}{p+31}-2+p+31-2x_1\cdot x_2 \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1^2+x_2^2=\frac{1}{p+31}+p+31 \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases}$$

$$|x_1-x_2|>2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2>4 \Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-4>0$$

$$\frac{1}{p+31}+(p+31)+2-4>0$$

$$\frac{1}{p+31}+(p+31)>2 \Leftrightarrow \frac{(p+30)^2}{p+31}>0$$

Т.к. $p+31>0$, то $p>-31$ и $p\neq-30$. *Ответ:* $p\in(-31;-30)\cup(-30;\infty)$.

№6. **При каких значениях a уравнение $x^2-(5a-9)|x|+4a^2-9a=0$ имеет два различных решения?**

Решение:

$$x^2-(5a-9)|x|+4a^2-9a=0$$

$$|x|=t, \quad \begin{cases} t^2-(5a-9)t+4a^2-9a=0 \\ t>0 \end{cases}$$

$$\text{Если } \left.\begin{array}{l} t_1=0, \text{ то } x=0\rightarrow 1 \text{ корень} \\ t_2>0, \text{ то } |x|=t_2\rightarrow 2 \text{ корня} \end{array}\right| \Rightarrow 3 \text{ решения}$$

Если $t_1=t_2=0$, то $x=0\rightarrow 1$ корень

1) $D=0, \quad (3a-9)^2=0, \ a=3$

$$t=\frac{5a-9}{2}=\frac{5\cdot3-9}{2}=3$$

$t=3>0, \ |x|=3\Rightarrow x=\pm3\rightarrow$ 2 различных корня

2) $\begin{cases} D>0 \\ t_1>0 \\ t_2<0 \end{cases} \vee \begin{cases} D>0 \\ t_1<0 \\ t_2>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} D>0 \\ t_1\cdot t_2<0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a\neq3 \\ 4a^2-9a<0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a\neq3 \\ 0<a<\frac{9}{4} \end{cases}; \ a\in\left(0;\frac{9}{4}\right)$

Ответ: $\left(0;\frac{9}{4}\right);\{3\}$.

№7. **Найти все значения параметра p, при которых уравнение $|p|x^2-42x+9p=0$ имеет различные корни, принадлежащие промежутку $(-3;6]$.**

Решение:

1) При $p=0$ уравнение принимает вид $-42x=0$, которое имеет единственное решение $x=0$, что не подходит по условию.

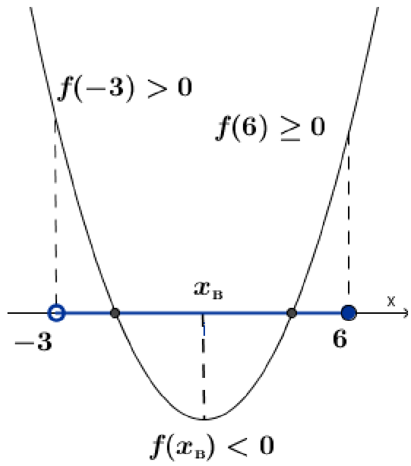
2) Пусть $p>0$, тогда рассмотрим функцию $f(x)=px^2-42x+9p$ - графиком является парабола с ветвями вверх и вершиной $x_в=-\dfrac{-42}{2p}=\dfrac{21}{p}$. Чтобы парабола пересекает ось ox в двух точках, необходимо задать значение $f(x_в)<0$ и тогда дискриминант будет $D>0$.

При этом корни уравнения попадут в заданный промежуток, если $f(-3)>0$ и $f(6)\geq 0$.

Составим систему неравенств

$$\begin{cases} f(x_в)<0, \\ f(-3)>0 \\ f(6)\geq 0, \\ p>0; \end{cases}, \begin{cases} p\cdot\left(\dfrac{21}{p}\right)^2-\dfrac{42\cdot 21}{p}+9p<0 \\ 9p+126+9p>0 \\ 36p-252+9p\geq 0 \\ p>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0<p<7 \\ p>-7 \\ p\geq 5,6 \end{cases} \Leftrightarrow p\in[5,6;7)$$



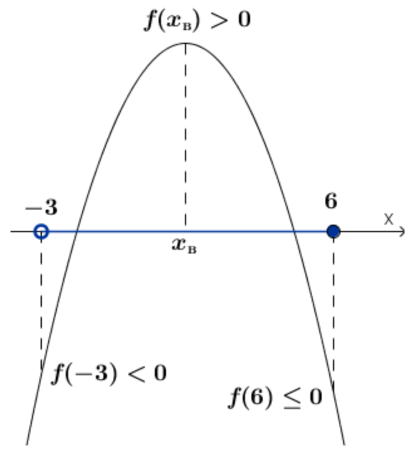
3) Пусть $p<0$, тогда рассмотрим функцию $f(x)=px^2-42x+9p$ - графиком является парабола с ветвями вниз и вершиной $x_в=-\dfrac{-42}{2p}=\dfrac{21}{p}$. Чтобы парабола пересекает ось ox в двух точках, необходимо задать значение $f(x_в)>0$ и тогда дискриминант будет $D>0$.

При этом корни уравнения попадут в заданный промежуток, если $f(-3)<0$ и $f(6)\leq 0$.

Составим систему неравенств

$$\begin{cases} f(x_в)>0, \\ f(-3)<0 \\ f(6)\leq 0, \\ p<0; \end{cases}, \begin{cases} p\cdot\left(\dfrac{21}{p}\right)^2-\dfrac{42\cdot 21}{p}+9p>0 \\ 9p+126+9p<0 \\ 36p-252+9p\leq 0 \\ p<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7<p<0 \\ p<-7 \\ p\leq 5,6 \end{cases} \Leftrightarrow p\in\varnothing$$



Ответ: $[5,6;7)$.