Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Кусочно-линейные функции

▪ *Примеры*

№1. При каком значении a уравнение $|3x-7|=2a-13$ имеет единственное решение?

№2. Найти все значения параметра a, при которых графики функций $y=\dfrac{|x+3|}{x+3}$ и $y=|x+a|$ имеют одну общую точку.

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|2x-a|+1=|x+3|$ имеет ровно один корень.

№4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\big||x+2|-1|-3\big|=3+|x+a|$ имеет единственное решение.

№5. При каких значениях параметра a уравнение $x-a=\big||2x|-1\big|$ имеет ровно три корня?

№6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\big|2|x|-a^2\big|=x-a$ имеет ровно три различных решения.

№7. Найти значения k, для которых уравнение $|x-3|-|x+5|=k-x$ имеет два решения.

№8. Найти все значения a, при которых уравнение $|x+2|=ax+1$ имеет единственное решение.

№9. При каких значениях параметра a уравнение $x+2=a|x-1|$ имеет единственное решение?

№10. Найти значения k, для которых уравнение $|x-5|-|x-1|=kx+1$ имеет единственное решение.

№11. Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение $|2x+6|+|2x-8|=ax+12$ имеет единственное решение.

Решение (примеры) Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Кусочно-линейные функции

№1. **При каком значении a уравнение $|3x-7| = 2a-13$ имеет единственное решение?**

Решение:

$$|3x-7| = 2a-13 \Leftrightarrow \begin{cases} y = |3x-7| \\ y = 2a-13 \end{cases}$$

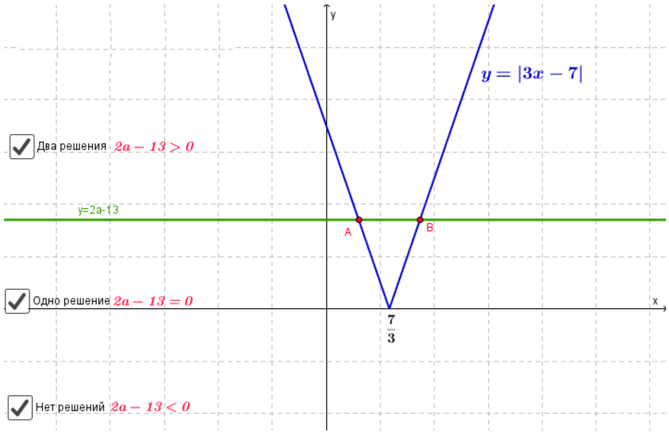
1) $y = |3x-7|$ - «уголок» с вершиной в точке $\left(\frac{7}{3};0\right)$;

$y = 2a-13$ - семейство прямых, параллельных оси абсцисс.

2) Два решения: $2a-13>0 \Leftrightarrow a>6{,}5$.

Одно решение: $2a-13=0 \Leftrightarrow a=6{,}5$.

Нет решений: $2a-13<0 \Leftrightarrow a<6{,}5$.



Ответ: единственное решение при $a = 6{,}5$.

№2. **Найти все значения параметра a, при которых графики функций $y = \frac{|x+3|}{x+3}$ и $y = |x+a|$ имеют одну общую точку.**

Решение:

$$y = \frac{|x+3|}{x+3}, \quad y = |x+a|$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-3 \\ y=1 \\ y=|x+a| \end{cases} \\ \begin{cases} x<-3 \\ y=-1 \\ y=|x+a| \end{cases} \end{array}\right.$$

$$y = |x+a|$$
$$y = |x-(-a)|$$
$$x_{верш.} = -a$$

Нет точек пересечения графиков функций:

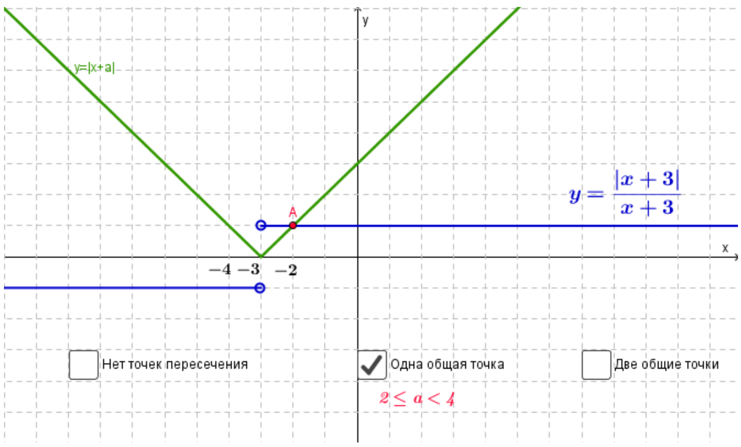
$x_в \le -4, \quad -a \le -4 \Leftrightarrow a \ge 4$.

Одна точка пересечения:

$-4 < x_в \le -2, \quad -4 < -a \le -2 \Leftrightarrow 2 \le a < 4$.

Две точки пересечения:

$x_в > -2, \quad -a > -2 \Leftrightarrow a < 2$.



Ответ: одна общая точка графиков функций при $a \in [2;4)$.

№3. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|2x-a|+1=|x+3|$ имеет ровно один корень.**

Решение:

$$|2x-a|=|x+3|-1$$

Решим уравнение графически $\begin{cases} y=|2x-a| \\ y=|x+3|-1 \end{cases}$

1) $y=|2x-a|$ - «уголок» с подвижной вершиной $\left(\frac{a}{2};0\right)$

$y=|x+3|-1$ - «уголок» с вершиной $(-3;-1)$.
Угловые коэффициенты ветвей ломаных неравны, значит, они не параллельны.

2) График $y=|x+3|-1$ пересекает ось ox в точках А и В. Найдем их абсциссы.

$$|x+3|-1=0$$

$$|x+3|=1$$

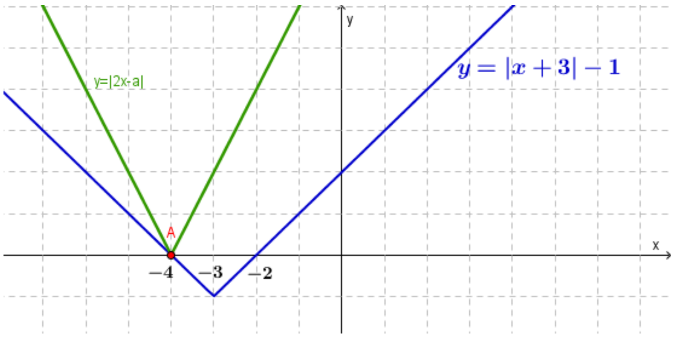
$$\left[\begin{array}{l} x+3=1 \\ x+3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

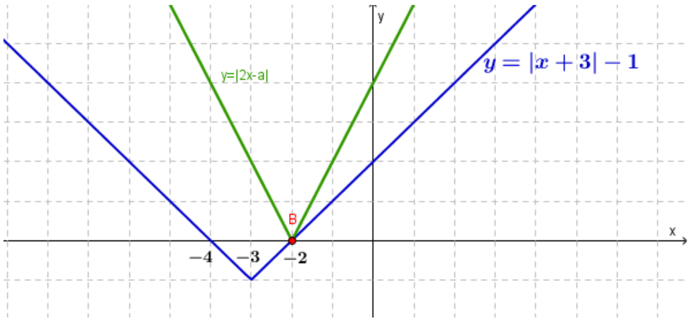
Уравнение имеет один корень, если вершина ломаной $y=|2x-a|$ находится либо в т. А, либо в т. В.

$A(-4;0)$ или $B(-2;0)$

$0=|-2\cdot 4-a|$ или $0=|-2\cdot 2-a|$

$a=-8$ $\quad$ $a=-4$





При движении ломаной $y=|2x-a|$ слева до точки А и справа от точки В графики пересекаются в двух точках. Между точками А и В - нет точек пересечения

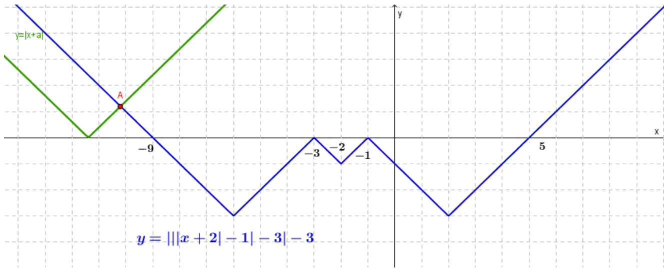
Ответ: уравнение имеет один корень при $a\in\{-8;-4\}$.

№4. **Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|\left|\left|x+2\right|-1\right|-3\right|=3+\left|x+a\right|$ имеет единственное решение.**

Решение:

$$\left|\left|\left|x+2\right|-1\right|-3\right|-3=\left|x+a\right|$$

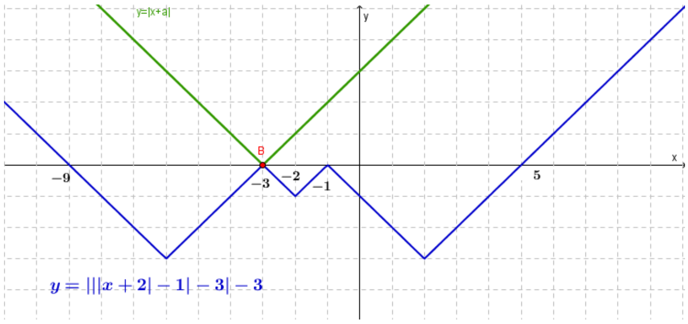
Решим уравнение графически $\begin{cases} y=\left|\left|\left|x+2\right|-1\right|-3\right|-3 \\ y=\left|x+a\right| \end{cases}$



1) $y=\left|x+a\right|$ - «уголок» с подвижной вершиной $\left(-a;0\right)$.

$y=\left|\left|\left|x+2\right|-1\right|-3\right|-3$ - ломаная.

Угловые коэффициенты ветвей ломаных равны, значит, они параллельны или совпадают.

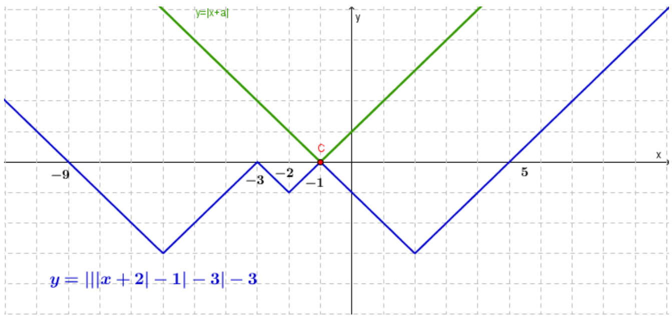


2) Найдем абсциссы точек пересечения ломаной $y=\left|\left|\left|x+2\right|-1\right|-3\right|-3$ с осью ox.

$$\left|\left|\left|x+2\right|-1\right|-3\right|-3=0$$

$$\left|\left|\left|x+2\right|-1\right|-3\right|=3$$

$$\left[\begin{array}{l} \left|\left|x+2\right|-1\right|-3=3 \\ \left|\left|x+2\right|-1\right|-3=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\left|x+2\right|-1\right|=6 \\ \left|\left|x+2\right|-1\right|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-9 \\ x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

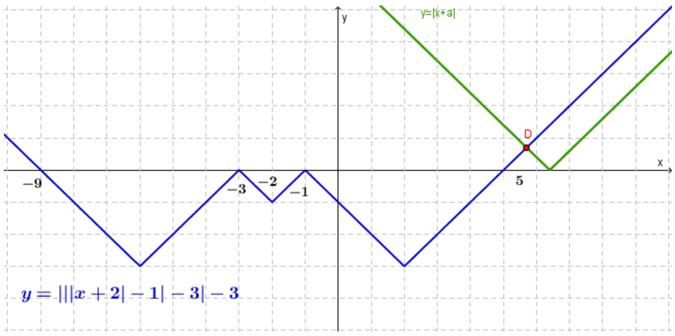


При движении ломаной $y=\left|x+a\right|$ слева до точки $\left(-9;0\right)$ графики имеют одну общую точку, т.е. уравнение имеет одно решение:

$$x_в<-9,\quad -a<-9 \Leftrightarrow a>9.$$

Когда вершина ломаной находится в точке $\left(-9;0\right)$, будет бесконечное множество общих точек.

От точки $\left(-9;0\right)$ до $\left(-3;0\right)$ - нет точек пересечения.



Следующий раз единственная общая точка у графиков будет, когда вершина ломаной $y=\left|x+a\right|$ совпадет с точкой $\left(-3;0\right)$: $x_в=-3,\quad -a=-3 \Leftrightarrow a=3$ и

с точкой $\left(-1;0\right)$: $x_в=-1,\quad -a=-1 \Leftrightarrow a=1$.

От точки $\left(-3;0\right)$ до $\left(-1;0\right)$ и от $\left(-1;0\right)$ до $\left(5;0\right)$ - нет точек пересечения.

Когда вершина ломаной находится в точке $\left(5;0\right)$, будет бесконечное множество общих точек.

Далее, при движении за точку $\left(5;0\right)$ вправо графики будут также иметь единственную общую точку:

$$x_в>5,\quad -a>5 \Leftrightarrow a<-5.$$

Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a<-5,\ a=1,\ a=3,\ a>9$.

№5. **При каких значениях параметра a уравнение $x-a=\left||2x|-1\right|$ имеет ровно три корня?**

Решение:

Решим уравнение графически $\begin{cases} y=\left||2x|-1\right| \\ y=x-a \end{cases}$

1) $y=x-a$ - семейство прямых, параллельных биссектрисе I и III четвертей.

$y=\left||2x|-1\right|$ - ломаная.

2) Найдем абсциссы точек пересечения ломаной $y=\left||2x|-1\right|$ с осью x: $\left||2x|-1\right|=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$.

Координаты точки пересечения с осью y: $(0;1)$.

При движении графика $y=x-a$ снизу вдоль оси y до точки с координатами $\left(\frac{1}{2};0\right)$ общих точек с ломаной $y=\left||2x|-1\right|$ нет. Одна общая точка $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

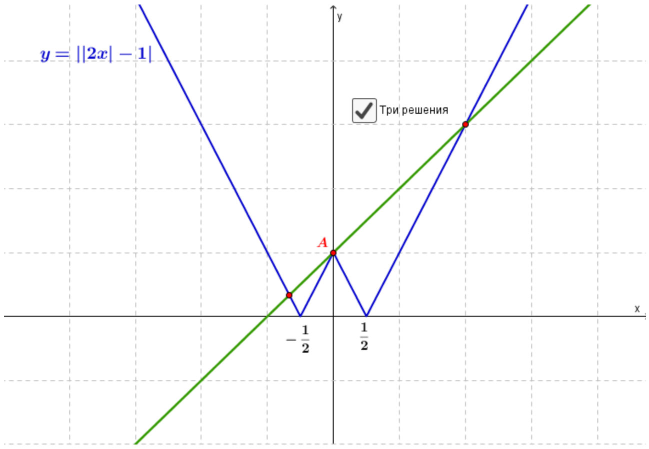
Далее при движении до точки B - две общих точки. Уравнение имеет три решения, когда графики пересекаются в трех точках. Это происходит, когда прямая $y=x-a$ проходит через точку $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$:

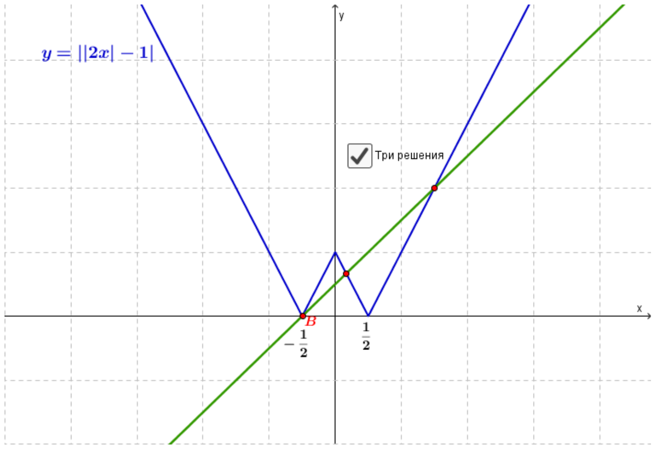
$0=-\frac{1}{2}-a \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$.

От точки B до точки A прямая пересекает ломаную четыре раза.

Проходя через точку $A(0;1)$ прямая пересекает ломаную три раза: $1=0-a \Leftrightarrow a=-1$.

При движении вверх за точку A, графики пересекаются два раза.

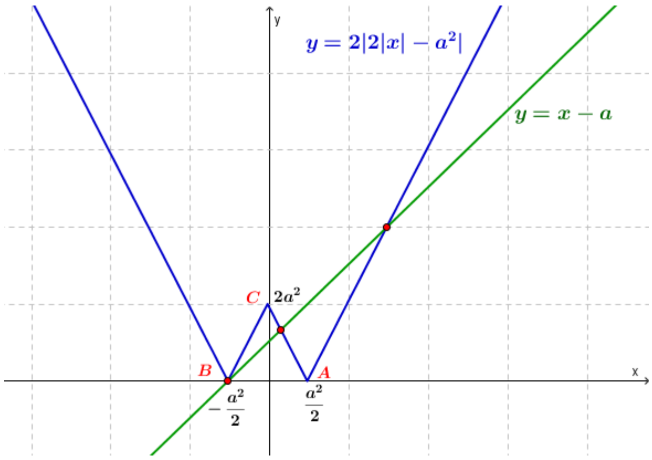


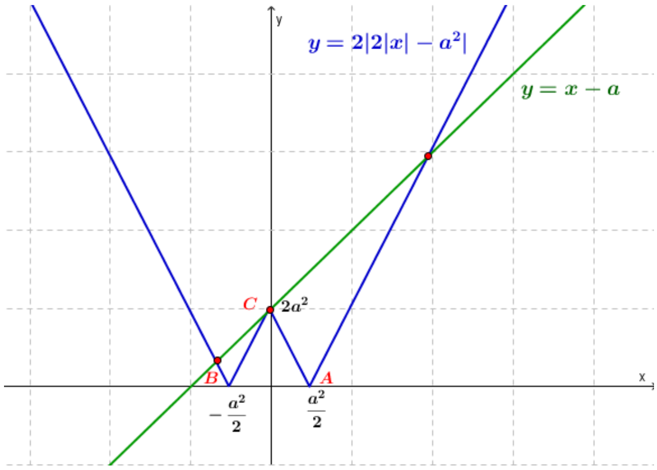


Ответ: уравнение имеет ровно три корня при $a=-1$ *и* $a=-\frac{1}{2}$.

№6. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\left|2|x|-a^2\right|=x-a$ имеет ровно три различных решения.**

Решим уравнение графически $\begin{cases} y=2\left|2|x|-a^2\right| \\ y=x-a \end{cases}$





1) $y=x-a$ - семейство прямых, параллельных биссектрисе I и III четвертей.

$y=2\left|2|x|-a^2\right|$ - ломаная.

2) Найдем координаты точек пересечения ломаной $y=2\left|2|x|-a^2\right|$ с осями координат:

$x=0,\ \ y=2a^2$

$y=0,\ \ 2\left|2|x|-a^2\right|=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{a^2}{2}$.

При движении прямой $y=x-a$ снизу вдоль оси y до точки A графики не имеют общих точек.
Когда графики пересекаются в точке A, уравнение имеет единственное решение.
Далее, при движении вверх до точки B, графики пересекаются в двух точках.

Проходя через точку $B\left(-\dfrac{a^2}{2};0\right)$, графики имеют три общие точки, а значит и уравнение имеет три решения.

$y=x-a$

$0=-\dfrac{a^2}{2}-a \Leftrightarrow a=0$ (не подходит, т.к. одно решение) или $a=-2$.

При движении от точки B до точки C прямая пересекает ломаную четыре раза.

Проходя через точку $C\left(0;2a^2\right)$, графики имеют три общие точки, а значит и уравнение имеет три решения.

$y=x-a$

$2a^2=0-a \Leftrightarrow a=0$ (не подходит) или $a=-\dfrac{1}{2}$.

Далее, при движении вверх за точку C, графики пересекаются в двух точках.

Ответ: уравнение имеет ровно три различных решения при $a=-2$ и $a=-\dfrac{1}{2}$.

№7. **Найти значения *k*, для которых уравнение $|x-3|-|x+5|=k-x$ имеет два решения.**

Решение:

$|x-3|-|x+5|=k-x; \quad |x-3|-|x+5|+x=k$

$$\begin{cases} y=|x-3|-|x+5|+x & (1) \\ y=k \end{cases}$$

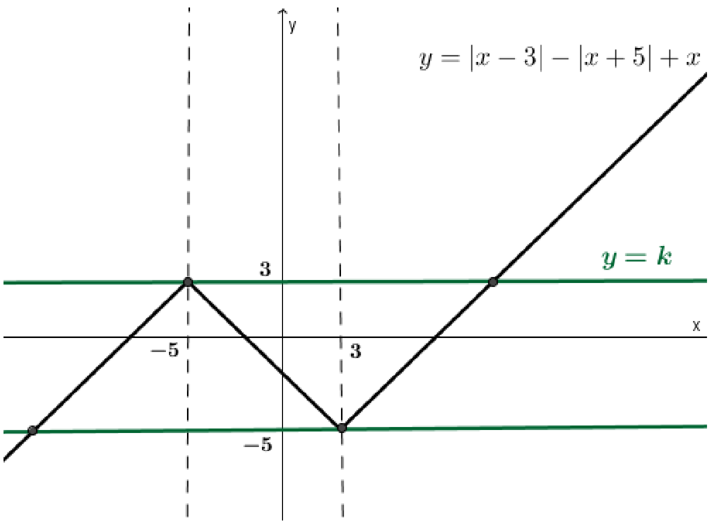
$(1)\quad x\le -5,\ \ y=-x+3+x+5+x,\quad \begin{cases} y=x+8 \\ x\le -5 \end{cases}$

$-5<x\le 3,\ \ y=-x+3-x-5+x,\quad \begin{cases} y=-x-2 \\ x\in[-5;3] \end{cases}$

$x\ge 3,\ \ y=x-3-x-5+x,\quad \begin{cases} y=x-8 \\ x\in[3;\infty) \end{cases}$

$y(-5)=3,\ \ y(3)=-5$

Два решения: $\left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-5 \end{array}\right.$ т.к. $y=k$, то $k=\{3;-5\}$



Ответ: -5 и 3.

№8. **Найти все значения a, при которых уравнение $|x+2|=ax+1$ имеет единственное решение.**

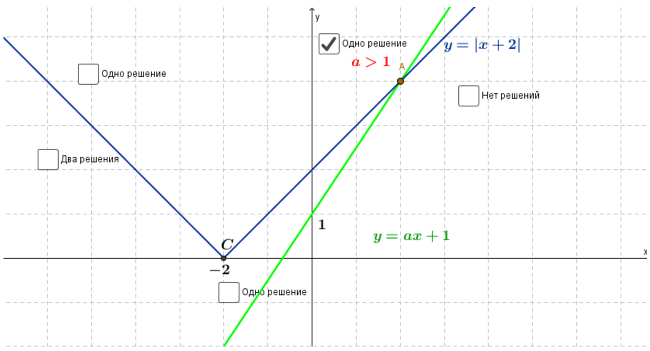
Решение:

Решим уравнение графически.

$$\begin{cases} y=|x+2| & (1) \\ y=ax+1 & (2) \end{cases}$$

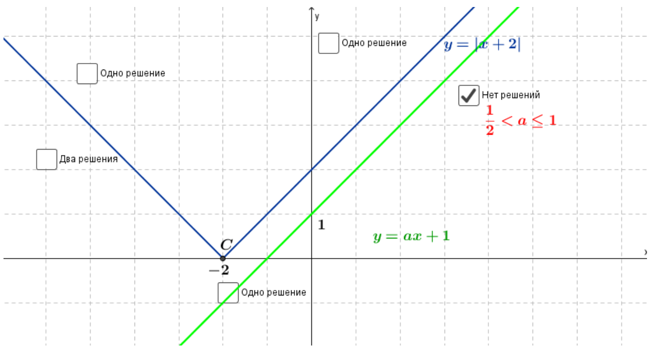
$(1)\ \ y=|x+2|$ - ломаная с вершиной в точке $(-2;0)$.

$(2)\ \ y=ax+1$ - семейство прямых, проходящих через точку $(0;1)$ с изменяющимся угловым коэффициентом a.



При $a>1$ - одно решение; нет решений при $a=1$, когда прямая параллельна правой ветви ломаной.

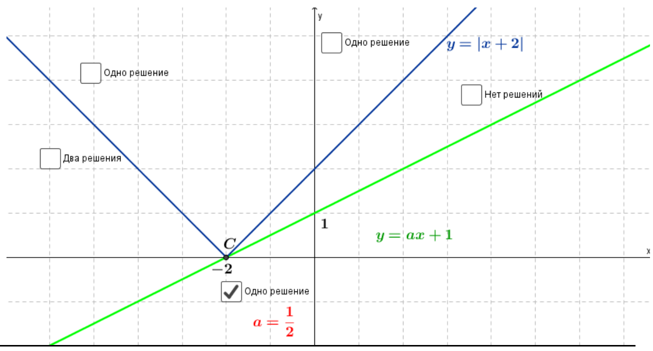
Одно решение, когда прямая $y=ax+1$ проходит через точку $C(-2;0)$: $0=-2a+1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

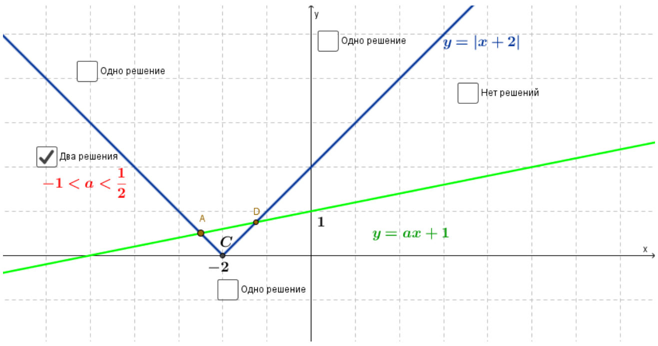


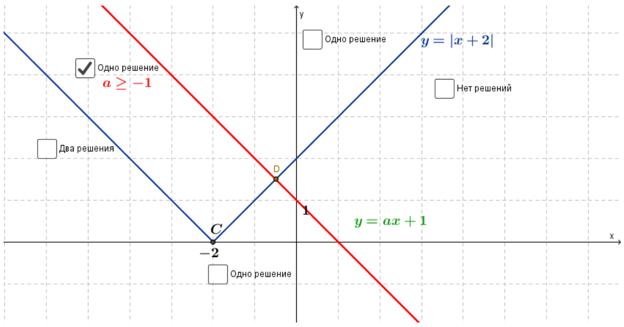
Нет решений при $\frac{1}{2}<a\le 1$.

Два решения при $-1<a<\frac{1}{2}$.

Прямая $y=ax+1$ параллельна левой ветви ломаной при $a=-1$. Тогда уравнение имеет одно решение. Далее при уменьшении значения $a<-1$ уравнение также будет иметь одно решение.







Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a\in(-\infty;-1]\cup\{0{,}5\}\cup(1;\infty)$.

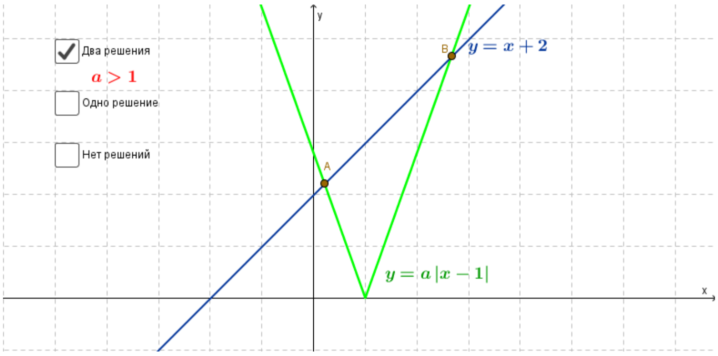
№9. **При каких значениях параметра *a* уравнение $x+2=a|x-1|$ имеет единственное решение?**

Решение:
Решим уравнение графически.

$$x+2=a|x-1|\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\ y=a|x-1|\end{cases}.$$

$y=a|x-1|$ - семейство «уголков» с вершиной $(1;0)$ и подвижными ветками.

Уравнение имеет два решения, если $a>1$.

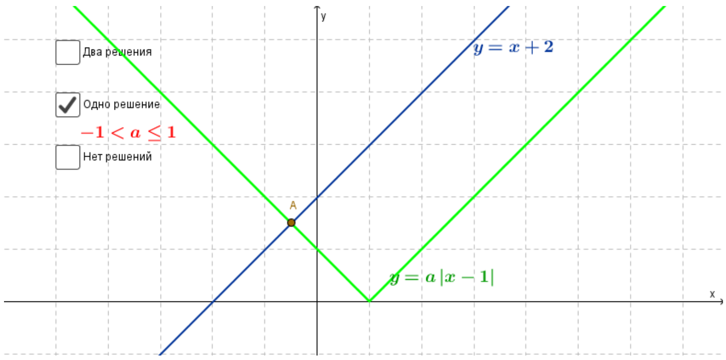


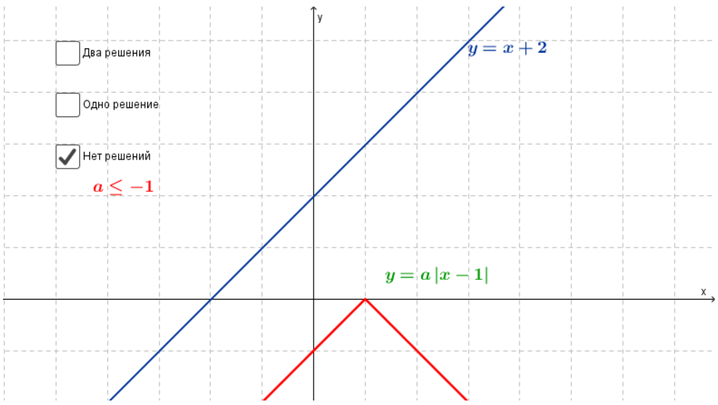
Одна точка пересечения графиков (одно решение), когда правая ветвь ломаной $y=a|x-1|$ будет параллельна прямой $y=x+2$ и $a=1$.
И далее, при уменьшении значения a до -1 уравнение также будет иметь одно решение.

$$-1<a\leq 1.$$

Уравнение не имеет решений, когда левая ветвь «ломаной» $y=a|x-1|$ будет параллельна прямой $y=x+2$ и $a=-1$.
Далее, при уменьшении значения a до $-\infty$, не будет общих точек у графиков, а значит, уравнение не будет иметь решений.

$$a\leq -1.$$





Ответ: при $-1<a\leq 1$ *уравнение имеет единственной решение.*

№10. **Найти значения *k*, для которых уравнение $|x-5|-|x-1|=kx+1$ имеет единственное решение.**

Решение:

$|x-5|-|x-1|=kx+1; \quad |x-5|-|x-1|-1=kx$

Решим уравнение графически.

$$\begin{cases} y=|x-5|-|x-1|-1 \quad (1) \\ y=kx \quad (2) \end{cases}$$

Построим график уравнения (1).

$x\le 1 \quad y=-x+5+x-1-1, \quad y=3$

$1\le x\le 5 \quad y=-x+5-x+1-1, \quad y=-2x+5$

$x\ge 5 \quad y=x-5-x+1-1, \quad y=5$

$y(1)=3$

$y(5)=-5$

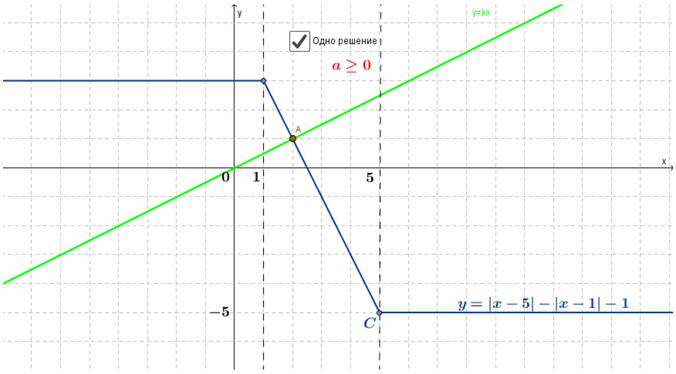
Графиком уравнения (2) $y=kx$ является семейство прямых, проходящих через точку $(0;0)$.

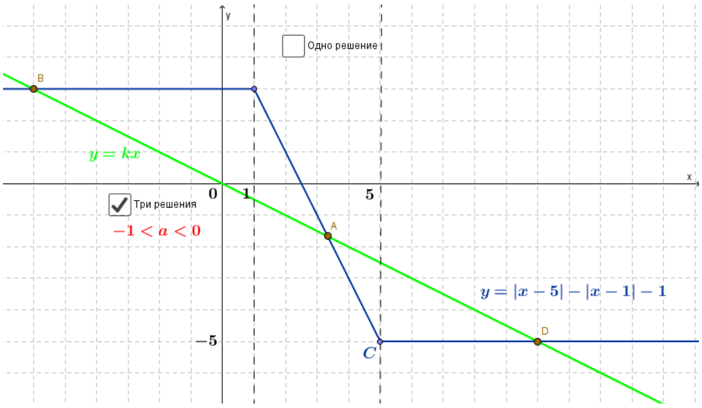
Уравнение имеет единственное решение при $k\ge 0$.

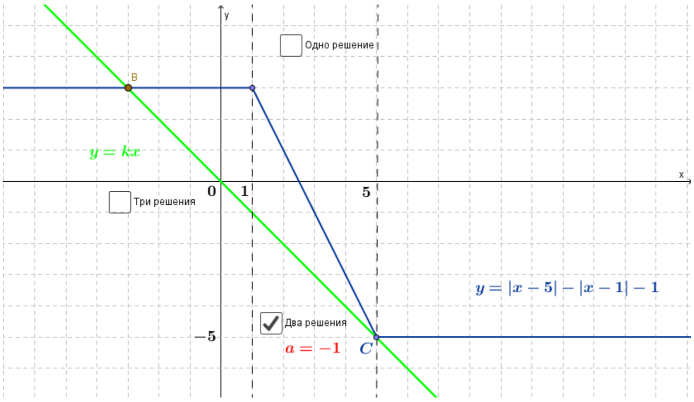
Когда прямая $y=kx$ проходит через точку $(5;-5)$, то графики имеют две общие точки:

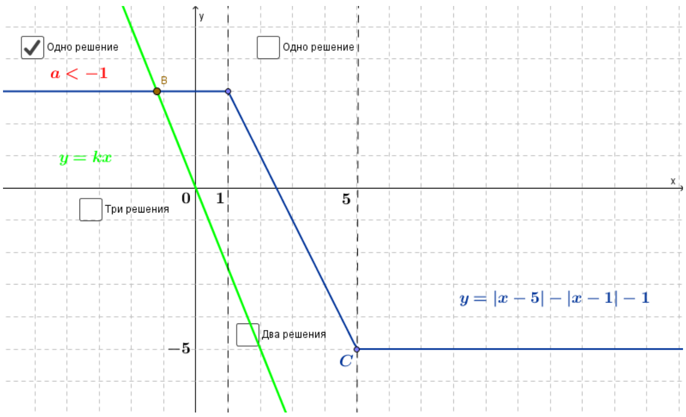
$-5=5k \Leftrightarrow k=-1$.

Три решения при $-1<k<0$; одно решение при $k<-1$.









Ответ: уравнение имеет единственное решение при $k\in(-\infty;-1)\cup[0;\infty)$.

№11. **Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение $|2x+6|+|2x-8|=ax+12$ имеет единственное решение.**

Решение:

Решим уравнение $|2x+6|+|2x-8|=ax+12$ графически:

1) $y=|2x+6|+|2x-8|$

$x\in(-\infty;-3]$, $y=-4x+2$

$x\in(-3;4)$, $y=14$

$x\in[4;\infty)$, $y=4x-2$

2) $y=ax+12$ - семейство прямых, проходящих через точку $(0;12)$ с изменяющимся угловым коэффициентом.

Прямая $y=ax+12$ проходит через точку $A(4;14)$:

$14=4a+12,\ 2=4a,\ a=\dfrac{1}{2}$

и через точку $D(-3;14)$:

$14=-3a+12,\ 2=-3a,\ a=-\dfrac{2}{3}$.

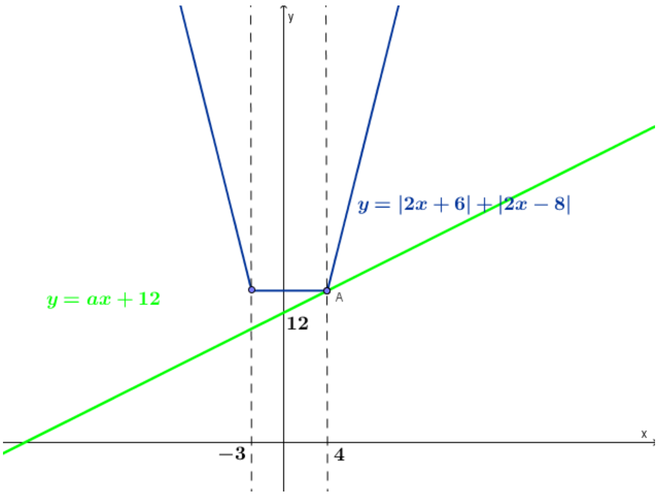
Прямая $y=ax+12$ параллельна прямой $y=4x-2$, значит $a=4$.

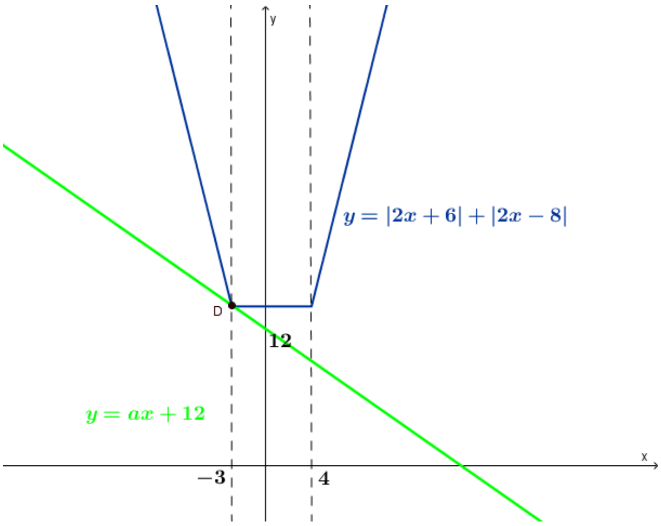
Прямая $y=ax+12$ параллельна прямой $y=-4x+2$, значит $a=-4$.

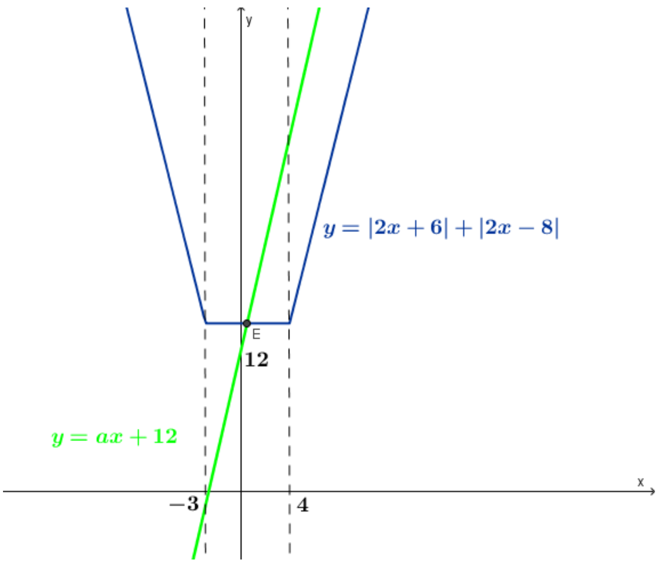
Нет решений: $a\in\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{2}\right)$.

Одно решение: $a=-\dfrac{2}{3}$, $a=\dfrac{1}{2}$, $a\geq 4$ и $a\leq -4$.

Два решения: $\dfrac{1}{2}<a<4$ и $-4<a<-\dfrac{2}{3}$.







Ответ: $a\in(-\infty;-4]\cup\left\{-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{2}\right\}\cup[4;\infty)$.

▪ *Тест* Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Кусочно-линейные функции

№1. При каком значении *m* уравнение $|8x-8|=m-36$ имеет единственное решение?

№2. Найти все значения параметра *a*, при которых графики функций $y=\dfrac{x+4}{|x+4|}$ и $y=(x+a)^2$ имеют одну общую точку.

№3. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $1=|x-3|-|2x+a|$ имеет ровно один корень.

№4. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\big||x-3|+2|-3\big|=1+|x-a|$ имеет единственное решение.

№5. При каких значениях параметра *a* уравнение $a+3x=\big||5x|-10\big|$ имеет ровно три корня?

№6. Найти все значение *a*, при которых уравнение $x-\dfrac{a}{2}=4\big|4|x|-a^2\big|$ имеет четыре решения.

№7. Найти значения *k*, для которых уравнение $|x+3|-|x-4|=\dfrac{x}{3}+k$ имеет два решения.

№8. Найти все значения *a*, при которых уравнение $|x-4|=ax+2$ имеет единственное решение.

№9. При каких значениях параметра *a* уравнение $x+1=a|x-3|$ имеет единственное решение?

№10. Найти все значения *a*, при которых уравнение $\dfrac{|x+1|}{x+1}-2=-ax+a$ имеет два решения.

№11. При каких значениях параметра *a* уравнение $|x+2|+a|x-1|=3$ имеет единственное решение?

№12. Найти значения *k*, для которых уравнение $|x+2|-|x-3|=kx$ имеет три решения

▪ *Ответы (тест)* Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Кусочно-линейные функции

№1	№2	№3	№4	№5	№6
36	$\left[3;5\right)$	***-8; -4***	$a<1,\ a=3,\ a>5$	***6; 10***	$\left(-2;-\frac{1}{8}\right)$
№7	**№8**	**№9**	**№10**	**№11**	**№12**
-6 и $5\frac{2}{3}$	$(-\infty;-1);\{-0,5\};[1;\infty)$	$\left(-1;1\right]$	$\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$	$a<-1$; $a>1$	$\left(0;\frac{5}{3}\right)$

▪ *Решение (тест)* Графический способ решения уравнений с модулем и параметром. Кусочно-линейные функции

№1. **При каком значении *m* уравнение $|8x-8|=m-36$ имеет единственное решение?**

Решение:

$$|8x-8|=m-36$$

$$|8x-8|=0 \Leftrightarrow 8x-8=0 \Leftrightarrow x=1\,(\text{ед. решение})$$

$$m-36=0 \Leftrightarrow m=36$$

Ответ: 36.

№2. **Найти все значения параметра *a*, при которых графики функций $y=\dfrac{x+4}{|x+4|}$ и $y=(x+a)^2$ имеют одну общую точку.**

Решение:

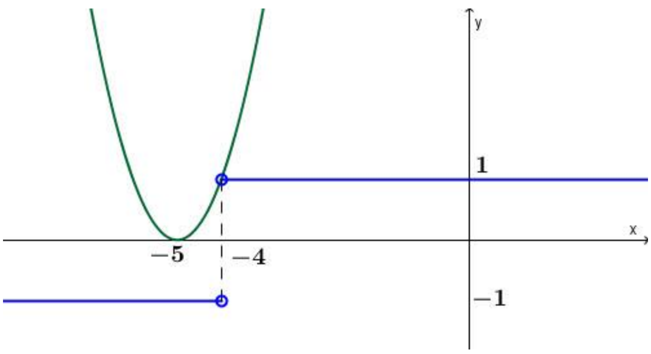
$$y=\frac{x+4}{|x+4|},\quad y=(x+a)^2$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-4\\ y=1\\ y=(x+a)^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<-4\\ y=-1\\ y=(x+a)^2\end{cases}\quad \text{нет решений}\end{array}\right.$$

$$y=(x+a)^2$$

$$y=(x-(-a))^2$$

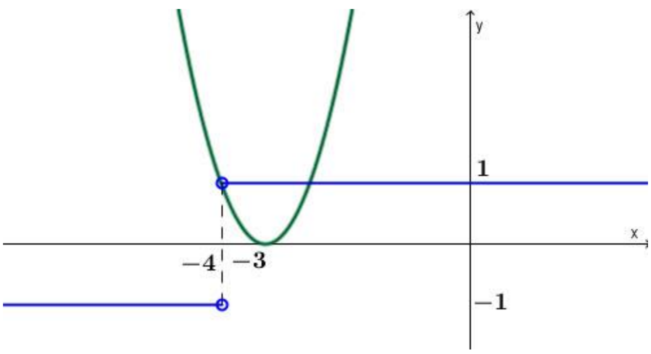
$$x_{\text{верш.}}=-a$$



Вершина параболы находится в точке $(-5;0)$ и проходит через точку $(-4;1)$ - у графиков нет общих точек: $-a=-5,\ a=5$.

При движении вершины параболы вправо вдоль оси OX до точки $(-3;0)$ парабола имеет с графиком функции $y=\dfrac{x+4}{|x+4|}$ ровно одну точку: $-a=-3,\ a=3$.

Значит, графики функций имеют одну общую точку при $\left[3;5\right)$.



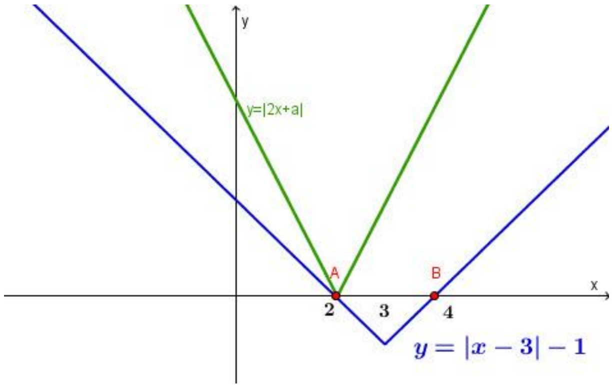
Ответ: $\left[3;5\right)$.

№3. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $1=|x-3|-|2x+a|$ имеет ровно один корень.**

Решение:

$$|2x+a|=|x-3|-1$$

Решим уравнение графически $\begin{cases} y=|2x+a| \\ y=|x-3|-1 \end{cases}$



1) $y=|2x+a|$ - «уголок» с подвижной вершиной $\left(-\dfrac{a}{2};0\right)$

$y=|x-3|-1$ - «уголок» с вершиной $(3;-1)$.

Угловые коэффициенты ветвей ломаных не равны, значит, они не параллельны.

2) График $y=|x-3|-1$ пересекает ось Ox в точках A и B. Найдем их абсциссы.

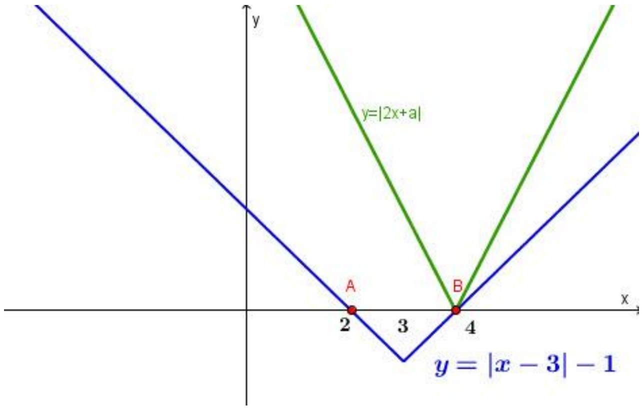
$$|x-3|-1=0,\quad |x-3|=1,\quad \left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Уравнение имеет один корень, если вершина ломаной $y=|2x+a|$ находится либо в т. A, либо в т. B.

$$A(2;0) \qquad\qquad B(4;0)$$

$$0=|2\cdot 2+a| \quad \text{или} \quad 0=|2\cdot 4+a|$$

$$a=-4 \qquad\qquad a=-8$$



При движении ломаной $y=|2x+a|$ слева до точки A и справа от точки B графики пересекаются в двух точках. Между точками A и B - нет точек пересечения.

Ответ: уравнение имеет один корень при $a\in\{-8;-4\}$.

№4. **Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $|||x-3|+2|-3|=1+|x-a|$ имеет единственное решение.**

Решение:

$$|||x-3|+2|-3|-1=|x-a|$$

Решим уравнение графически $\begin{cases} y=|||x-3|+2|-3|-1 \\ y=|x-a| \end{cases}$

1) $y=|x-a|$ - «уголок» с подвижной вершиной $(a;0)$.

$y=|||x-3|+2|-3|-1$ - ломаная.

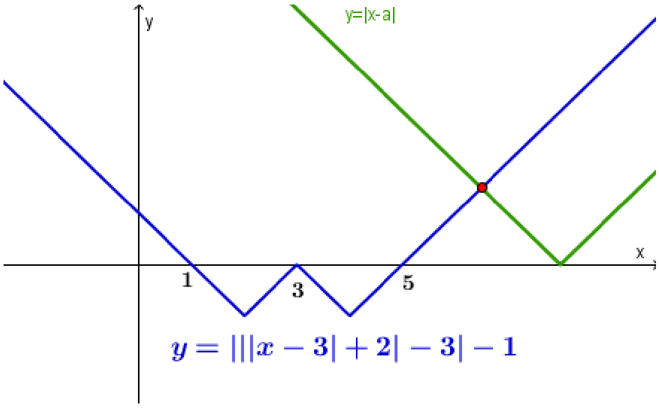
Угловые коэффициенты ветвей ломаных равны, значит, они параллельны или совпадают.

2) Найдем абсциссы точек пересечения ломаной $y=|||x-3|+2|-3|-1$ с осью ox.

$$|||x-3|+2|-3|-1=0$$

$$|||x-3|+2|-3|=1$$

$$\left[\begin{array}{l} ||x-3|+2|-3=1 \\ ||x-3|+2|-3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ||x-3|+2|=4 \\ ||x-3|+2|=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$



При движении ломаной $y=|x-a|$ слева до точки $(1;0)$ графики имеют одну общую точку, т.е. уравнение имеет одно решение: $x_в<1, \ a<1$.

Когда вершина ломаной находится в точке $(1;0)$, будет бесконечное множество общих точек.

От точки $(1;0)$ до $(3;0)$ - нет точек пересечения.

Следующий раз единственная общая точка у графиков будет, когда вершина ломаной $y=|x-a|$ совпадет с точкой $(3;0)$: $x_в=3, \ a=3$. От точки $(3;0)$ до $(5;0)$ нет точек пересечения.

Когда вершина ломаной находится в точке $(5;0)$, будет бесконечное множество общих точек.

Далее, при движении за точку $(5;0)$ вправо графики будут также иметь единственную общую точку:

$$x_в>5, \ a>5.$$

Значит, уравнение имеет единственное решение при $a<1, \ a=3, \ a>5$.

Ответ: $a<1, \ a=3, \ a>5$.

№5. **При каких значениях параметра *a* уравнение $a+3x=||5x|-10|$ имеет ровно три корня?**

Решение:

Решим уравнение графически $\begin{cases} y=||5x|-10| \\ y=3x+a \end{cases}$

1) $y=3x+a$ - семейство прямых, параллельных прямой $y=3x$.

$y=||5x|-10|$ - ломаная.

2) Найдем абсциссы точек пересечения ломаной $y=||5x|-10|$ с осью x: $||5x|-10|=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Координаты точки пересечения с осью y: $(0;10)$.

При движении графика $y=3x+a$ снизу вдоль оси y до точки с координатами $(2;0)$ общих точек с ломаной $y=||5x|-10|$ нет. Одна общая точка в точке $(2;0)$.

Далее при движении до точки с координатами $(-2;0)$ - две общих точки.

Уравнение имеет три решения, когда графики пересекаются в трех точках. Это происходит, когда прямая $y=3x+a$ проходит через точку $(-2;0)$:

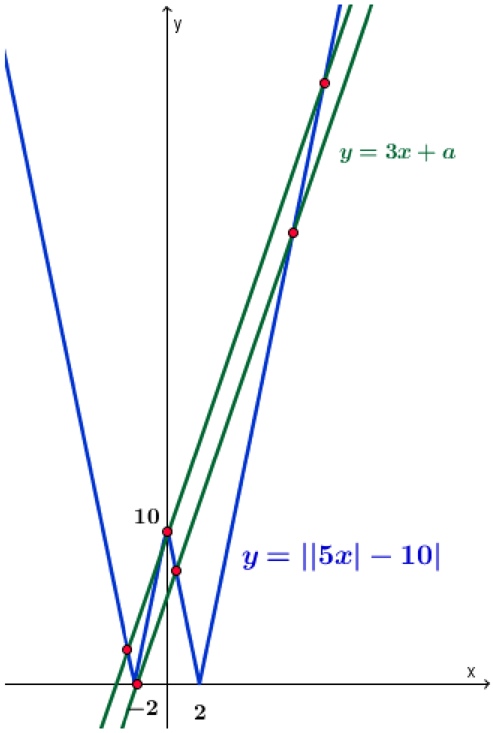
$0=3\cdot(-2)+a,\ \ a=6$.

От точки $(-2;0)$ до точки $(0;10)$ прямая пересекает ломаную четыре раза.

Проходя через точку $(0;10)$ прямая пересекает ломаную три раза: $10=0+a,\ a=10$.

При движении вверх за точку $(0;10)$, графики пересекаются два раза.

Уравнение имеет ровно три корня при $a=6$ и $a=10$.



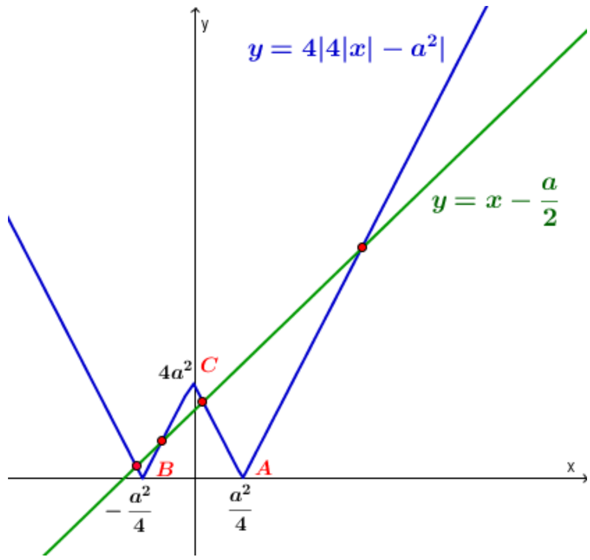
Ответ: 6 и 10.

.

№6. Найти все значения *a*, при которых уравнение $x-\frac{a}{2}=4\left|4|x|-a^2\right|$ имеет четыре решения.

Решение:

Решим уравнение графически $\begin{cases} y=4\left|4|x|-a^2\right| \\ y=x-\frac{a}{2} \end{cases}$



1) $y=x-\frac{a}{2}$ - семейство прямых,

параллельных биссектрисе I и III четвертей.

$y=4\left|4|x|-a^2\right|$ - ломаная.

2) Найдем координаты точек пересечения ломаной $y=4\left|4|x|-a^2\right|$ с осями координат:

$x=0,\ \ y=4a^2$

$y=0,\ \ 4\left|4|x|-a^2\right|=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{a^2}{4}$.

При движении прямой $y=x-\frac{a}{2}$ снизу вдоль оси y до точки A графики не имеют общих точек.

Когда графики пересекаются в точке A, уравнение имеет единственное решение.

Далее, при движении вверх до точки B, графики пересекаются в двух точках.

Проходя через точку $B\left(-\frac{a^2}{4};0\right)$, графики имеют три общие точки, а значит и уравнение имеет три решения.

$y=x-\frac{a}{2},\ \ 0=-\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2} \Leftrightarrow a=0$ (не подходит, т.к. одно решение) или $a=-2$.

При движении от точки B до точки C прямая пересекает ломаную четыре раза.

Проходя через точку $C\left(0;4a^2\right)$, графики имеют три общие точки, а значит и уравнение имеет три решения.

$y=x-\frac{a}{2},\ \ 4a^2=0-\frac{a}{2} \Leftrightarrow a=0$ (не подходит) или $a=-\frac{1}{8}$.

Далее, при движении вверх за точку C, графики пересекаются в двух точках.

Уравнение имеет четыре решения при $a\in\left(-2;-\frac{1}{8}\right)$.

Ответ: $\left(-2;-\frac{1}{8}\right)$

№7. **Найти значения *k*, для которых уравнение** $|x+3|-|x-4|=\dfrac{x}{3}+k$ **имеет два решения.**

Решение:

$$|x+3|-|x-4|=\frac{x}{3}+k;\quad |x+3|-|x-4|-\frac{x}{3}=k$$

$$\begin{cases} y=|x+3|-|x-4|-\dfrac{x}{3} & (1)\\ y=k \end{cases}$$

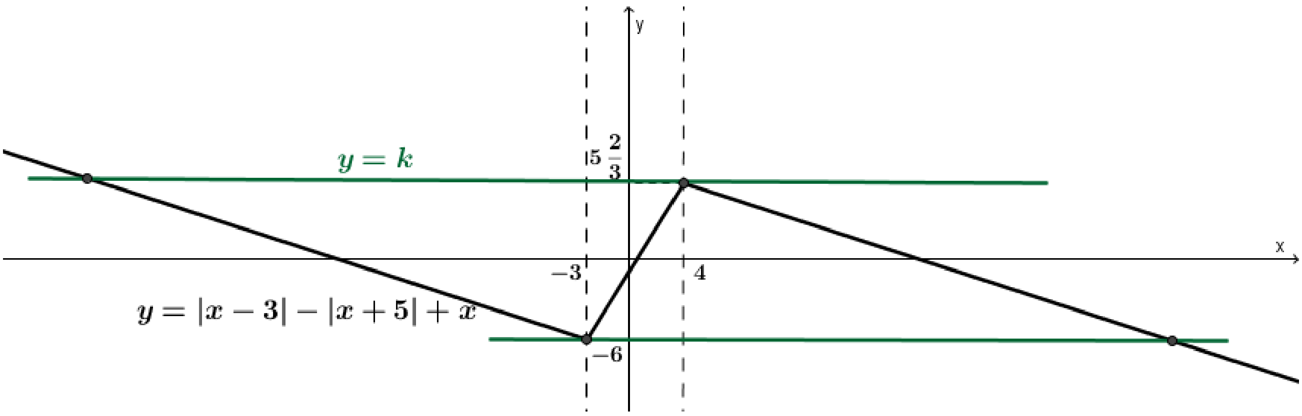
$$(1)\quad x\le -3,\quad y=-x-3+x-4-\frac{x}{3},\quad \begin{cases} y=-\dfrac{x}{3}-7\\ x\le -3 \end{cases}$$

$$-3<x\le 4,\quad y=x+3+x-4-\frac{x}{3},\quad \begin{cases} y=\dfrac{5x}{3}-1\\ x\in[-3;4] \end{cases}$$

$$x\ge 4,\quad y=x+3-x+4-\frac{x}{3},\quad \begin{cases} y=-\dfrac{x}{3}+7\\ x\in[4;\infty) \end{cases}$$

$$y(-3)=-6,\quad y(4)=5\frac{2}{3}$$

$$\text{Два решения: } \left[\begin{array}{l} y=-6\\ y=5\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \text{ т.к. } y=k, \text{ то } k=\left\{-6;5\frac{2}{3}\right\}$$



Ответ: -6 и $5\dfrac{2}{3}$.

С

№8. **Найти все значения *a*, при которых уравнение $|x-4|=ax+2$ имеет единственное решение.**

Решение:

Решим уравнение графически.

$$\begin{cases} y=|x-4| & (1) \\ y=ax+2 & (2) \end{cases}$$

(1) $y=|x-4|$ - ломаная с вершиной в точке $(4;0)$.

(2) $y=ax+2$ - семейство прямых, проходящих через точку $(0;1)$ с изменяющимся угловым коэффициентом a.

Если $a=-1$, то левая ветвь ломаной и прямая параллельны, других общих точек нет - нет решений.

При $a<-1$ - одно решение.

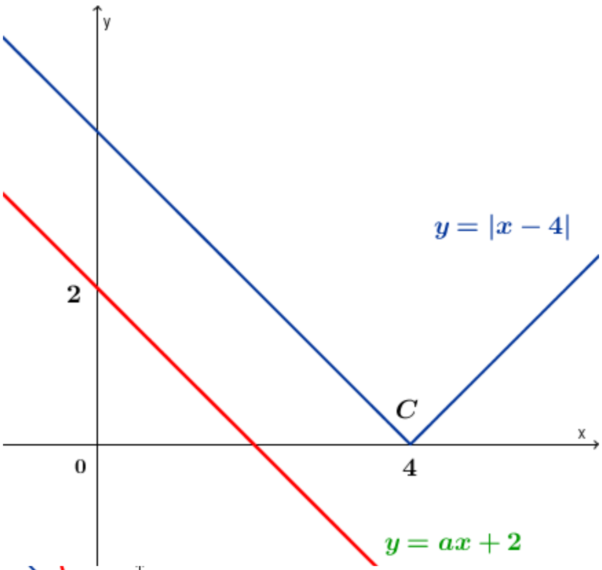
Одно решение, когда прямая $y=ax+2$ проходит через точку $C(4;0)$: $0=4a+2 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$.

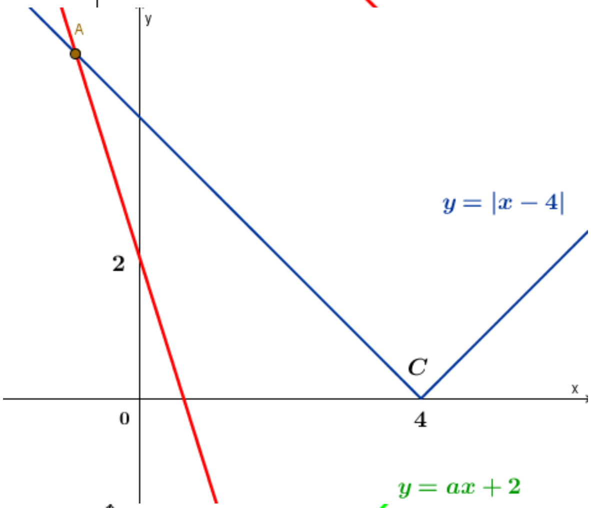
При $-1<a<-\frac{1}{2}$ нет решений.

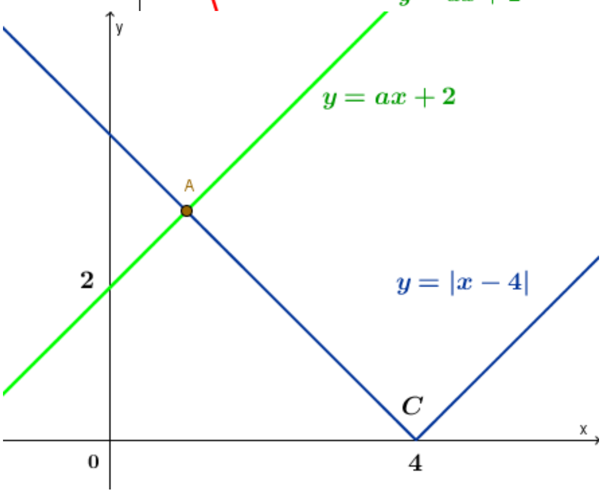
При $a=1$ правая ветвь ломаной параллельна прямой и есть одна общая точка прямой и левой ветви ломаной - одно решение.

Два решения при $-\frac{1}{2}<a<1$; при $a>1$ - одно решение.

Получим, что при $a<-1$,







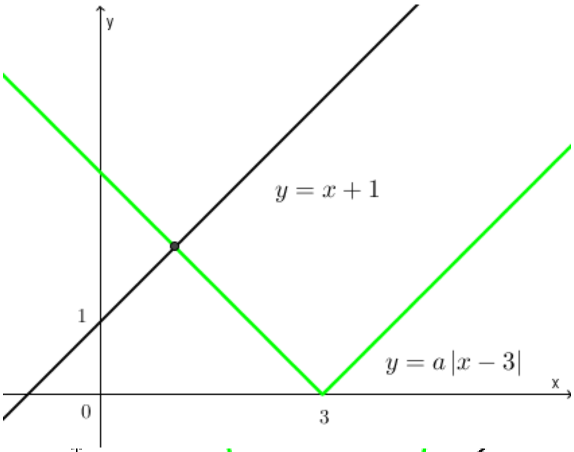
Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a\in(-\infty;-1)\cup\{-0,5\}\cup[1;\infty)$.

№9. **При каких значениях параметра a уравнение $x+1=a|x-3|$ имеет единственное решение?**

Решение:

Решим уравнение графически.

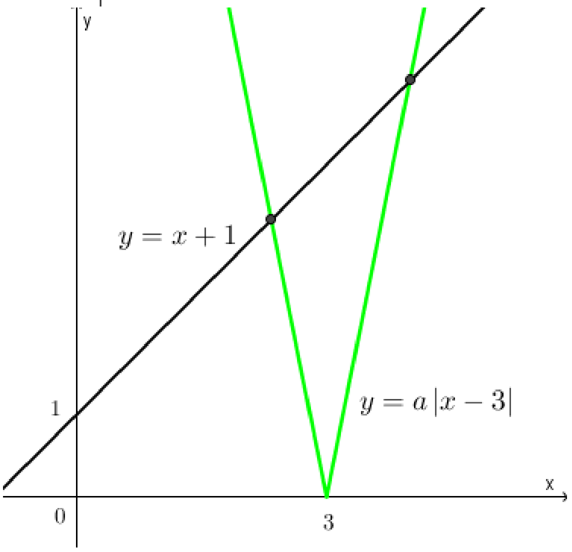
$x+1=a|x-3|$; $\begin{cases} y=x+1 \\ y=a|x-3| \end{cases}$.



$y=a|x-3|$ - семейство «уголков» с вершиной $(3;0)$ и подвижными ветками.
Одна точка пересечения графиков (одно решение), когда правая ветвь ломаной $y=a|x-3|$ будет параллельна прямой $y=x+1$ при $a=1$.
Уравнение имеет два решения, если $a>1$.
При уменьшении значения a до -1 уравнение также будет иметь одно решение.

$$-1<a\le 1.$$

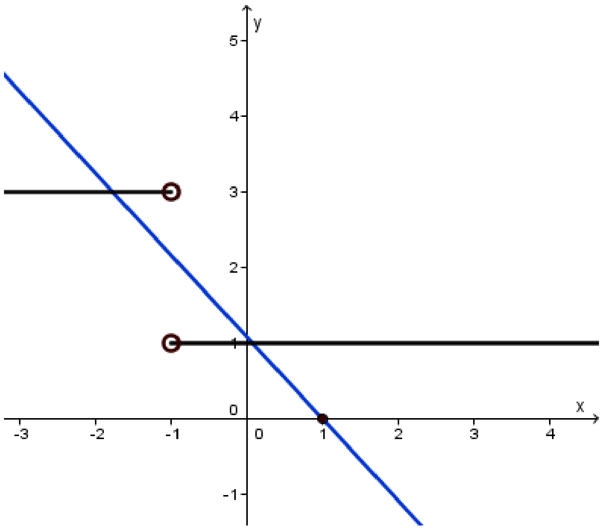
Уравнение не имеет решений, когда левая ветвь «ломаной» $y=a|x-3|$ будет параллельна прямой $y=x+1$ при $a=-1$.
Далее, при уменьшении значения a до $-\infty$, не будет общих точек у графиков, а значит, уравнение не будет иметь решений при $a<-1$.
Получим, что при $a\in(-1;1]$ уравнение имеет одно решение.



Ответ: $a\in(-1;1]$.

№10. **Найти все значения *a*, при которых уравнение $\frac{|x+1|}{x+1}-2=-ax+a$ имеет два решения.**

Решение:



$$\frac{|x+1|}{x+1}-2=-ax+a$$

1) $x+1>0,\quad x>-1$

$1-2=-a(x-1),\ a(x-1)=1$

$$\begin{cases} y=1 \\ y=a(x-1), \\ x>-1 \end{cases}$$

2) $x+1<0,\ x<-1,\ -1-2=-a(x-1),\ a(x-1)=3$

$$\begin{cases} y=3 \\ y=a(x-1) \\ x<-1 \end{cases}$$

$(-1;1)\quad y=a(x-1)$

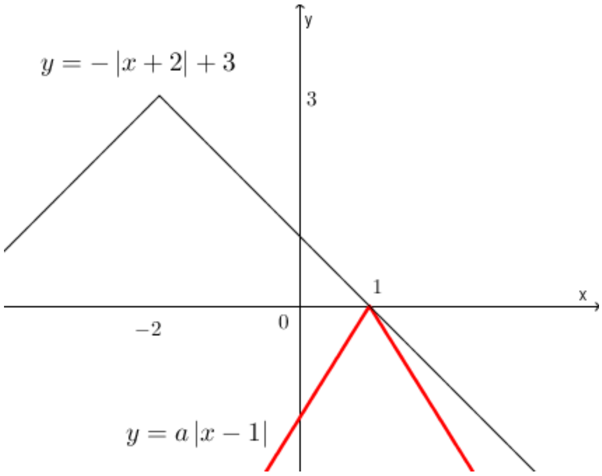
$$(-1;3)\quad \left.\begin{matrix} 1=a\cdot(-2),\quad a=-\frac{1}{2} \\ 3=a\cdot(-2),\quad a=-\frac{3}{2} \end{matrix}\right| \Rightarrow a\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

При $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ одно решение; два решения при $a\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$; при $a=-\frac{1}{2}$ одно решение; $\left(-\frac{1}{2};0\right]$ нет решений; $(0;\infty)$ одно решение.

Ответ: два решения при $a\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

№11. **При каких значениях параметра a уравнение $|x+2|+a|x-1|=3$ имеет единственное решение?**

Решение:



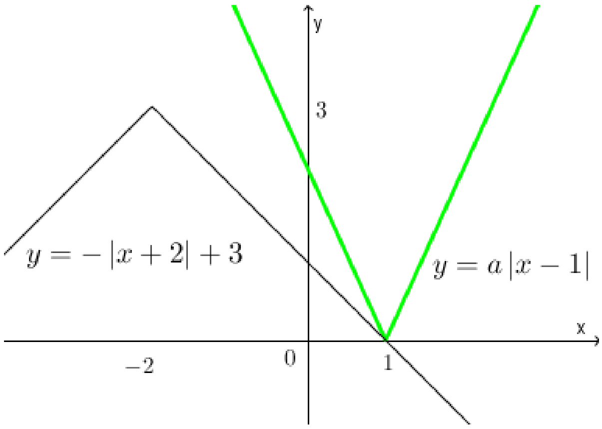
Решим уравнение графически.

$$a|x-1| = -|x+2|+3; \quad \begin{cases} y = -|x+2|+3 & (1) \\ y = a|x-1| & (2) \end{cases}.$$

$y = a|x-1|$ - семейство «уголков» с вершиной $(1;0)$ и подвижными ветками.

$y = -|x+2|+3$ - «уголок» с вершиной $(-2;3)$ и Ветвями, направленными вниз.

Правая ветвь графика (1) проходит через вершина $(1;0)$ графика (2).



Если $a < -1$, то только одна общая точка $(1;0)$ значит, одно решение.

Если $a = -1$, то правая ветвь графика (1) совпадает с правой ветвью графика (1), при этом их левые ветви параллельны - бесконечное множество решений.

Если $-1 < a < 1$, то два решения, при $a = 1$ - бесконечное множество решений, при $a > 1$ - одно решение.

Получим, что уравнение имеет единственное решение при $a < -1$ и $a > 1$.

Ответ: $a < -1$; $a > 1$.

№12. **Найти значения *k*, для которых уравнение $|x+2|-|x-3|=kx$ имеет три решения**

Решение:

$|x+2|-|x-3|=kx$

Решим уравнение графически.

$$\begin{cases} y=|x+2|-|x-3| & (1) \\ y=kx & (2) \end{cases}$$

Построим график уравнения (1).

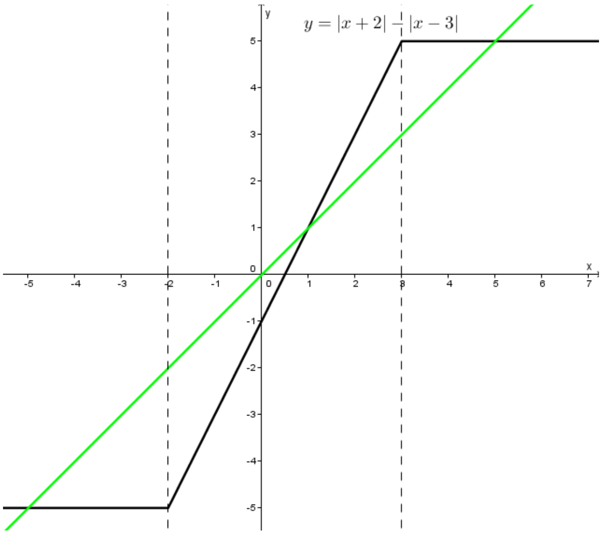
$x\le -2 \quad y=-x-2+x-3, \quad y=-5$

$-2\le x\le 3 \quad y=x+2+x-3, \quad y=2x-1$

$x\ge 3 \quad y=x+2-x+3, \quad y=5$

$y(-2)=-5$

$y(3)=5$



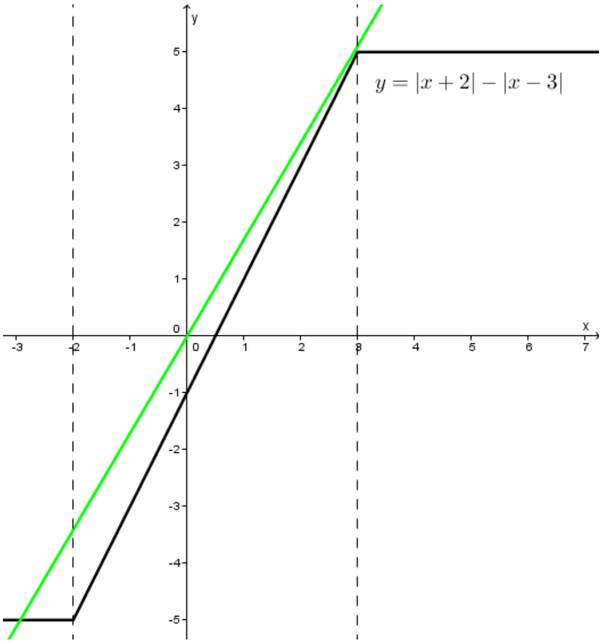
Графиком уравнения (2) $y=kx$ является семейство прямых, проходящих через точку $(0;0)$.

Уравнение имеет единственное решение при $k\le 0$.

Когда прямая $y=kx$ проходит через точку $(3;5)$, то графики имеют две общие точки:

$5=3k, \quad k=\dfrac{5}{3}$.

Три решения при $0<k<\dfrac{5}{3}$; одно решение при $k>\dfrac{5}{3}$.



Ответ: уравнение имеет три решения при $k\in\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$.

Ответ: уравнение имеет три решения при $k\in\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$.

Графическая иллюстрация облегчает решение уравнений с параметром. Рекомендуется, по возможности, собрать в одной стороне уравнения выражения, содержащие параметр, а в другой стороне - без параметра.

- ✓ ***Уравнение*** $f(x;a)=g(x)$ ***равносильно системе уравнений*** $\begin{cases} y=f(x;a) \\ y=g(x) \end{cases}$***, где функция*** $y=f(x;a)$ ***задает на плоскости*** $(x;y)$ ***семейство кривых, зависящих от параметра.***

- ✓ *График функции* $y=f(x+a)+b$ *получается из графика функции* $y=f(x)$ *параллельным переносом:*
  на $|a|$ *вправо, если* $a<0$*; на* $|a|$ *влево, если* $a>0$*;*
  на $|b|$ *вверх, если* $b>0$*; на* $|b|$ *вниз, если* $b<0$.